Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ
Профессор Тбилисского университета
Член-корреспондент Академии наук СССР

ПРОВЕРЕНО

КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1938 ЛЕНИНГРАД

Т-24-5-2
Прот. ТКК № 11

К ЧИТАТЕЛЮ

Издательство просит присылать Ваши замечания и отзывы об этой книге, по адресу: Москва, Центр, Третьяковский проезд, д. № 1. Редакция Технико-теоретической литературы ГОНТИ.

Редактор *И. Я. Акурский.* Техн. редактор *Е. Є. Весник.*

Сдано в набор 25/XI 1937 г. Подписано в печать 4/V 1938 г. Формат бумаги 62×94¹/₁₆. Тираж 15000. Колич. бум. л. 18. Уч. авт. л. 43,73. Учетн. № 4520. Количество печ. зн. в 1 бум. л. 101 000. Уполн. Главлита № Б-28029. Изд. № 69. Заказ № 1946. Отпечатано на бум. Камской бум. ф-ки.

3-я типография ОНТИ. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В этом издании упразднено разделение курса на две части, что дало возможность более систематически распределить материал. Текст предыдущего издания был подвергнут значительному расширению и коренной переработке. Книга в настоящем ее виде рассчитана, главным образом, на студентов физико-математических факультетов, хотя может служить пособием и для студентов втузов, желающих углубить свои познания.

Считаю необходимым дать следующие пояснения относительно характера изложения и выбора материала. Преподавание аналитической геометрии на физико-математических факультетах должно преследовать следующую основную цель: ознакомить начинающих с определенными *общими методами* приложения анализа к геометрии и развить у учащихся необходимые прочные навыки в этой области. Если бы не эта главная цель, изложение того, сравнительно небольшого, круга геометрических истин, который дается в курсе, потребовало бы значительно меньшего места. Сверх того, курс аналитической геометрии должен служить двум побочным, но весьма важным целям: приучить учащихся, возможно раньше, к оперированию векторами и к практическому применению теории определителей, теории линейных и квадратичных форм. Вряд ли какой-либо другой предмет учебного плана может лучше служить этим целям.

Я постарался учесть все эти требования, заботясь и о том, чтобы не слишком перегружать курс. Кроме того, я постарался распределить материал так, чтобы можно было опускать некоторые отдельные места книги, касающиеся менее элементарных вопросов, без ущерба для понимания остального.

В конце книги, в виде „Добавления", даны те элементарные сведения из теории линейных и квадратичных форм, которые необходимы для понимания основного текста книги. Начинающему рекомендуется знакомиться с материалом „Добавления" постепенно по мере встречи ссылок на отдельные места.

Относительно приводимых в книге „упражнений" должен заметить, что они ни в коем случае не могут заменить специальный сборник задач: упражнения эти, в большинстве чрезвычайно простые и не требующие никакой изобретательности со стороны читателя, предназначены исключительно для пояснения отдельных предложений и формул, встречающихся до них, а иногда и после них.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Редакции технико-теоретической литературы ОНТИ за чрезвычайно предупредительное отношение ко всем моим пожеланиям.

Тбилиси, осень 1937 г. *Н. Мусхелишвили*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 13

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Векторы. Параллельные проекции.

I. Отрезок, ось, вектор 15

1. Отрезок (15). — 2. Ось (15). — 3. Векторы (16). — 4. Равенство векторов (17). — 5. Векторы: свободный, скользящий и связанный (17).

II. Сумма векторов. Произведение вектора и числа. 18

6. Об операциях сложения и умножения (18). — 7. Сумма векторов. (19). — 8. Частные случаи (21). — 9. Разиость векторов (23). — 10. Произведение вектора и числа (23). — 11. Векторы, параллельные данному направлению. Орты (26). — 12. Векторы на оси (27).

III. Проекции на ось и на плоскость. 28

13. Проекция на ось (28). — 13а. Проекции фигур, расположенных в одной и той же плоскости (29). — 14. Проекция на плоскость (30). — 15. Проекции суммы и разности векторов на ось (31). — 16. Проекцни суммы и разности векторов на плоскость (32). — 17. Проекция произведения вектора и числа (32).

IV. Формулы для вычислеиия прямоугольных проекций 33

18. Угол между двумя направлеииями (33). — 19. Формула для вычисления прямоугольиой проекции вектора на ось (33). — 19а. Обобщение (34). — 20. Длина прямоугольной проекцни вектора на плоскость (36). — 21. Площадь проекции плоской фигуры на плоскость (36).

V. Скаляриое и векторное пронзведения двух векторов. 38

22. Скалярное произведение двух векторов (38). — 23. Выражение прямоугольной проекции вектора через скалярное произведение. (40). — 24. Правая и левая системы трех направлеиий (41). — 25. Векторное произведение двух векторов (41). — 26. Смешаиное произведеиие трех векторов (45).

ГЛАВА ВТОРАЯ

Координаты вектора и точки.

I. Декартовы координиаты. 47

27. Координаты на прямой (осн) (47). — 28. Координаты вектора и точки на плоскости (48). — 29. Прямоугольные координаты на плоскости (52). — 30. Координаты вектора и точки в пространстве (53). — 31. Прямоугольные координаты в пространстве (55). — 32. Разложение вектора по даниым направленням (56). — 33. Обобщенные декартовы координаты (57).

Стр.

II. Основные аффинные формулы 59

34. Координаты суммы данных векторов (60). — 35. Определение вектора по заданиым началу и концу (61). — 36. Координаты произведения вектора и числа (62). — 37. Условие параллельности двух векторов (63). — 37а. Условие параллельности двух векторов (продолжение) (65). — 38. Условие коллинеарности трех точек (65). — 39. Условие компланарности трех данных векторов (66). — 40. Условие компланарности четырех данных точек (69). — 41. Деление отрезка в данном отношении (69).

III. Основные метрические формулы в прямоугольных координатах . 72

42. Скалярное произведение двух векторов (72). — 43. Длина вектора; углы, составляемые вектором с осями координат; расстояние между двумя точками (73). — 44. Координаты орта. Косинусы направления (75). — 45. Угол между двумя векторами (направлениями) (76). — 46. Условие перпендикулярности двух векторов (направлевий) (77). — 47. Определение направления на плоскости (77). — 48. Определение угла между двумя направлениями, когда углу приписывается знак (80). — 49. Площадь треугольника, построенного на двух векторах, исходящих из одной точки (82). — 50. Площадь треугольника, заданного тремя вершинами (83). — 51. Векторное произведение двух данных векторов (84). — 52. Смешанное произведение трех векторов. Объем параллелепипеда (85). — 53. Объем тетраэдра, заданного координатами вершин (88).

IV. Основные метрические формулы в общих декартовых координатах. 88

54. Ковариантные и контравариантные декартовы координаты (88). — 55. Зависимость между ковариантными и контравариантными координатами (90). — 56. Выражения для скалярного произведения двух векторов, длины вектора, расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями (92). — 57. Координаты и косинусы направления в необобщенных косоугольных координатах (95).

V. Различные системы координат 97

58. Система полярных координат на плоскости (97). — 59. Обобщение (97). — 60. Преобразование полярных координат на плоскости в декартовы (98). — 61. Полярные координаты в пространстве (99). — 62. Полуполярные (цилиндрические) координаты (101). — 63. Общий метод координат (101).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Преобразование декартовых координат. Движения и аффинные преобразования.

I. Общие формулы преобразования декартовых координат. 104

64. Перенесение начала (104). — 65. Изменение координатных векторов (105). — 66. Общий случай (108). — 67. Приложения. (110). — 68. Преобразование ковариантных координат (113).

II. Важнейшие частные случаи преобразования координат 115

69. Преобразование прямоугольных координат на плоскости (115). — 70. Преобразование прямоугольных координат в пространстве (118). — 71. Соотношения между коэфициентами формул преобразования прямоугольных координат (119). — 72. Ортогональные подстановки. Алгебраический вывод формул предыдущего параграфа (122). — 73. Углы Эйлера (123). — 74. Преобразование необобщенных косоугольных координат на плоскости (126).

III. Движения и аффинные преобразования. 127

75. Движения (127). — 76. Аффинные преобразования (130). — 77. Подобные преобразования и движения как частные случаи аффинного преобразования (136). — 78. О группах точечных преобразований. О классификации геометрических дисциплин (139).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Об уравнении плоской линии. Прямая на плоскости.

Стр.

I. Аналитическое представление линии на плоскости 143

79. Уравнение линии (143). — 80. Примеры: уравнения прямой линии и окружности (145). — 81. Параметрическое представление линии (149). — 82. Уравнения линии в различных системах координат (150). — 83. Основные вопросы, связанные с аналитическим представлением линии (151). — 84. Примеры различных линий (153). — 85. Классификация плоских линий (158). — 86. Распадающиеся и нераспадающиеся алгебраические линии (160). — 87. О пересечении двух линий (161).

II. Различные виды уравнения прямой 162

88. Уравнение в коэфициентах направления. Параметрическое представление (162). — 89. Приведенное уравнение прямой (165). — 90. Общее уравнение прямой (167). — 91. Частные случаи общего уравнения прямой (168). — 92. Знак трехчлена $Ax + By + C$ (169). — 93. Уравнение в отрезках на осях (171). — 94. Построение прямой по заданному уравнению (171). — 95. Геометрическое значение коэфициентов A и B в общем уравнении (172). — 96. Нормальное уравнение прямой (173).

III. Основные задачи на прямую 175

97. Задача 1. Найти условия параллельности и совпадения двух заданных прямых (176). — 98. Задача 2. Найти точку пересечения двух прямых (177). — 99. Задача 3. Найти формулы перехода к новой декартовой системе, оси которой заданы уравнениями (178). — 100. Задача 4. Найти точки пересечения данной прямой с данной кривой (179). — 101. Задача 5. Найти угол между двумя данными прямыми (182). — 102. Задача 6. Найти условие перпендикулярности двух прямых (183). — 103. Задача 7. Найти расстояние данной точки до данной прямой (184). — 104. Задача 8. Найти отношение, в котором данная прямая делит отрезок, соединяющий две данные точки (186). — 105. Число независимых постоянных в уравнении прямой (187). — 106. Пучок прямых (188). — 107. Задача 9. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данному направлению (188). — 108. Задача 10. Найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки (189). — 109. Задача 11. Найти прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную к заданной прямой (189). — 110. Задача 12. Найти прямую, проходящую через заданную точку и составляющую с заданной прямой заданный угол (190). — 111. Общее уравнение прямых, проходящих через пересечение двух заданных (191). — 112. Задача 13. Найти прямую, проходящую через пересечение двух заданных прямых и через другую заданную точку (193). — 113. Условие пересечения трех прямых в одной точке (194). — 114. Задача 14. Найти уравнение прямой, проходящей через пересечение заданных прямых и имеющей заданное направление (195). — 115. Геометрическое значение постоянной k (196).

ГЛАВА ПЯТАЯ

Прямая и плоскость в пространстве.

I. Уравнение поверхности. Уравнение линии 199

116. Уравнение поверхности (199). — 117. Уравнение сферы и кругового конуса в прямоугольных координатах (200). — 118. Уравнение цилиндра (202). — 119. Классификация поверхностей (203). — 120. Уравнения линии (204). — 121. Параметрическое представление линий и поверхностей (205). — 122. О пересечении поверхностей и линий в пространстве (207).

Стр.

II. Уравнение плоскости 208

123. Общее уравнение плоскости. Параметрическое представленне (208). — 124. Геометрическое значение коэфициентов A, B, C (210). — 125. Частные случаи (210). — 126. Знак четырехчлена $Ax + By + Cz + D$ (211). — 127. Уравнение в отрезках на осях (211). — 128. Построение плоскости, заданной уравнением (212). — 129. Следы плоскости на плоскостях координат (213). — 130. Условия параллельности и совпадения двух плоскостей (214). — 131. Нормальное уравнение плоскости (215).

III. Уравнения прямой в пространстве 216

132. Уравнения в коэфициентах направления. Параметрическое представление (216). — 133. Приведенные уравнения прямой (219). — 134. Условня параллельности и совпадения двух прямых (221). — 135. Уравнения прямой в общем виде (221).

IV. Основные задачи на прямую и плоскость 223

136. Задача 1. Найти пересечение двух плоскостей (223). — 137. Задача 2. Найти пересечение трех плоскостей (224). — 138. Задача 3. Найти формулы перехода к иовой системе декартовых координат, плоскости которой заданы уравнениями (225). — 139. Задача 4. Найти пересечение плоскости и прямой (225). — 140. Задача 5. Найти пересечение: 1° данной поверхвости и плоскости; 2° данной поверхности и прямой; 3° данной кривой и плоскости (226). — 141. Задача 6. Найти углы между данными плоскостями и прямыми (228). — 142. Задача 7. Найти условия перпендикулярности данных прямых и плоскостей (230). — 143. Задача 8. Найти расстояние данной точки до данной плоскости (231). — 144. Задача 9. Найти отношение, в котором данная плоскость делит отрезок, соединяющий две данные точки (232). — 145. Число независимых постоянных, определяющих положение плоскости и прямой в пространстве (232). — 146. Связка прямых и плоскостей. Пучок плоскостей (233). — 147. Задача 10. Найти прямую, проходящую через данную точку и параллельную заданной прямой (или вектору) (236). — 148. Задача 11. Найти прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную к заданной плоскости (236). — 149. Задача 12. Найти прямую, проходящую через две заданные точки (236). — 150. Задача 13. Найти плоскость, проходящую через заданную точку и параллельную заданной плоскости (237). — 151. Задача 14. Найти плоскость, проходящую через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярную заданной прямой или вектору (237). — 152. Задача 15. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и задавную точку (237). — 153. Задача 16. Найти плоскость, проходящую через три заданные неколлинеарные точки (238). — 154. Задача 17. Найти плоскость, проходящую через заданную точку и параллельную другой заданной прямой (или вектору) (239). — 155. Задача 18. Найти плоскость, проходящую через заданиую прямую и перпендикулярную к заданной плоскости (240). — 156. Задача 19. Найти условия компланарности (пересечения) двух данвых прямых (240). — 157. Задача 20. Найти уравнения перпендикуляра, опущенного из заданной точки M на заданвую прямую Δ (241). — 158. Задача 21. Найти расстояние заданной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до заданной прямой (242). — 159. Задача 22. Найти уравнения общего перпендикуляра к двум прямым Δ_1 и Δ_2 (243). — 160. Задача 23. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми (243).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Мнимые и несобственные элементы. Однородные параллельные и проективные координаты. Проективные преобразования.

I. Мнимые геометрические элементы 245

161. Мнимые точки и векторы (245). — 162. Мнимые прямые и плоскости (248).

Стр.

II. Одиородиые координаты и иесобственные элементы. Координаты прямой и плоскостн 249

163. Однородные декартовы координнаты на прямой (249). — 164. Приложение к корням алгебраического уравнения (250). — 165. Однородные декартовы координаты на плоскости (252). — 166. Уравнение прямой в однородных координатах (255). — 167. Параметрическое представление прямой в однородных координатах (261). —168. Одиородные декартовы координаты в пространстве (263). — 169. Параметрическое представление прямой в пространстве (268). — 170. Координаты прямой на плоскости. Взаимиость между точками и прямыми (268). — 171. Координаты плоскости в пространстве. Взаимность между точками и плоскостями (271). — 172. Основные геометрические образы проективной геометрии (272). — 173. Преобразование однородных декартовых координат (272). — 174. Уравнение алгебраических кривых и поверхностей в однородных координатах. Некоторые общие предложения (274). — 175. Циклические точки и сферическая окружность (281).

III. Проективные координиаты и проективные преобразования 284

176. Предварительные замечания (284). — 177. Двойное отношение четырех точек (284). — 178. Гармоническое разделение (289). — 179. Инвариантность двойного отношения при гомографической подстановке (290). — 180. Двойное отношение четырех прямых и четырех плоскостей пучка (293). — 181. Проектирования и сечения (296). — 182. Проективное соответствие между образами первой ступени (297). — 183. Проективные координаты на прямой (299). — 184. Двойное отношение четырех точек на прямой, заданной параметрически (301). — 185. Двойное отношение четырех прямых (плоскостей) пучка, заданного параметрически. Проективные координнаты в пучке (303). — 186. Аналитическое выражение проективного соответствия двух образов первой ступени (305). — 187. Распространение основных понятий проективной геометрии на мнимые элементы (306). — 188. Наложенные образы первой ступени. Инволюция (306). — 189. Проективные координнаты на плоскости (309). — 190. Проективные координаты в пространстве (314). — 191. Преобразование проективных координат на плоскости и в пространстве (316). — 192. Уравнения алгебранческих линий и поверхностей в однородных проективных координатах (316). — 193. Проективные точечные преобразования плоскости и пространства (317). — 194. Корреляция (взаимность) (321).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

Простейшие уравнения и элементарные свойства конических сечений.

I. Нормальные уравнения конических сечений 323

195. Определение эллипса и его нормальное уравнение (323). — 196. Исследование формы эллипса (325). — 197. Определение гиперболы и ее нормальное уравнение (328). — 198. Исследование формы гиперболы. Асимптоты (329). — 199. Свойства фокальных расстояний. Директрисы эллипса и гиперболы. Новое определение этих линий (332). — 200. Определение параболы и ее нормальное уравнение (335).

II. Эллипс, гипербола, парабола как конические сечения 339

201. Пересечение прямого кругового конуса плоскостью (339). — 202. Получение данного коннческого сечения из данного конуса (342).

III. Некоторые простейшие виды уравнений конических сечений. Подобие конических сечений 343

203. Уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам (343). — 204. Параметрическое представление конических сечений. Построение по точкам (344). — 205. Полярные уравнения конических сечений, отнесенных к фокусу (347). — 206. Уравнения конических сечений, отнесенных к вершине (350). — 207. Подобные конические сечения (352).

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

Проективные свойства линий второго порядка. Касательная и поляра.

Стр.

I. Проективная классификация линий второго порядка 355

208. Обозначения (355). — 209. Распадающиеся и нераспадающиеся линии второго порядка. Совпадение линий второго порядка (358). — 210. Условие распадения линии второго порядка (359). — 211. Каноническое уравнение линии второго порядка в проективных координатах. Проективная классификация (360). — 212. Определение линии второго порядка по пяти точкам (363). — 213. Пучок линий второго порядка (366). — 214. Теорема Паскаля (367). — 215. Образование линии второго порядка проективными пучками (369).

II. Пересеченне линии второго порядка с прямою. Касательная . . . 370

216. Уравнение, определяющее пересечение линии второго порядка с прямою в однородных координатах (370). — 217. Касательная к линии второго порядка (371). — 218. Касательная, как предел секущей (373).

III. Полюс и поляра. Тангенциальное уравнение 377

219. Проведенне касательной из заданной точки плоскости. Полюс и поляра (377). — 220. Другое определение полюса и поляры. Сопряженные точки (379). — 221. Полярность, определяемая линией второго порядка (381). — 222. Автополярный треугольник (382). — 223. Сопряженные прямые. Тангенциальное уравнение линий второго порядка. Понятие класса (383). — 224. Применения принципа взаимности к линиям второго порядка (385).

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

Аффинные и метрические свойства линий второго порядка.

I. Аффинная классификация. Центр, диаметры, асимптоты 387

225. Аффинная классификация линий второго порядка (387). — 225а. О распадающейся линии параболического типа (389). — 226. Асимптотические направления (390). — 227. Уравнение, определяющее пересечение линии второго порядка с прямою в неоднородных декартовых координатах (391). — 228. Центр линии второго порядка (392). — 229. Асимптоты (395). — 230. Диаметры линий второго порядка (396). — 231. Связь диаметров с касательными (400). — 232. Диаметры как поляры несобственных точек (401). — 233. Построение центра и диаметров линий второго порядка, заданных очертанием. Дополнительные хорды (402). — 234. Уравнение центральных линий второго порядка, отнесенных к сопряженным диаметрам (402). — 235. Простейшие уравнения линий параболического типа (405). — 236. Уравнения линий второго порядка, отнесенных к касательной и диаметру, проведенному через точку касания (406).

II. Главные диаметры. Нормальные уравнения в прямоугольных координатах 407

237. Главные диаметры (407). — 238. Нормальные уравнения конических сечений в декартовых прямоугольных координатах (409). — 239. Об уравнении окружности (411).

III. Нормаль. Фокальные свойства касательных 412

240. Нормаль к плоской линии (412). — 241. Свойства касательных к эллипсу (413). — 242. Свойства касательных к гиперболе (415). — 243. Свойства касательных к параболе (416).

Стр.

IV. Исследование диаметров эллипса, гиперболы, параболы 418

244. Диаметры эллипса (418). — 245. Диаметры гиперболы (420). — 246. Диаметры параболы (423).

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

Инварианты. Определение формы и положения линии второго порядка.

I. Инварианты 425

247. Преобразование уравнения при замене декартовых координат (425). — 248. Понятие инварианта. Примеры (428). — 249. Основные инварианты уравнения линии второго порядка (429). — 250. Метрические инварианты в случае общих декартовых координат (433). — 251. Приложение: теоремы Аполлония (435).

II. Упрощение уравнения линии второго порядка 436

252. Преобразование к центру (436). — 253. Приведение квадратичной формы двух переменных к каноническому виду при помощи ортогональной подстановки (438). — 254. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка (441). — 255. Упрощение уравнения линии без определенного центра (443). — 256. Второй способ упрощения уравнения совокупности двух параллельных прямых. Условный инвариант (446). — 257. Сводка результатов. 1. Аффинная классификация линий второго порядка (448). — 258. Сводка результатов. 2. Определение формы и размеров линии второго порядка по ее уравнению (450). — 259. Сводка результатов. 3. Приведение уравнения к нормальному виду и определение положения линии на плоскости (451). — 260. Условие подобия двух линий второго порядка (456). — 261. Условие конгруэнтности двух линий второго порядка. Доказательство полноты системы ортогональных инвариантов A, A_{33}, S. (459).

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

Основные свойства поверхностей второго порядка. Касательная плоскость, центр, диаметры.

I. Проективная классификация. Касательная плоскость 464

262. Обозначения (464). — 263. Распадающиеся поверхности второго порядка. Условие совпадения (466) — 264. Проективная классификация поверхностей второго порядка (468). — 265. Уравнение, определяющее пересечение прямой с поверхностью второго порядка в однородных координатах (472). — 266. Касательные прямые. Касательная плоскость (473). — 267. Поверхности с эллиптическими, гиперболическими и параболическими точками (474). — 268. Касательный конус. Полярная плоскость и полюс. Тангенциальное уравнение (477).

II. Аффинные свойства поверхностей второго порядка. Центр. Диаметры 480

269. Пересечение с несобственной плоскостью. Аффинная классификация (480). — 270. Уравнение, определяющее пересечение поверхности второго порядка и прямой в неоднородных декартовых координатах (482). — 271. Центр (483). — 272. Диаметральные плоскости (485). — 273. Диаметральные плоскости и диаметры центральных поверхностей (486). — 274. Диаметральные плоскости, как полярные плоскости несобственных точек (487). — 275. Асимптоты (487).

Стр.

III. Метрические свойства. Главные диаметральные плоскости. Приведение уравнения к нормальному виду 488

276. Главные диаметральные плоскости и главные направления (488).— 277. Некоторые общие предложения о преобразовании квадратичной формы трех переменных (490). — 278. Свойства корней уравнения $D(\lambda) = 0$ и соответствующих главных направлений (492). — 279. Преобразование уравнения поверхности при замене декартовых координат (497). — 280. Ортогональные инварианты (497). — 281. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 1. Центральные поверхности (499). — 282. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 2. Поверхности без определенного центра (501).— 283. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 3. Сводка результатов (504). — 283а. О правиле знаков Декарта (505).

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

Исследование формы отдельных поверхностей второго порядка. Прямолинейные образующие. Круговые сечения.

I. Исследование формы отдельных поверхностей 507

284. Перечень нормальных уравнений отдельных поверхностей (507).— 285. Сечения поверхности второго порядка параллельными плоскостями (508). — 286. Конус второго порядка (508). — 287. Эллипсоид (510).— 288. Однополостный гиперболоид (512). — 289. Двухполостный гиперболоид (516). — 290. Эллиптический параболоид (518). — 291. Гиперболический параболоид (520).

II. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка . . . 523

292. Общие замечания (523). — 293. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида (524). — 294. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида (530). — 295. Построение линейчатой поверхности второго порядка по трем заданным образующим (534).

III. Круговые сечения поверхностей второго порядка 535

296. Предварительные замечания (535). — 297. Круговые сечения центральных поверхностей второго порядка (536). — 298. Круговые сечения эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра (540).

ДОБАВЛЕНИЕ.

Элементарные сведения о линейных и квадратичных формах.

I. Об определителях и таблицах 543

1. Некоторые свойства определителей (542). — 2. Ранг определителя или таблицы (545). — 3. Решение системы линейных уравнений с определителем, отличным от нуля (546).

II. Линейные формы 549

4. Алгебраические формы. Линейные формы (548). — 5. Системы линейных форм. Зависимые и независимые линейные формы (548). — 6. При-

Стр.

ложение к решению системы линейных однородных уравнений в общем случае (552). — 6а. Частный случай (555). — 7. Решение системы неоднородных уравнений (557). — 8. Линейные подстаиовки (558). — 9. Последовательность линейных подстановок (561).

III. Билинейные и квадратичные формы 563

10. Билинейные и квадратичные формы (562). — 11. Преобразование квадратичных форм (564). — 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (566). — 13. Условие распадения квадратичной формы на два линейных множителя (571). — 14. Ортогональные подстановки (573). — 15. О приведении квадратичиой формы к каноническому виду, при помощи ортогональной подстановки (576).

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия имеет своим предметом изучение свойств геометрических фигур при помощи исчисления, или *математического анализа*.

Дело в том, что, как мы увидим ниже, можно различными способами установить тесную связь между геометрическими фигурами, с одной стороны, и числами, — с другой, таким образом, чтобы каждой геометрической фигуре или какому-либо ее свойству отвечала определенная система чисел или же определенное соотношение между числами.

Можно придумать множество способов для осуществления упомянутой связи, но только немногие из них представляют интерес для математики и ее приложений к естествознанию. Важнейшим из этих способов является способ, впервые систематически примененный *Декартом* [1]), которого можно считать основателем аналитической геометрии.

Впрочем, в данный момент нам достаточно знать только, что указанная связь между геометрическими и числовыми образами осуществима тем или иным способом и что, таким образом, можно всякую геометрическую задачу свести к задаче анализа.

Из сказанного уже ясно, насколько важную роль должна играть аналитическая геометрия: ведь она позволяет использовать для геометрии большую часть того богатства, которое сосредоточено в математическом анализе и, в частности, в алгебре. Больше того, очень часто является удобным сводить решение некоторых задач анализа к рассмотрению геометрических фигур, так что и геометрия, в свою очередь, является существенным подспорьем для анализа. Например, решение многих задач алгебры приобретает особую наглядность благодаря геометрическим рассмотрениям.

---

[1]) Декарт (René Descartes, или, согласно принятому в его время обычаю латинизировать имена, Cartesius) — знаменитый французский математик и философ (1596 — 1650).

Обычно под термином „аналитическая геометрия“ подразумевают ту часть этой науки, которая пользуется только элементарной алгеброй [1]).

В этом же смысле применен этот термин и в заглавии нашей книги.

Весьма полезным вспомогательным средством в аналитической геометрии (так же, как и во многих других частях математики) является понятие вектора. Мы начинаем этот курс с изложения основных понятий и предложений, касающихся векторов, ограничиваясь самым необходимым.

---

[1]) Другие отрасли этой науки носят названия: диференциальная геометрия, теория поверхностей и пр.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВЕКТОРЫ. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

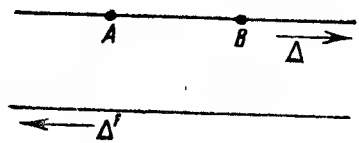
I. ОТРЕЗОК, ОСЬ, ВЕКТОР

1. Отрезок. Понятие *отрезка* известно из элементарной геометрии: отрезок есть часть прямой, ограниченная с обеих сторон двумя точками.

Существенным элементом отрезка является его *длина*. Напомним вкратце, что подразумевают под этим термином. Возьмем какой-либо произвольный, но определенный, отрезок в качестве единицы длины и этим отрезком измерим данный отрезок. Длиной данного отрезка называется *число*, показывающее, сколько раз отрезок, принятый за единицу, содержится в данном отрезке. Может, конечно, случиться, что отрезок-единица не укладывается целое число раз в данном. Тогда длина данного отрезка будет не целым числом, а дробным или даже иррациональным; последний случай, собственно говоря, и есть наиболее общий.

Все это хорошо известно из элементарной математики. Для нас важно лишь запомнить, что под *длиной* данного отрезка мы всегда будем подразумевать *положительное число*, получаемое в результате измерения отрезком, выбранным за единицу.

2. Ось. В аналитической геометрии, кроме понятия прямой линии, играет основную роль весьма близкое к нему понятие *оси*.



Черт. 1.

Рассмотрим какую-либо прямую линию AB. Точка, движущаяся непрерывно по этой прямой в одну и ту же сторону, может описывать ее в двух противоположных направлениях: в направлении, ведущем от A к B, или же, наоборот, в направлении, ведущем от B к A. Выберем какое-либо одно из этих двух направлений и назовем его *положительным*; противоположное направление назовем *отрицательным*.

Прямая, на которой выбрано определенное направление в качестве положительного, называется осью. Ось обыкновенно изображается при помощи прямой, на которой стрелкой отмечено положительное направление; например, на черт. 1 ось Δ имеет положительное направление, ведущее от A к B.

Про две оси говорят, что они имеют *одинаковые направления*, когда они *не только параллельны* между собою, *но и имеют одинаковые положительные направления*; в случае, когда две оси параллельны, но положительные направления их различны, говорят, что эти оси напра-

влены *противоположно*; например, на черт. 1 оси Δ и Δ' имеют противоположные направления.

3. Векторы. *Вектором* называется отрезок прямой, которому приписано определенное положительное направление.

На чертеже вектор изображается отрезком прямой, на котором стрелкой отмечено положительное направление.

Одна из двух конечных точек вектора называется *началом* вектора, а другая — его *концом*; положительное направление вектора идет от начала к концу. Начало вектора называют также *точкой* его *приложения*.

Вектор, имеющий началом точку A, а концом — точку B, мы будем обозначать так:

$$\overrightarrow{AB},$$

ставя на первое место букву, обозначающую начало; стрелка над буквами указывает нам, что мы имеем дело с вектором, а не простым отрезком. Еще чаще мы будем обозначать вектор одной только буквой, напечатанной жирным шрифтом [1]), например $\mathbf{P}$.

Для длины вектора $\overrightarrow{AB}$ или $\mathbf{P}$ мы будем применять обозначение

$$|\overrightarrow{AB}| \quad \text{или} \quad |\mathbf{P}|.$$

Длину вектора часто называют его *абсолютным значением*.

Понятие вектора играет большую роль как в математике, так и во многих областях физики и механики. Многие физические величины могут быть представлены при помощи векторов, и это представление очень часто способствует обобщению и упрощению формул и результатов. Именно, всякая физическая величина, имеющая, кроме определенного численного значения [2]), и определенное направление, может быть представлена вектором, длина которого (численно) равна численному значению рассматриваемой величины, а направление совпадает с ее направлением.

Примерами физических величин, изображаемых векторами (такие величины называются *векторными*), могут служить: сила, скорость (данной точки), ускорение и пр. Часто векторные величины и векторы, их изображающие, отождествляются друг с другом: так, например, говорят, что сила (или скорость) есть вектор [3]).

Векторным величинам противопоставляют величины *скалярные*, которые не имеют направления и вполне характеризуются заданием лишь их численного значения (полученного в результате измерения определенной единицей) и знака. Например, длина отрезка, площадь, объем, масса и т. п. суть величины скалярные.

---

[1]) В рукописи мы рекомендуем обозначать вектор буквой со стрелкой над ней, напр. $\overrightarrow{P}$. Можно применять и какой-либо другой знак.

[2]) Это численное значение получается в результате измерения данной величины определенной (произвольно выбранной) единицей.

[3]) Данное нами определение вектора как отрезка, снабженного направлением, с известной точки зрения, слишком узко. Можно дать более общее, абстрактное определение, согласно которому отрезок, снабженный направлением, будет уже не вектором, а одним из видов векторных величин.

В дальнейшем под скаляром мы будем подразумевать число (положительное или отрицательное), характеризующее данную скалярную величину.

4. Равенство векторов. Два вектора **P** и **Q** называются *равными, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления* [1]). Это обстоятельство записывается следующим образом:

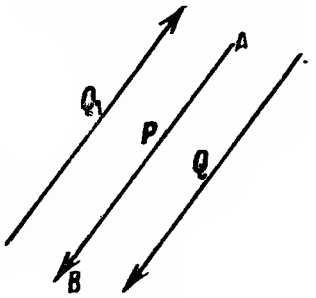
$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}. \tag{1}$$

Необходимо всегда помнить, что *равенство длин двух векторов еще не означает равенства этих векторов.* Для того чтобы подчеркнуть этот факт, мы будем иногда называть равенства вида (1) векторными равенствами [2]).

Если векторы **P** и **Q** имеют одинаковые длины, но противоположные направления, то такие векторы называются взаимно противоположными. Это обстоятельство записывается так:

$$\mathbf{P} = -\mathbf{Q}.$$

Например, на черт. 2 векторы **P** и **Q** равны, а векторы **P** и $\mathbf{Q}_1$ — взаимно противоположны.



Черт. 2.

Если длина вектора равна нулю, то говорят, что этот вектор равен нулю. Направление такого вектора является неопределенным и его можно считать параллельным любому направлению.

Введем еще один термин: *отложить* данный вектор от данной точки, — это значит построить вектор, равный данному и имеющий началом данную точку.

5. Векторы: свободный, скользящий и связанный. В большинстве рассматриваемых ниже вопросов существенную роль играют только длина и направление вектора; положение же начала никакой роли не играет. Поэтому в дальнейшем (если противное не оговорено особо) мы будем считать тождественными векторы, имеющие одинаковые длины и направления, независимо от положения их начал. Иными словами, мы будем считать вполне тождественными (или *эквивалентными*) векторы, равные между собою.

Надо, однако, заметить, что в очень многих вопросах чистой и прикладной математики приходится рассматривать векторы, положение начала которых играет существенную роль. В отличие от последних векторы, только что охарактеризованные нами (т. е. такие, положение начала которых не играет никакой роли), называются *свободными.*

Из несвободных векторов в математике, механике и физике рассматриваются векторы *скользящие* и *связанные.*

Скользящие векторы — это такие векторы, которые считаются тождественными (эквивалентными), если они не только равны, но и распо-

[1]) В дальнейшем, говоря о направлении вектора или оси, мы всегда подразумеваем положительное направление.

[2]) Иногда такие равенства называют геометрическими.

ложены на одной и той же прямой. Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу. Действительно, из механики известно, что две силы, равные и расположенные на одной прямой, эквивалентны в том смысле, что оказывают на твердое тело одинаковые действия.

Связанные векторы — это такие векторы, которые считаются тождественными, если они не только равны, но и имеют одинаковые начала. Примером связанного вектора может служить сила, приложенная к некоторой точке нетвердого (например, упругого) тела.

II. СУММА ВЕКТОРОВ. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА И ЧИСЛА

6. Об операциях сложения и умножения. В дальнейшем (в этом и в V отделах этой главы) нам предстоит рассмотреть несколько простейших операций, аналогичных операциям сложения и умножения обыкновенных чисел. Рассмотрение этих операций составляет предмет той части теории векторов, которая носит название *векторной алгебры*. Мы ограничимся изложением самых основных понятий.

Введение тех или иных операций оправдывается пользой, которую можно извлечь из их применения. Названия „сложение" и „умножение", которые даются вводимым ниже операциям, оправдываются тем, что они обладают некоторыми из основных свойств сложения и умножения обыкновенных чисел.

Вот те свойства („законы") сложения и умножения обыкновенных чисел, которые остаются справедливыми и для вводимых ниже операций (как это будет доказано в каждом отдельном случае).

1°. *Переместительный* (коммутативный) закон для сложения: сумма (конечного числа слагаемых) не зависит от порядка, в котором производится сложение.

2°. *Сочетательный* (ассоциативный) закон для сложения: не изменяя суммы, слагаемые можно соединять в произвольные группы, например,

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c.$$

3°. *Распределительный* (дистрибутивный) закон, который словесно можно формулировать так: для умножения суммы на данный множитель достаточно умножить на него каждое слагаемое и результаты сложить. Формулами он выражается так:

$$\left.\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,b&=a_1b+a_2b+\ldots+a_nb,\\ b(a_1+a_2+\ldots+a_n)&=ba_1+ba_2+\ldots+ba_n.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

В противоположность указанным свойствам свойство, выражаемое равенством

$$ab=ba$$

(переместительный закон для умножения), и свойство, выражаемое равенством

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

(сочетательный закон для умножения), перестают быть справедливыми для некоторых из вводимых ниже операций.

Замечание 1. Если известно, что операции сложения и умножения обладают свойством 2° (сочетательность сложения) и, кроме того, свойством, выражаемым равенствами

$$(a_1+a_2)\cdot b = a_1 b + a_2 b, \quad b\cdot(a_1+a_2) = ba_1 + ba_2 \tag{1a}$$

(распределительность для случая *двух* слагаемых), то из этого вытекают и общие формулы (1). Докажем, например, что из первой формулы (1a) вытекает первая формула (1). Пусть известно, что

$$(a_1+a_2)\,b = a_1 b + a_2 b, \tag{2}$$

т. е. пусть справедлива первая из формул (1) при $n=2$. Для того чтобы показать, что она справедлива при всяком n, достаточно показать, что она справедлива для n слагаемых, если она справедлива для $n-1$ слагаемых („доказательство переходом от n к $n+1$" или „методом полной индукции"). Для $n-1$ слагаемых упомянутая формула имеет вид

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})\,b = a_1 b+\ldots+a_{n-1}\,b; \tag{1b}$$

согласно сказанному будем считать ее справедливой. На основании 2°

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = \alpha + a_n,$$

где временно введено обозначение $\alpha = a_1+\ldots+a_{n-1}$. Следовательно, принимая во внимание (2), будем иметь

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)b &= (\alpha+a_n)\,b = \alpha b + a_n b = \\ &= (a_1+\ldots+a_{n-1})\,b + a_n b;\end{aligned}$$

отсюда, на основании (1b), следует требуемая формула:

$$(a_1+\ldots+a_n)\,b = a_1 b + a_2 b+\ldots+a_n b.$$

Совершенно аналогично доказывается и вторая из формул (1).

Замечание 2. Легко также показать, что из свойств 1°—3° непосредственно следует обычное правило умножения суммы на сумму („правило умножения многочленов"): достаточно каждое слагаемое первой суммы умножить на каждое слагаемое второй и результаты сложить. Действительно, пусть имеем произведение

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Полагая временно $b_1+\ldots+b_n = b$ и применяя первую формулу (1), будем иметь

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) &= (a_1+\ldots+a_n)\cdot b = \\ &= a_1 b + a_2 b+\ldots+a_n b.\end{aligned}$$

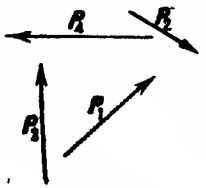
Подставляя в каждый член последней суммы вместо b его значение $b_1+\ldots+b_n$ и применяя вторую формулу (1), получим требуемый результат.

7. Сумма векторов. Пусть дано несколько произвольно расположенных в пространстве векторов:

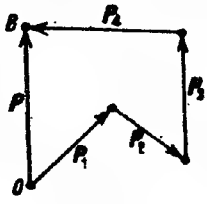
$$\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2,\ \mathbf{P}_3,\ \ldots,\ \mathbf{P}_{n-1},\ \mathbf{P}_n,$$

(черт. 3a; для простоты на чертеже представлен случай, когда дано 4 вектора, т. е. когда $n = 4$).

От произвольной точки O пространства отложим вектор $\mathbf{P}_1$ (черт. 3b); далее, от конца полученного таким образом вектора отложим вектор $\mathbf{P}_2$; от конца этого последнего вектора отложим вектор $\mathbf{P}_3$ и т. д. для всех данных векторов. Таким образом мы получим ломаную, составленную из векторов, равных соответственно векторам



Черт. 3a.



Черт. 3b.

$$\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2,\ \mathbf{P}_3,\ \ldots,\ \mathbf{P}_{n-1},\ \mathbf{P}_n$$

и расположенных так, что *конец каждого предыдущего вектора совпадает с началом последующего.*

Эта (вообще разомкнутая) ломаная называется *многоугольником данной системы векторов.*

Вектор $\mathbf{P} = \overrightarrow{OB}$, имеющий началом начало O первого вектора, а концом — конец B последнего вектора, есть замыкающий вектор данного многоугольника.

Замыкающий вектор, или всякий равный ему вектор, называется *суммой* данных векторов, что записывается следующим образом:

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \ldots + \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_n. \qquad (1)$$

Иногда, чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с суммой векторов, а не с суммой их длин, мы будем называть (1) *векторной суммой.*

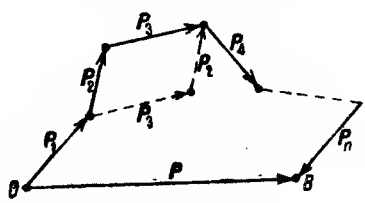
При составлении суммы векторов мы взяли слагаемые в определенном порядке, но легко видеть, что результат не зависит от порядка, т. е. что определенное нами сложение векторов обладает свойством переместительности (коммутативности).

Действительно, докажем сперва, что сумма

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \ldots + \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_n \qquad (2)$$

не изменяется при перестановке двух соседних слагаемых. Переставим, например, слагаемые $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$, т. е. составим сумму

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_4 + \ldots + \mathbf{P}_n. \qquad (3)$$



Черт. 4.

Из черт. 4, на котором изображен многоугольник данных векторов, построенный в последовательности (2), и (пунктиром) то изменение, которое происходит в нем от перестановки слагаемых $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$, ясно, что начало вектора $\mathbf{P}_4$ останется на старом месте, а следовательно, и все последующие векторы не изменят своего положения; ясно поэтому, что сумма $\overrightarrow{OB}$ останется неизменной.

Теперь уже легко доказать, что сумма не изменяется при произвольной перестановке слагаемых. Действительно, всякую перестановку можно рассматривать, как результат известного числа последовательных пере-

становок двух соседних слагаемых, а отсюда и вытекает справедливость нашего предложения.

Предоставляем читателю доказать, что сложение векторов обладает также свойством сочетательности (ассоциативности), т. е. что сложение можно производить, соединяя слагаемые в произвольные группы.

Упражнения

1. Построить сумму векторов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, имеющих одинаковые направления, и показать, что в этом случае длина векторной суммы равна сумме длин слагаемых. Показать, что во всех остальных случаях длина суммы меньше суммы длин слагаемых.

2. Построить сумму двух противоположно направленных векторов и показать, что длина ее равна абсолютному значению разности длин слагаемых, а направление совпадает с направлением большего (по длине) слагаемого.

3. Какою особенностью отличается многоугольник векторов, сумма которых равна нулю?

8. Частные случаи. Если число слагаемых равно двум, то, составляя сумму в последовательности

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$$

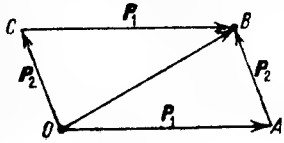
и в последовательности

$$\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1,$$

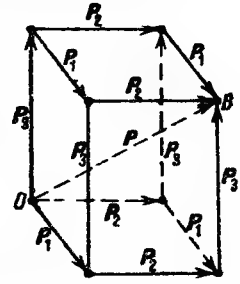
мы, как было сказано и как непосредственно видно на черт. 5, получим один и тот же вектор

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1.$$

Черт. 5 показывает, что сумма двух векторов есть диагональ параллелограма, построенного на векторах $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, расположенных так, чтобы их начала совпадали; при этом диагонали следует придать направление от общего начала к противоположной вершине. Это есть так называемое *правило параллелограма векторов.*



Черт. 5.



Черт. 6.

На основании сказанного в предыдущем параграфе ясно, что всякую сумму векторов можно составить следующим образом: сложить какие-либо два слагаемых по только что указанному правилу, затем к результату придать по тому же правилу следующее слагаемое и т. д. Поэтому правило сложения векторов, указанное в предыдущем параграфе, носит также название правила параллелограма векторов.

Рассмотрим теперь случай трех слагаемых $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$. Сложение возможно в шести[1]) последовательностях: $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2)$, $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3)$, $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_1)$, $(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, $(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1)$ (черт. 6).

[1]) Число перестановок трех элементов равно $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Каждая из этих последовательностей дает, как и следовало ожидать, одну и ту же сумму $\overrightarrow{OB}$.

Из чертежа ясно, что сумму трех векторов можно рассматривать как диагональ параллелепипеда, построенного на иекторах $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, расположенных так, чтобы они имели одно и то же начало; диагоиали надо придать направление, идущее от общего начала к противоположиой вершиие.

Читателю предлагается подтвердить на этом частном примере, что иашу сумму можно получить, сложив по правилу параллелограма, например, векторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ и придав к полученному вектору вектор $\mathbf{P}_3$ по тому же правилу.

Упражневия и дополиеиия

1. Даны два вектора $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ и угол ϑ, заключенный между ними[1]). Найти дливу $|\mathbf{R}|$ суммы этих векторов и углы α, β, которые она составляет с векторамв $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

Ответ. $|\mathbf{R}| = +\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + |\mathbf{Q}|^2 + 2|\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{Q}|\cos\vartheta}$;

углы α и β могут быть найдены из равенств:

$$\frac{\sin\alpha}{|\mathbf{Q}|} = \frac{\sin\beta}{|\mathbf{P}|} = \frac{\sin\vartheta}{|\mathbf{R}|}.$$

Если, например, $|\mathbf{Q}| \leqslant |\mathbf{P}|$, то угол α будет острым. Его можво вычислить по таблицам при помощи равенства:

$$\sin\alpha = \frac{|\mathbf{Q}|}{|\mathbf{R}|}\sin\vartheta;$$

тогда угол β найдется из соотношения:

$$\alpha + \beta = \vartheta.$$

2. Доказать на основании выражения для $|\mathbf{R}|$ из предыдущего упражнения, что с изменением угла ϑ при неизменных длинах векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ длииа суммы изменяется в пределах от $|\mathbf{P}| - |\mathbf{Q}|$ до $|\mathbf{P}| + |\mathbf{Q}|$ (мы предполагаем для определенности, что $|\mathbf{P}| \geqslant |\mathbf{Q}|$).

При каких значениях ϑ получаются наибольшая и наименьшая длины суммы? Вывести те же результаты непосредственным рассмотрением чертежа.

3. Три вектора $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ расположены на одной и той же плоскости; даны даины этих векторов: $|\mathbf{P}| = 2$, $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{R}| = 1$; кроме того, известно, что векторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ составляют с вектором $\mathbf{P}$ углы в 60°. Найтн угол α между $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ и длину суммы $\mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R}$.

Ответ. $\alpha = 0$ или 120°; в соответствии с этим $|\mathbf{S}| = 2\sqrt{3}$, или $|\mathbf{S}| = 3$.

4. Вопрос о *разложении* давного вектора на данное число слагаемых (т. е. о представлевии данного вектора как суммы данного числа слагаемых) является неопределенным, т. е. допускает бесчисленное множество решений.

Ограничиваясь рассмотрением векторов, расположевных на одной и той же плоскости, доказать (при помощи простого построевия), что вопрос о разложении даниого вектора $\mathbf{R}$ на два слагаемых $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ становится определенным, если дополнительно даны, например, либо:

---

[1]) Углом между двумя векторами называется угол между их положительными направлениями, заключенный в пределах от 0 до 180°; если начала векторов не совпадают, то для измерения угла между ними следует, не изменяя направлений, перенести их так, чтобы начала совпадали.

а) направления (различные), которым должны быть параллельны P и Q (одно решение); либо

б) направление и длина одного из векторов P, Q (одно решение); либо

в) направление, которому параллелен один из векторов P, Q, и длина другого (два, одно или ни одного решения); либо

г) длины векторов P и Q (два, одно или ни одного решения).

Показать, что каждый из указанных случаев сводится к одному из осиовных случаев решения треугольников.

5. Три вектора P, Q, R попарно взаимно перпендикулярны, а длины их соответственно равны 1, 2, 3. Найти длину суммы S этих векторов и углы α, β, γ, которые она составляет с данными векторами.

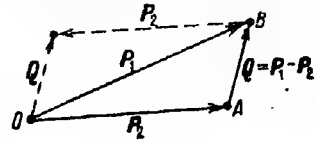
Ответ. $|S| = \sqrt{14}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

9. Разность векторов. Разностью двух векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ называется такой вектор Q, который при сложении с вектором $\mathbf{P}_2$ дает вектор $\mathbf{P}_1$; т. е. Q есть вектор, удовлетворяющий условию:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 + \mathbf{Q};$$

это обстоятельство записывают так:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2.$$



Черт. 7.

На основании определения ясно, что для построения разности векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ достаточно отложить эти векторы от какой-либо точки, а затем провести вектор $\overrightarrow{AB}$ *от конца вычитаемого к концу уменьшаемого*; этот вектор и будет искомой разностью (черт. 7).

Ясно также, что разность $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ можно получить, сложив векторы $\mathbf{P}_1$ и $(-\mathbf{P}_2)$, т. е. что

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + (-\mathbf{P}_2).$$

Напомним, что $(-\mathbf{P}_2)$ обозначает вектор, противоположный вектору $\mathbf{P}_2$ (черт. 7, пунктир).

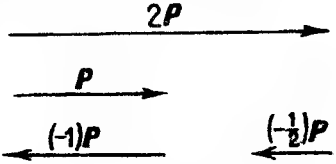
Упражиение

Найти длину разности R векторов P и Q, если $|P| = 3$, $|Q| = 5$ и угол между положительными иаправлениями P и Q равен 120°.

Ответ. $|R| = 7$.

10. Произведение вектора и числа. Пусть P — некоторый вектор, а m — некоторое положительное или отрицательное число (скаляр).

Произведением $m \cdot \mathbf{P}$ вектора P и числа m называется вектор, имеющий длину $|m| \cdot |P|$ и направленный одинаково с P, если $m > 0$, противоположно P, если $m < 0$.



Черт. 8.

Итак, умножить вектор на 2 — значит удвоить его длину, не изменяя направления; умножить вектор на (— 3) — значит утроить его длину, изменив направление на обратное. На черт. 8 изображены случаи $m = +2$, $m = -1$, $m = -\frac{1}{2}$.

Ясно, что, если m — целое положительное число, то

$$m\mathbf{P} = \mathbf{P} + \mathbf{P} + \ldots + \mathbf{P}$$

(m слагаемых).

Призведение вектора $\mathbf{P}$ н числа $\frac{1}{m}$ обозначается также через $\frac{\mathbf{P}}{m}$, так что, по определению,

$$\frac{\mathbf{P}}{m} = \frac{1}{m}\mathbf{P}. \tag{1}$$

Легко проверить, что

$$(-1)\cdot\mathbf{P} = -\mathbf{P}.$$

Легко, далее, видеть, что определенное нами умножение сочетательно по отношению к численному множителю, т. е. что

$$m\cdot(n\mathbf{P}) = mn\cdot\mathbf{P}, \tag{2}$$

где m и n — произвольные числа[1]); например,

$$3\cdot(-2\mathbf{P}) = -6\,\mathbf{P}$$

(составьте чертеж!).

Докажем, наконец, что рассматриваемое умножение обладает свойством распределительности, как по отношению к векторному, так и по отношению к численному множителю, т. е. что

$$m\cdot(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n) = m\mathbf{P}_1 + m\mathbf{P}_2 + \ldots + m\mathbf{P}_n \tag{3}$$

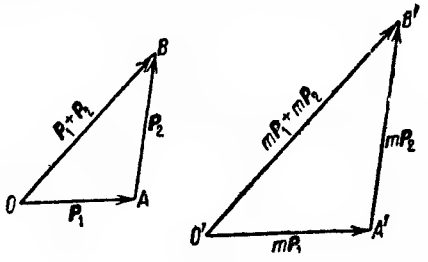
и

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\cdot\mathbf{P} = m_1\mathbf{P} + m_2\mathbf{P} + \ldots + m_n\mathbf{P}; \tag{4}$$

здесь m_1, m_2, ..., m_n — произвольные числа, а $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ — произвольные векторы.

Докажем сперва свойство (3). На основании сказанного в замечании 1 § 6 достаточно доказать это свойство для случая $n = 2$, т. е. доказать, что

$$m(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = m\mathbf{P}_1 + m\mathbf{P}_2. \tag{3а}$$



Черт. 9.

Построим многоугольник OAB векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ и проведем замыкающую $\overrightarrow{OB}$ (черт. 9, слева). Построим, далее, многоугольник $O'A'B'$ векторов $m\mathbf{P}_1$, $m\mathbf{P}_2$ и проведем замыкающую $\overrightarrow{O'B'}$ (черт. 9, справа). Так как стороны $O'A'$, $A'B'$ треугольника $O'A'B'$ параллельны и пропорциональны сторонам OA, AB треугольника OAB, то эти треугольники подобны. Поэтому сторона $O'B'$ также параллельна стороне OB и отношение их длин также равно $|m|$. Ясно, далее, что $\overrightarrow{O'B'}$ и $\overrightarrow{OB}$ одинаково направлены, если $m > 0$, и противоположно, если $m < 0$. Отсюда

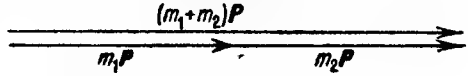
[1]) Произведение $m\mathbf{P}$ мы будем обозначать также через $\mathbf{P}\cdot m$, так что, по самому определению, рассматриваемое умножение обладает свойством переместительности (коммутативности).

следует, что $\overrightarrow{O'B'} = m \cdot \overrightarrow{OB}$. Но $\overrightarrow{OB} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ и $\overrightarrow{O'B'} = m\mathbf{P}_1 + m\mathbf{P}_2$, а отсюда вытекает требуемая формула (3а).

При доказательстве свойства (4) можно также ограничиться, на основании того же замечания 1 § 6, случаем $n = 2$, т. е. доказательством формулы:

$$(m_1 + m_2)\mathbf{P} = m_1\mathbf{P} + m_2\mathbf{P}. \qquad (4а)$$

Это равенство совершенно очевидно, когда m_1 и m_2 одинакового знака (черт. 10). Читатель легко проверит справедливость его и для случая, когда m_1 и m_2 имеют противоположные знаки (черт. 11). Таким образом предложение можно считать доказанным.



Черт. 10.

Черт. 11.

Упражнения и дополнения

1. Даны два вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ с общим началом O. Построить (по правилу параллелограма) вектор $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ с тем же началом O и проверить непосредственно, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Показать, что точка C делит пополам отрезок AB.

2. *Центр тяжести.* Пусть дано несколько материальных точек (т. е. точек, которым приписываются определенные массы). Обозначим эти точки через $M_1, M_2, \ldots, M_n$, а их массы соответственно через $m_1, m_2, \ldots, m_n$[1]). Возьмем произвольную (геометрическую) точку O и построим вектор $\overrightarrow{OC}$ с началом в точке O, определяемый равенством:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Требуется доказать, что положение точки C не зависит от выбора точки O; эта точка C, зависящая, таким образом, только от положения данных материальных точек и их масс, называется *центром тяжести*, или *центром инерции*, данной системы материальных точек.

Доказательство. Возьмем какую-либо другую точку O' и построим вектор

$$\overrightarrow{O'C'} = \frac{m_1\overrightarrow{O'M_1} + m_2\overrightarrow{O'M_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{O'M_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Наше предложение будет доказано, если окажется, что C' совпадает с C. Но ведь $\overrightarrow{O'M_1} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_1}, \ldots, \overrightarrow{O'M_n} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_n}$; подставляя эти выражения в правую часть предыдущего равенства, получим

$$\overrightarrow{O'C'} = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overrightarrow{O'O} + m_1\overrightarrow{OM_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} =$$
$$= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C}.$$

Итак, $\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'C}$, откуда следует, что C' совпадает с C.

[1]) Терминами „материальная точка", „масса" мы пользуемся исключительно ради наглядности. В сущности речь идет о точках, каждой из которых приводится в соответствие некоторое число, которое (условно) называется „массой". Эти „массы" могут быть и отрицательными; в этом случае мы будем предполагать дополнительно, что сумма масс $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ отлична от нуля.

3. Доказать, что центр тяжести C системы, состоящей из двух материальных точек M_1, M_2 (см. предыдущее упражнение), обладающих положительными массами m_1 и m_2, находится на отрезке M_1M_2 и делит его на части, обратно пропорциональные массам m_1, m_2 (в частности, центр тяжести двух точек, обладающих одинаковыми массами, находится посредине между ними).

Указание. Взять на отрезке M_1M_2 точку O, определяемую пропорцией $\frac{|M_1O|}{|OM_2|} = \frac{m_2}{m_1}$, и доказать, пользуясь формулой (см. предыдущее упражнение)

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2},$$

что $\overrightarrow{OC} = 0$, т. е. что точка C совпадает с O.

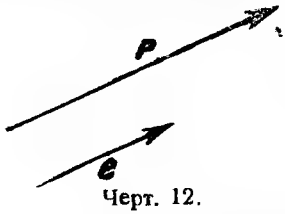
4. Обобщить результат предыдущего упражнения на случай, когда рассматриваются и отрицательные массы.

Ответ. Центр тяжести двух масс во всех случаях находится на прямой M_1M_2 и определяется пропорцией

$$\frac{|M_1C|}{|CM_2|} = \frac{|m_2|}{|m_1|},$$

при этом C берется между M_1 и M_2, если массы одинакового знака, и вне отрезка M_1M_2 (со стороны большей по абсолютной величине массы), — если массы разного знака.

11. Векторы, параллельные данному направлению. Орты. Вектором можно воспользоваться для задания направления в пространстве. Так как длина вектора для этой цели безразлична, то ради удобства в этом случае можно пользоваться вектором, длина которого равна единице. Такой вектор называют *ортом* [1]), или *единичным вектором*. В частности, ортом данной оси называется вектор длины единица, указывающий ее направление.



Черт. 12.

Рассмотрим вектор $\mathbf{P}$, параллельный данному орту $\mathbf{e}$ (черт. 12). Легко видеть, что этот вектор можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}P, \qquad (1)$$

где P (не жирным шрифтом!) обозначает некоторое число (скаляр). Именно, $P = \pm |\mathbf{P}|$, где $(+)$ берется, если $\mathbf{P}$ и $\mathbf{e}$ направлены одинаково, а $(-)$ — в противном случае. Это непосредственно вытекает из понятия произведения вектора и числа. (Например, если длина вектора $\mathbf{P}$ равна 5 и он одинаково направлен с $\mathbf{e}$, то $\mathbf{P} = 5\mathbf{e}$; если же, например, длина $\mathbf{P}$ равна $\frac{1}{2}$ и он направлен противоположно $\mathbf{e}$, то $\mathbf{P} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}$).

Число P называется *алгебраическим значением вектора* $\mathbf{P}$ по направлению $\mathbf{e}$.

Итак, необходимо различать длину вектора, обозначаемую через $|\mathbf{P}|$, и алгебраическое значение его P; последнее понятие имеет смысл только тогда, когда дается определенное направление $\mathbf{e}$ (параллельное $\mathbf{P}$), по которому берется алгебраическое значение вектора $\mathbf{P}$.

[1]) Сокращение слова orientation.

Рассмотрим теперь несколько векторов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, параллельных одному и тому же направлению $\mathbf{e}$. Очевидно, что их сумма

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n \qquad (2)$$

параллельна тому же направлению $\mathbf{e}$. По принятым нами обозначениям имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}P, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{e}P_1, \ \ldots, \ \mathbf{P}_n = \mathbf{e}P_n,$$

и равенство (2) дает, на основании сказанного в предыдущем параграфе:

$$\mathbf{e}P = \mathbf{e}P_1 + \mathbf{e}P_2 + \ldots + \mathbf{e}P_n = \mathbf{e}(P_1 + P_2 + \ldots + P_n),$$

откуда, очевидно, следует, что

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n,$$

т. е. что *алгебраическое значение суммы векторов, параллельных одному и тому же орту, равно сумме алгебраических значений слагаемых.*

12. Векторы на оси. Частным случаем векторов, параллельных одному и тому же направлению, являются векторы, расположенные на данной оси Δ. Пусть $\mathbf{e}$ есть орт данной оси Δ и $\mathbf{P}$ — некоторый вектор, расположенный на ней.

Черт. 13.

Имеем, как выше,

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}P,$$

где P есть алгебраическое значение вектора по направлению $\mathbf{e}$; в рассматриваемом случае величину P мы будем также называть алгебраическим значением вектора $\mathbf{P}$ по оси Δ[1]).

Рассмотрим теперь несколько векторов: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \ldots, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{LM}$, расположенных на оси Δ так, что начало каждого следующего совпадает с концом предыдущего (черт. 13). Тогда вектор $\overrightarrow{AM}$ будет суммой данных векторов:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \ldots + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM}. \qquad (1)$$

Пусть AB (без стрелки) обозначает алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{AB}$ по оси Δ (и аналогично для других векторов). Тогда, на основании сказанного в конце предыдущего параграфа, будем иметь

$$AM = AB + BC + \ldots + KL + LM. \qquad (2)$$

Эта простая формула тривиальна в том случае, когда все векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ и т. д. направлены в одну и ту же сторону. В общем же случае (черт. 13) формула эта, известная под названием теоремы Шаля (Chasles), не столь очевидна и является весьма полезной для выводов общего характера.

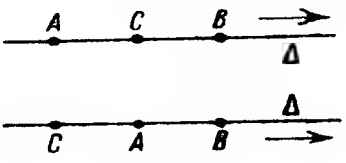
[1]) Итак, алгебраическое значение вектора $\mathbf{P}$ по оси Δ равно $\pm |\mathbf{P}|$, где знак $(+)$ берется в том случае, если вектор и ось направлены в одну и ту же сторону, а в противном случае берется знак $(-)$.

Упражнения

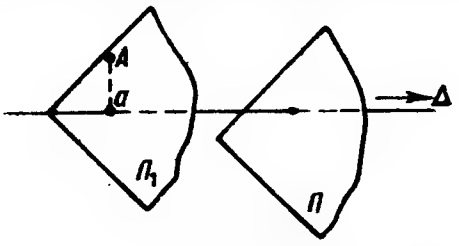
1. Обратить внимание на равенство $AB + BA = 0$.
2. Проверить равенство $AB + BC = AC$ для случаев, представленных на черт. 14.

III. ПРОЕКЦИИ НА ОСЬ И НА ПЛОСКОСТЬ

13. Проекция на ось. Пусть Δ — некоторая ось [1]), а Π — некоторая плоскость, непараллельная этой оси (черт. 15). Пусть, далее, A есть некоторая точка пространства. Проведем через A плоскость Π_1, параллельную плоскости Π, и пусть a есть точка пересечения проведенной только что плоскости с осью Δ.



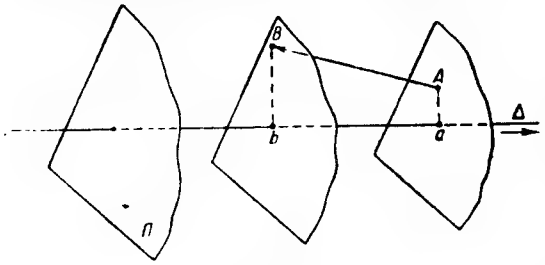
Черт. 14.



Черт. 15.

Точка a есть *проекция* точки A на ось Δ, *взятая параллельно плоскости* Π.

Ось Δ называется *осью проекций*. Если плоскость Π перпендикуляриа к оси Δ, то проекция называется *прямоугольной* (или *ортогональной*). В этом случае проекция точки A есть, попросту, основание перпендикуляра, опущенного из A на ось Δ.



Черт. 16.

Непрямоугольные проекции в отличие от прямоугольных называются косоугольными; те и другие вместе называются *параллельными проекциями* [2]).

Пусть $\overrightarrow{AB}$ — некоторый вектор и пусть a и b обозначают проекции начала и конца этого вектора на ось Δ, взятые параллельно одной и той же плоскости Π (черт. 16). Вектор $\overrightarrow{ab}$ называется проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Δ, взятой параллельно плоскости Π [3]). Для обозначения факта, что вектор $\overrightarrow{ab}$ есть проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Δ, взятая параллельно плоскости Π, мы будем писать

$$\overrightarrow{ab} = \text{пр}_{\Delta}\overrightarrow{AB} \text{ (взятой параллельно } \Pi).$$

---

[1]) В дальнейшем, пока речь не идет об алгебраическом значении проекции вектора (см. ниже), можно под Δ подразумевать не ось, а прямую.

[2]) В отличие от других видов проекций, например центральной.

[3]) Иногда под проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ понимают не вектор $\overrightarrow{ab}$, а алгебраическое значение ab этого вектора по оси Δ.

В дальнейшем нам придется иметь дело, главным образом, не с самой проекцией $\overrightarrow{ab}$, а с ее алгебраическим значением ab по оси Δ. Это алгебраическое значение проекции мы будем обозначать аналогичным образом, но только без стрелки над буквами „пр", т. е. будем писать

$$ab = \text{пр}_\Delta \overrightarrow{AB} \text{ (взятой параллельно } \Pi).$$

Если дополнительное указание отсутствует, то проекция обычно предполагается прямоугольной.

Легко видеть, что проекции равных векторов (взятые параллельно одной и той же плоскости) на одну и ту же ось равны между собою, т. е. что если

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q},$$

то

$$\overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P} = \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{Q}, \quad \text{пр}_\Delta \mathbf{P} = \text{пр}_\Delta \mathbf{Q}$$

(проекции берутся параллельно одной и той же плоскости).

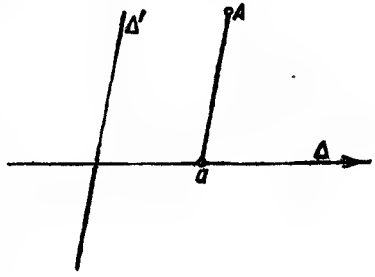
Точно так же, если две оси Δ и Δ' одинаково направлены, то проекции (параллельные одной и той же плоскости) любого вектора на эти оси равны между собою.

Далее, проекции двух взаимно противоположных векторов на одну и ту же ось также взаимно противоположны, а их алгебраические значения равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, т. е. $\text{пр}_\Delta(-\mathbf{P}) = -\text{пр}_\Delta \mathbf{P}$ (проекции берутся параллельно одной и той же плоскости).

Замечания. 1. Если вектор $\mathbf{P}$ параллелен плоскости Π, то проекции точек A и B совпадают, а потому проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ (взятая параллельно Π) равна нулю.

2. Если вектор $\mathbf{P}$ параллелен осн проекций Δ, то, очевидно, проекция вектора $\mathbf{P}$ на ось Δ равна вектору $\mathbf{P}$, а ее алгебраическое значение равно алгебраическому значению $\mathbf{P}$ по оси Δ.

13а. Проекции фигур, расположенных в одной и той же плоскости. Если все точки и векторы какой-либо фигуры находятся в одной и той же плоскости с осью проекций, то предыдущее определение проекции можно заменить следующим (черт. 17, где за плоскость чертежа принята только что упомянутая плоскость). Пусть Δ' — некоторая прямая на рассматриваемой плоскости, не параллельная оси проекций Δ. Проведем из какой-либо точки A (взятой на рассматриваемой плоскости) прямую, параллельную Δ', и пусть a есть точка пересечения проведенной прямой с осью Δ. Точка a называется проекцией точки A на ось Δ, взятой параллельно прямой Δ'.



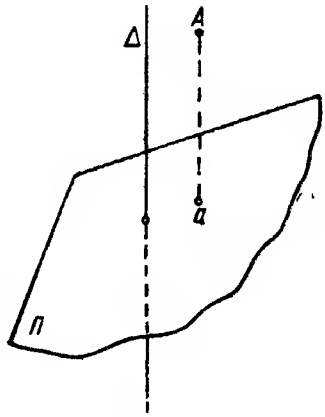
Черт. 17.

Если прямая Δ' перпендикулярна к оси Δ, то проекция называется прямоугольной, или ортогональной.

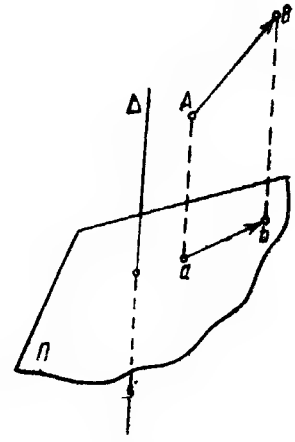
Остальные определения — те же, что и в предыдущем параграфе; надо только всюду вместо „параллельно плоскости П“ говорить „параллельно прямой Δ'“.

14. Проекция на плоскость. Пусть П — некоторая плоскость, а Δ — произвольная прямая, не параллельная плоскости П (черт. 18). Проведем из A прямую Aa, параллельную Δ, которая пересечет плоскость П в некоторой точке a. Эта точка называется проекцией точки A на плоскость П, взятой параллельно прямой Δ.

Если Δ перпендикулярна к П, то проекция называется прямоугольной, или ортогональной. В этом случае a есть основание перпендикуляра, опущенного из A на П. Непрямоугольные проекции называются косоугольными, а те и другие вместе — параллельными, или цилиндрическими.



Черт. 18.



Черт. 19.

Пусть теперь $\overrightarrow{AB}$ есть некоторый вектор и пусть a и b обозначают проекции соответственно начала и конца его на плоскость П, взятые параллельно прямой Δ (черт. 19). Тогда вектор $\overrightarrow{ab}$ называется проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$, взятой параллельно прямой Δ:

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{\text{пр}}_{\text{П}}\,\overrightarrow{AB} \text{ (взятая параллельно } \Delta).$$

Вообще проекцией какой-либо геометрической фигуры на плоскость П называется геометрическое место проекций точек этой фигуры. В частности, проекция треугольника есть также треугольник, вершины которого суть соответственно проекции вершин данного треугольника [1]).

Относительно проекций векторов на плоскость имеют место те же простые предложения, как и для проекций на ось: проекции двух рав-

[1]) Все чертежи этой книги, изображающие пространственные фигуры, представляют собой не что иное, как параллельные проекции этих фигур на плоскость чертежа.

ных векторов равны; проекции вектора на две параллельные плоскости равны между собой.

15. Проекции суммы и разности векторов на ось. Докажем теперь следующее важное предложение:

Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось:

$$\overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P} = \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}_1 + \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}_2 + \ldots + \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}_{n-1} + \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}_n, \qquad (1)$$

где $\mathbf{P}$ обозначает сумму

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_n;$$

предполагается, конечно, что проекции берутся параллельно одной и той же плоскости.

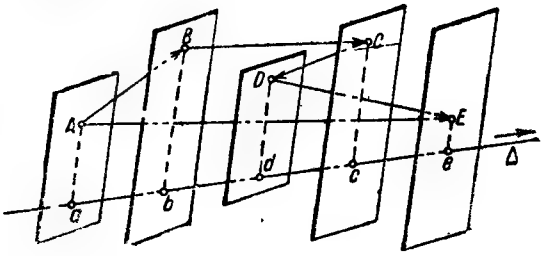
Действительно, расположим данные векторы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n$ так, как это делается для составления многоугольника векторов.

Ограничиваясь для наглядности чертежа случаем четырех слагаемых ($n = 4$), положим (черт. 20)

$$\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{P}_2 = \overrightarrow{BC},$$
$$\mathbf{P}_3 = \overrightarrow{CD}, \quad \mathbf{P}_4 = \overrightarrow{DE}.$$

Сумма этих векторов равна

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{AE}.$$



Черт. 20.

Пусть a, b, c, d, e соответственно обозначают проекции[1]) точек A, B, C, D, E. По самому определению суммы векторов имеем:

$$\overrightarrow{ae} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de}.$$

Но ведь

$$\overrightarrow{ae} = \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}, \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}_1, \quad \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}_2, \quad \overrightarrow{cd} = \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}_3, \quad \overrightarrow{de} = \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}_4.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим равенство (1), а это и требовалось доказать.

Повторяем, что мы ограничились случаем четырех слагаемых исключительно для наглядности чертежа; в общем случае доказательство — то же.

Из доказательства непосредственно следует, что *алгебраическое значение проекции суммы векторов равно сумме алгебраических значений проекций слагаемых*, т. е.

$$\text{пр}_\Delta\,\mathbf{P} = \text{пр}_\Delta\,\mathbf{P}_1 + \text{пр}_\Delta\,\mathbf{P}_2 + \ldots + \text{пр}_\Delta\,\mathbf{P}_{n-1} + \text{пр}_\Delta\,\mathbf{P}_n. \qquad (1a)$$

---

[1]) В дальнейшем, где не может возникнуть никаких недоразумений, мы опускаем указание на то, что проекции берутся параллельно одной и той же плоскости.

Точно так же легко показать, что *проекция разности двух векторов равна разности проекций этих векторов*, т. е.

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{\Delta}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \overrightarrow{\text{пр}}_{\Delta}\mathbf{P}_1 - \overrightarrow{\text{пр}}_{\Delta}\mathbf{P}_2. \qquad (2)$$

Действительно, на основании сказанного в § 9, имеем

$$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + (-\mathbf{P}_2),$$

откуда, на основании предыдущего

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{\Delta}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \overrightarrow{\text{пр}}_{\Delta}\mathbf{P}_1 + \overrightarrow{\text{пр}}_{\Delta}(-\mathbf{P}_2) = \overrightarrow{\text{пр}}_{\Delta}\mathbf{P}_1 - \overrightarrow{\text{пр}}_{\Delta}\mathbf{P}_2.$$

Для алгебраических значений проекций имеем аналогичную формулу

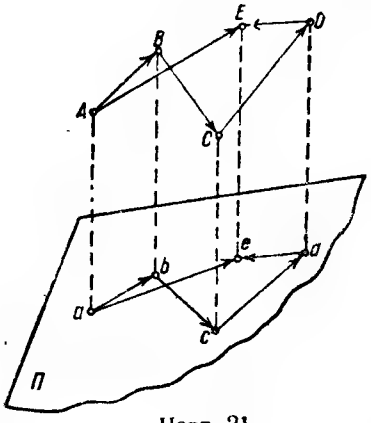
$$\text{пр}_{\Delta}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \text{пр}_{\Delta}\mathbf{P}_1 - \text{пр}_{\Delta}\mathbf{P}_2.$$

16. Проекции суммы и разности векторов на плоскость. Легко показать также, что проекция суммы данных векторов на данную плоскость П равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же плоскость, т. е. если

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n,$$

то

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{\Pi}\mathbf{P} = \overrightarrow{\text{пр}}_{\Pi}\mathbf{P}_1 + \overrightarrow{\text{пр}}_{\Pi}\mathbf{P}_2 + \ldots + \overrightarrow{\text{пр}}_{\Pi}\mathbf{P}_n \qquad (1)$$



Черт. 21.

(предполагается, конечно, что проекции берутся параллельно одной и той же прямой Δ). Эта теорема доказывается так же, как и теорема предыдущего параграфа (черт. 21).

Точно так же проекция разности двух векторов равна разности их проекций, т. е. если

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2,$$

то

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{\Pi}\mathbf{Q} = \overrightarrow{\text{пр}}_{\Pi}\mathbf{P}_1 - \overrightarrow{\text{пр}}_{\Pi}\mathbf{P}_2. \qquad (2)$$

17. Проекция произведения вектора и числа. Легко показать, что если данный вектор $\mathbf{P}$ умножить на число m, то на это же число умножается проекция вектора (на данную ось или на данную плоскость). Формулой это выразится так:

$$\overrightarrow{\text{пр}}(m\mathbf{P}) = m\overrightarrow{\text{пр}}\mathbf{P},$$

где подразумевается проекция на данную ось (или на данную плоскость), взятая параллельно данной плоскости (или прямой).

То же имеет место для алгебраического значения проекции вектора на данную ось, т. е.

$$\text{пр}(m\mathbf{P}) = m\,\text{пр}\,\mathbf{P}.$$

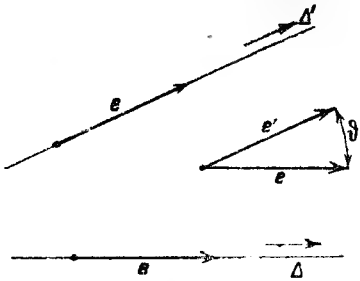
Предлагается читателю доказать это почти очевидное предложение, взяв начало данного вектора на оси (или плоскости) проекций и применив простейшие предложения о подобных треугольниках.

IV. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

В этом отделе рассматриваются исключительно прямоугольные (ортогональные) проекции, а потому мы не станем упоминать об этом в каждом отдельном случае.

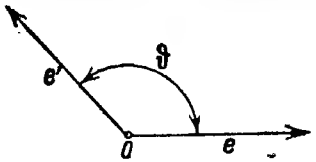
18. Угол между двумя направлениями. Углом между двумя направлениями (например, между направлениями двух осей, векторов, вектора и оси) называется угол между ортами этих направлений, проведенными из одной и той же произвольной точки.

[Например, угол ϑ между осями Δ и Δ' (черт. 22) есть угол между ортами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ этих осей, проведенными из одной и той же произвольной точки.]

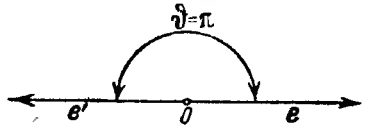


Черт. 22.

Угол этот всегда берется между положительными направлениями ортов (черт. 23a) и может принимать все значения от 0 до π (т. е. от 0 до 180°). Если $\vartheta = 0$, то направления $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ совпадают; если $\vartheta = \pi$, то направления эти противоположны (черт. 23b).



Черт. 23a.

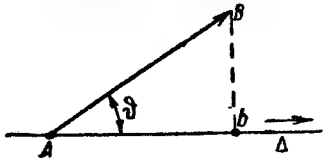


Черт. 23b.

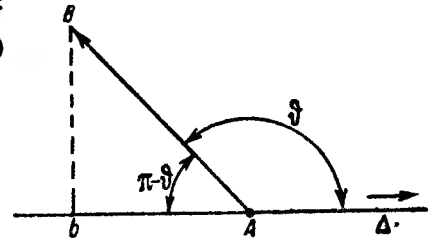
19. Формула для вычисления прямоугольной проекции вектора на ось. Пусть дана ось Δ и вектор $\overrightarrow{AB}$, составляющий угол ϑ с осью Δ.

Для вычисления алгебраического значения прямоугольной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Δ существует формула:

$$\text{пр}_{\Delta}\overrightarrow{AB} = |AB|\cos\vartheta, \qquad (1)$$



Черт. 24a.



Черт. 24b.

которая справедлива по величине и по знаку; словами: *алгебраическое значение проекции вектора на ось равно длине вектора, умноженной на косинус угла между данной осью и данным вектором.*

Для вывода этой формулы перенесем данный вектор так, чтобы его начало A совпало с одной из точек оси Δ.

Предположим сперва, что угол ϑ острый. Тогда (черт. 24a) алгебраи-

ческое значение проекции Ab вектора $\overrightarrow{AB}$ — величина положительная, и рассмотрение треугольника AbB дает сразу

$$\text{пр}_\Delta \overrightarrow{AB} = Ab = |AB| \cos \vartheta.$$

Если же ϑ — угол тупой, то (черт. 24b) треугольник AbB дает

$$|AB| = |AB| \cos (180° - \vartheta) = -|AB| \cos \vartheta;$$

но, так как в этом случае $Ab < 0$, будем иметь, как и раньше,

$$\text{пр}_\Delta \overrightarrow{AB} = Ab = -|AB| = +|AB| \cos \vartheta,$$

и формула (1) доказана вполне.

Частные случаи. 1. Если $\vartheta = 0$, то $\cos \vartheta = 1$,

$$\text{пр}_\Delta \overrightarrow{AB} = |AB|.$$

2. Если $\vartheta = 180°$, то $\cos \vartheta = -1$ и

$$\text{пр}_\Delta \overrightarrow{AB} = -|AB|.$$

3. Если $\vartheta = 90°$, т. е. если вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен к оси проекций, то $\cos \vartheta = 0$ и

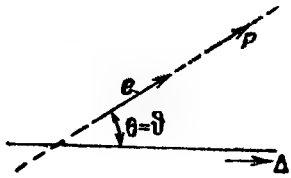
$$\text{пр}_\Delta \overrightarrow{AB} = 0;$$

все это вытекает также из самого определения проекции.

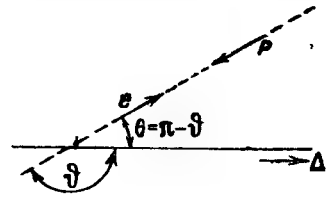
19a. Обобщение. Пусть вектор $\mathbf{P}$ параллелен орту $\mathbf{e}$, так что (§ 11)

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}P; \tag{1}$$

обозначим через θ угол между ортом $\mathbf{e}$ и осью Δ (черт. 25a, 25b). Этот угол или равен углу ϑ между $\mathbf{P}$ и Δ (черт. 25a), или же равен $\pi - \vartheta$



Черт. 25a.



Черт. 25b.

(черт. 25b). Первый случай имеет место, когда $\mathbf{P}$ и $\mathbf{e}$ имеют одинаковые направления, т. е. когда $P > 0$; второй случай имеет место, когда $P < 0$. Поэтому на основании предыдущего параграфа имеем в первом случае

$$\text{пр}_\Delta \mathbf{P} = |P| \cos \vartheta = P \cos \vartheta = P \cos \theta;$$

во втором случае (когда $P < 0$ и, следовательно, $|\mathbf{P}| = -P$)

$$\text{пр}_\Delta \mathbf{P} = |\mathbf{P}| \cos \vartheta = -P \cos \vartheta = -P \cos (\pi - \theta) = P \cos \theta.$$

Итак, во всех случаях имеем одну и ту же формулу

$$\text{пр}_\Delta \mathbf{P} = P \cos \theta, \tag{2}$$

где P обозначает алгебраическое значение вектора **P** по направлению **e**, а θ — угол между направлением **e** и осью проекций.

Эта формула является обобщением формулы предыдущего параграфа и совпадает с ней, если вектор **P** и орт **e** имеют одинаковые направления (а не противоположные).

Упражнения и приложения

1. Вектор **P** длины 10 составляет угол в 150° с осью Δ. Вычислить алгебраическое значение проекции **P** на Δ.

Ответ. $-5\sqrt{3}$.

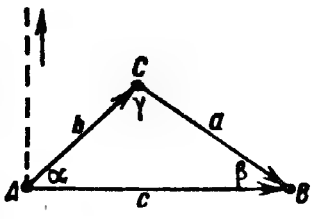
2. Как выразится, при условиях предыдущего упражнения, проекция вектора **P** на ось Δ, если орт последней есть **e**?

Ответ. $-5\sqrt{3}\,\mathbf{e}$.

3. Оси Δ и Δ′ составляют угол 60°. На оси Δ′ расположен вектор длиною 20 единиц, направленный противоположно Δ′. Вычислить алгебраическое значение проекции этого вектора на ось Δ.

Ответ. $-20\cdot\cos 60^\circ = -10$.

4. Рассмотрим треугольник ABC. Приписав его сторонам направления, как указано на черт. 26, будем иметь



Черт. 26.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Проектируя это векторное равенство сперва на направление $\overrightarrow{AB}$ и затем на направление Δ, перпендикулярное к $\overrightarrow{AB}$, доказать равенства (обозначения см. на чертеже):

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta, \qquad (*)$$
$$0 = b\sin\alpha - a\sin\beta. \qquad (**)$$

Второе равенство, к которому можно присоединить равенство $0 = c\sin\beta - b\sin\gamma$, выводимое аналогичным образом, выражает известную теорему синусов тригонометрии:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

5. Из равенств (*) и (**) предыдущего упражнения вывести теорему косинусов тригонометрии:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Решение. Возводя обе части (*) в квадрат, получим

$$c^2 = b^2\cos^2\alpha + a^2\cos^2\beta + 2ab\cos\alpha\cos\beta = b^2(1-\sin^2\alpha) + a^2(1-\sin^2\beta) + 2ab\cos\alpha\cos\beta = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\cos\beta - a^2\sin^2\beta - b^2\sin^2\alpha.$$

Но из (**) следует

$$b^2\sin^2\alpha = a^2\sin^2\beta = a\sin\beta\cdot a\sin\beta = a\sin\beta\cdot b\sin\alpha = ab\sin\alpha\sin\beta.$$

Внося эти значения в предыдущую формулу, получим:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha+\beta).$$

Но, так как $\alpha+\beta = \pi-\gamma$, имеем $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma$, откуда и следует искомая формула.

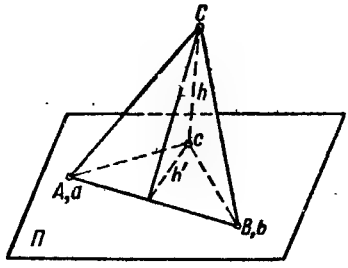
20. Длина прямоугольной проекции вектора на плоскость. Пусть Π — данная плоскость и $\overrightarrow{AB}$ — данный вектор. Обозначим через ϑ острый угол между плоскостью Π и направлением вектора $\overrightarrow{AB}$[1]). Пусть $\overrightarrow{ab}$ есть прямоугольная проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на плоскость Π. Тогда будем иметь

$$|\overrightarrow{ab}| = |\overrightarrow{AB}| \cos\vartheta, \qquad (1)$$

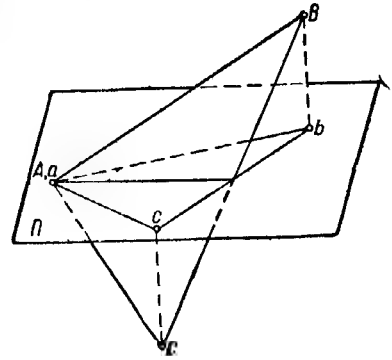
т. е. длина прямоугольной проекции равна длине проектируемого вектора, умноженной на косинус острого угла между данным вектором и плоскостью. Доказательство мы предоставляем читателю.

Указание. Перенести вектор $\overrightarrow{AB}$ так, чтобы его начало A совпало с одной из точек плоскости Π.

21. Площадь проекции плоской фигуры на плоскость. Рассмотрим сперва случай треугольника. Пусть ABC — некоторый треугольник; пусть



Черт. 27a.



Черт. 27b.

a, b, c обозначают проекции вершин A, B, C на плоскость Π. Обозначим через S площадь треугольника ABC, а через s — площадь его проекции abc. Площади эти связаны соотношением, совершенно аналогичным соотношению (1) предыдущего параграфа:

$$s = S\cos\vartheta, \qquad (1)$$

где ϑ обозначает острый угол между плоскостью проекций Π и плоскостью проектируемого треугольника. Вывести эту формулу очень легко.

Действительно, предположим сперва, что одна из сторон треугольника, например сторона AB, параллельна плоскости Π (черт. 27a). В этом случае мы можем всегда предположить, что сторона AB лежит на самой плоскости Π. (Для этого достаточно перенести треугольник ABC, не изменяя направления его плоскости, что не изменяет и его проекции.) Площадь S треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot h,$$

[1]) Угол ϑ есть, по определению, угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и его прямоугольной проекцией $\overrightarrow{ab}$.

где h обозначает высоту треугольника. С другой стороны, площадь проекции abc равна

$$s = \frac{1}{2}|ab| \cdot h',$$

где h' есть высота треугольника abc.

Но ведь $|AB| = |ab|$ и, кроме того,

$$h' = h\cos\vartheta,$$

так как h' есть проекция высоты h на плоскость Π [1]), а угол между h и h' есть как раз угол ϑ [2]). Следовательно,

$$s = \frac{1}{2}|ab| \cdot h' = \frac{1}{2}|AB|\, h\cos\vartheta = S\cos\vartheta,$$

что и требовалось доказать.

Если ни одна из сторон треугольника ABC не параллельна плоскости Π, то, как легко видеть, его можно разбить на два треугольника, каждый из которых имеет сторону, параллельную этой плоскости (черт. 27b), а так как формула (1) справедлива для каждой части, то она будет справедлива и для всего треугольника.

Если теперь вместо треугольника взять любой *плоский многоугольник*, то формула (1) останется справедливой, так как всякий многоугольник можно разбить на несколько треугольников.

Далее, площадь всякой плоской фигуры, ограниченной кривой линией, есть, по определению, предел площади вписанного в нее многоугольника. Так как формула (1) справедлива для всякого многоугольника, то она будет справедлива и в пределе.

Итак, если S обозначает площадь любой плоской фигуры, а s — площадь проекции этой фигуры на некоторую плоскость, то

$$s = S\cos\vartheta,$$

где ϑ обозначает острый угол между плоскостью проектируемой фигуры и плоскостью проекций.

Упражнения и приложения

1. Найти площадь косого сечения прямой призмы, если плоскость сечения составляет угол в 30° с основанием и если площадь основания равна 10 *см*².

Ответ. $S = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ *см*².

2. Пользуясь свойством площади проекции, найти величину угла α между гранями правильного тетраэдра.

Ответ. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

3. Если спроектировать окружность на плоскость Π, не параллельную плоскости окружности, то в проекции получается линия, называемая эллипсом [3])

---

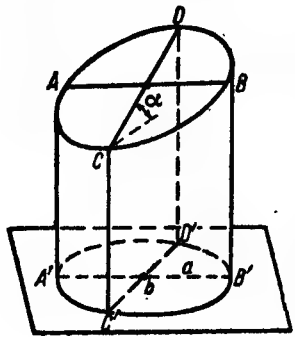
[1]) Вспомним теорему элементарной геометрии: если через точку пересечения прямой с плоскостью провести в этой плоскости прямую, перпендикулярную к этой прямой, то последняя прямая будет перпендикулярна к проекции этой прямой.

[2]) Следует припомнить определение угла между плоскостями, даваемое в элементарной геометрии.

[3]) Линия эта будет подробно изучена в главе VII.

(черт. 28). Диаметр AB окружности, параллельный плоскости П, дает в проекции отрезок $A'B'$, равный по величине $|AB| = 2a$, где a — радиус окружности. Диаметр CD перпендикулярный к AB, дает в проекции отрезок $C'D'$, перпендикулярный к $A'B'$ и равный по величине $2a\cos\alpha$, где α — угол между плоскостью окружности и плоскостью П.

Величины $a = \frac{1}{2}|A'B'|$ и $b = \frac{1}{2}|C'D'| = a\cos\alpha$ называются, соответственно большою и малою полуосями эллипса.



Черт. 28.

Доказать, что площадь s, ограниченная эллипсом, равна πab.

Доказательство. Имеем $s = \pi a^2\cos\alpha = \pi a \cdot a\cos\alpha = \pi ab$.

V. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ВЕКТОРОВ

До сих пор мы ознакомились, кроме операций сложения и вычитания векторов, с операцией умножения вектора на число. Нам предстоит теперь рассмотреть еще две операции, а именно скалярное и векторное умножения двух векторов.

22. Скалярное произведение двух векторов. *Скалярным произведением двух векторов* $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ *называется произведение их длин и косинуса угла, заключенного между ними.*

Скалярное произведение векторов мы будем обозначать символом[1])

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2, \quad \text{или} \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2.$$

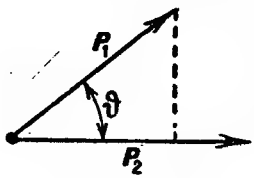
На основании определения имеем

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = |\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2| \cdot \cos\vartheta. \tag{1}$$

Заметив, что произведение

$$|\mathbf{P}_1|\cos\vartheta$$

представляет собою алгебраическое значение прямоугольной проекции вектора $\mathbf{P}_1$ на направление вектора $\mathbf{P}_2$ (черт. 29), можно сказать, что скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного из них на алгебраическое значение прямоугольной проекции другого на направление первого вектора, т. е., согласно нашим обозначениям:



Черт. 29.

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = |\mathbf{P}_1| \cdot \text{пр}_{\mathbf{P}_1}\mathbf{P}_2 = |\mathbf{P}_2| \cdot \text{пр}_{\mathbf{P}_2}\mathbf{P}_1. \tag{2}$$

Укажем простое механическое значение скалярного произведения. Если точка приложения постоянной по величине и направлению силы F перемещается прямолинейно из положения A в положение B, то, по определению, работа R, произведенная силою F, равна про-

[1]) Следует заметить, что обозначения еще не установились в литературе. Для скалярного произведения, кроме указанного в тексте, употребляются еще следующие обозначения: $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$, $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, $(\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2)$. Скалярное произведение называют также геометрическим, или внутренним, произведением.

изведению длины $|\overrightarrow{AB}|$ и алгебраического значения проекции силы F на направление перемещения, т. е.

$$R = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\mathrm{F}| \cos\vartheta,$$

где ϑ обозначает угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и F. Следовательно, на основании формулы (1):

$$R = \overrightarrow{AB} \cdot \mathrm{F}.$$

Итак, в нашем случае работа равна скалярному произведению вектора, изображающего перемещение, и вектора, изображающего силу.

Отметим важное свойство скалярного произведения: оно обращается в нуль, либо когда один из перемножаемых векторов равен нулю, либо *когда сомножители взаимно перпендикулярны*; действительно, в последнем случае $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\vartheta = 0$.

Так как направление вектора, равного нулю, неопределенно, его можно считать перпендикулярным любому другому направлению. Следовательно, можно сказать, что во всех случаях *условие*

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 0 \qquad (3)$$

есть *условие перпендикулярности векторов* $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$.

Если оба вектора равны между собою, т. е. $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}$, то угол ϑ между ними равен нулю; поэтому

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{P}| \cos 0 = |\mathbf{P}|^2.$$

Произведение $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ обозначается символом $\mathbf{P}^2$.

Таким образом квадрат длины данного вектора может быть рассматриваем как скалярное произведение этого вектора на самого себя:

$$|\mathbf{P}|^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2. \qquad (4)$$

Мы видели, что скалярное произведение может обращаться в нуль без того, чтобы один из сомножителей равнялся нулю, в отличие от произведения чисел. Укажем теперь основные свойства скалярного произведения векторов, аналогичные свойствам произведения чисел.

Прежде всего из самого определения вытекает, что скалярное произведение обладает свойством переместительности, т. е. $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1$.

Далее, скалярное умножение обладает свойством распределительности, т. е. справедлива формула

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P}_1\mathbf{Q} + \mathbf{P}_2\mathbf{Q} + \ldots + \mathbf{P}_n\mathbf{Q}. \qquad (5)$$

Для доказательства заметим, что на основании (2),

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n) \cdot \mathbf{Q} &= |\mathbf{Q}| \cdot \mathrm{пр}\,(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n) = \\ &= |\mathbf{Q}| \cdot (\mathrm{пр}\,\mathbf{P}_1 + \mathrm{пр}\,\mathbf{P}_2 + \ldots + \mathrm{пр}\,\mathbf{P}_n) = \\ &= |\mathbf{Q}| \cdot \mathrm{пр}\,\mathbf{P}_1 + |\mathbf{Q}| \cdot \mathrm{пр}\,\mathbf{P}_2 + \ldots + |\mathbf{Q}| \cdot \mathrm{пр}\,\mathbf{P}_n,\end{aligned}$$

где проекции берутся на направление Q; мы для краткости опустили значок, указывающий ось проекций. Но, на основании той же формулы (2),

$$|\mathbf{Q}| \cdot \mathrm{пр}\,\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_1, \qquad |\mathbf{Q}| \cdot \mathrm{пр}\,\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_2 \text{ и т. д.;}$$

подставляя эти значения в предыдущую формулу, мы получим желаемый результат (5).

Из доказанного следует, в частности, что *скалярное перемножение двух сумм векторов можно производить по обычному правилу перемножения многочленов* (см. § 6, замечание 2).

Наконец, отметим, что если m_1 и m_2 обозначают два числа, то

$$(m_1\mathbf{P}_1)\cdot(m_2\mathbf{P}_2) = (m_1m_2)(\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2); \qquad (6)$$

например,

$$3\mathbf{P}_1\cdot 4\mathbf{P}_2 = 12(\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2) = 12\cdot|\mathbf{P}_1|\cdot|\mathbf{P}_2|\cdot\cos\vartheta.$$

Предоставляется читателю доказать это простое свойство.

Упражнения и приложения

1. Зная, что работа R постоянной (по величине и направлению) силы $\mathbf{F}$ при прямолинейном перемещении точки приложения ее из положения A в положение B выражается формулой

$$R = \overrightarrow{AB}\cdot\mathbf{F},$$

доказать следующие простейшие свойства работы:

a) Работа равна нулю, когда направление силы перпендикулярно к направлению перемещения.

b) Работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к одной и той же точке, равна сумме работ составляющих (равнодействующая нескольких сил, приложенных к одной точке, равна векторной сумме этих сил, называемых составляющими, и приложена к той же точке).

c) Сумма работ силы $\mathbf{F}$ при перемещении точки приложения по сторонам AB, BC, CD, ..., KL многоугольника $ABC\ldots KL$ (причем вершины проходят в указанном порядке) равна работе той же силы при прямолинейном перемещении точки приложения по замыкающей AL.

2. Доказать равенство, справедливое для любых двух векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$:

$$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})^2 = (\mathbf{P}+\mathbf{Q})\cdot(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = \mathbf{P}^2+\mathbf{Q}^2+2\mathbf{P}\mathbf{Q} = |\mathbf{P}|^2+|\mathbf{Q}|^2+2|\mathbf{P}|\cdot|\mathbf{Q}|\cos\vartheta,$$

где ϑ — угол между векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

3. Рассмотреть четыре вектора $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, составляющие стороны ромба $ABDC$, так что $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Выразив диагонали $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ ромба, как векторные сумму и разность сторон, доказать, что $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, т. е. что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

4. Приписывая сторонам треугольника ABC определенные направления, как в упражнении 4 § 19а, и возводя в квадрат обе части равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, доказать „теорему косинусов" тригонометрии:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(обозначения см. на черт. 26).

23. Выражение прямоугольной проекции вектора через скалярное произведение. Если $\mathbf{e}$ обозначает орт оси Δ, то алгебраическое значение прямоугольной проекции любого вектора $\mathbf{P}$ на ось Δ может быть рассматриваемо как скалярное произведение вектора $\mathbf{P}$ и орта $\mathbf{e}$, т. е.

$$\text{пр}_\Delta\mathbf{P} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{P}. \qquad (1)$$

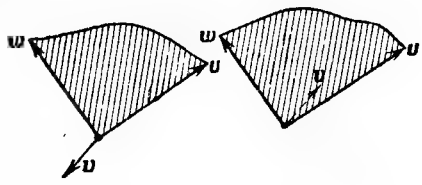
Действительно,

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{P} = |\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{P}|\cdot\cos\vartheta = |\mathbf{P}|\cos\vartheta,$$

так как $|\mathbf{e}| = 1$ (ϑ обозначает угол между $\mathbf{P}$ и Δ, или, что все равно, между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{e}$). Последняя формула доказывает наше утверждение.

24. Правая и левая система трех направлений. Введем теперь одно понятие, которое нам понадобится в следующем параграфе, а также и впоследствии. Рассмотрим три орта $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, не параллельные одной и той же плоскости, и вообразим, что их начала совмещены.

Представим себе наблюдателя, расположенного вдоль орта $\mathbf{u}$ так, что этот орт направлен от ног наблюдателя к голове, и вообразим, что наблюдатель смотрит по направлению орта $\mathbf{v}$. Тогда могут представиться два случая[1]): либо (черт. 30a) орт $\mathbf{w}$ направлен (по отношению к наблюдателю) слева направо, либо (черт. 30b) — справа налево. В первом случае направления $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (взятые в указанном порядке), составляют *левую* систему, а во втором — *правую*. Название „левая" происходит от того, что в первом случае орты $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (взятые в указанном порядке) ориентированы друг относительно друга так, как большой, указательный и средний пальцы левой руки (предполагается, что первые два пальца вытянуты, а третий согнут под углом к ладони). Таким же образом орты $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, составляющие правую систему, связаны с пальцами правой руки.



Черт. 30a. Черт. 30b.

Левая система ортов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ останется левой, если произвести „круговую перестановку"[2]) их, т. е. рассматривать их в порядке $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$. Аналогичное свойство имеет место для правой системы. Наоборот, левая система перейдет в правую и обратно, если поменять местами только два орта. Например, если система $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ левая, то система $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ будет правой. Зеркальное отражение левой системы дает правую, и наоборот.

Так же можно различать левую и правую системы трех векторов, трех осей и вообще трех направлений.

25. Векторное произведение двух векторов. Во многих вопросах геометрии и прикладной математики, кроме рассмотренного уже нами скалярного произведения, играет большую роль понятие так называемого *векторного произведения*[3]) двух векторов, к определению которого мы переходим.

Векторным произведением векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ называется вектор $\mathbf{R}$, определяемый следующими условиями:

---

[1]) На черт. 30a и 30b орты $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ находятся в плоскости чертежа; на черт. 30a орт $\mathbf{v}$ направлен к читателю, на черт. 30b — от читателя.

[2]) Круговой перестановкой нескольких элементов $a, b, c, \ldots, k$, расположенных в определенном порядке, называется такая перестановка, при которой каждый элемент заменяется на следующий, а последний — на первый. Например, применяя круговую перестановку к трем элементам a, b, c, получим b, c, a. Производя круговую перестановку еще раз, получим c, a, b. Если произведем круговую перестановку еще раз, то вернемся к старому порядку.

[3]) Векторное произведение называют также „внешним".

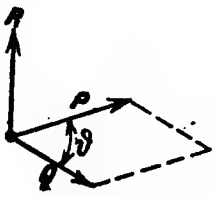
a) Длина вектора $\mathbf{R}$ численно равна произведению длин векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, и синуса угла ϑ, заключенного между ними:

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}| \sin \vartheta \qquad (1)$$

(черт. 31). Иными словами, длина вектора $\mathbf{R}$ численно равна площади параллелограма, построенного на векторах $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ (в предположении, что эти векторы проведены из общего начала), или, что все равно, удвоенной площади треугольника, построенного на этих векторах.

b) Вектор $\mathbf{R}$ перпендикулярен плоскости векторов[1]) $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

Эти условия еще не вполне определяют вектор $\mathbf{R}$: остается сделать выбор между двумя возможными противоположными направлениями. Чтобы устранить эту двойственность, мы добавляем следующее условие.



Черт. 31.

c) Векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ (в указанном порядке) составляют *левую систему*.

Разумеется, это требование можно было бы заменить требованием, чтобы наши векторы составляли правую систему; мы остановились на левой исключительно ради определенности (см. ниже, § 51, сноска на стр. 84).

Векторное произведение векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ мы будем обозначать так[2]):

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q}.$$

Следует помнить, что векторное пронзведение, в отличие от скалярного, есть вектор:

В отличие от произведения двух чисел, векторное произведение, подобно скалярному, может обращаться в нуль и тогда, когда оба сомножителя отличны от нуля. А именно, на основании (1) ясно, что векторное произведение равно нулю, когда один из сомножителей равен нулю или когда сомножители параллельны.

Таким образом *условие параллельности векторов* может быть выражено так:

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = 0 \qquad (2)$$

(ср. аналогичное условие перпендикулярности $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$, которое выражается через скалярное произведение).

Далее, в отличие от произведения чисел и от скалярного пронзведения двух векторов, векторное произведение *не обладает свойством переместительности*, т. е. оно зависит от порядка сомножителей. А именно, из самого определения следует, что

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -\mathbf{P} \times \mathbf{Q}. \qquad (3)$$

---

[1]) То-есть к плоскости, параллельной векторам $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Можно для наглядности представить себе, что начала этих векторов совмещены, как на черт. 31; тогда упомянутая плоскость есть плоскость, содержащая векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ (или всякая ей параллельная).

[2]) Для векторного произведения применяются также обозначения

$$[\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}],\ [\mathbf{P}, \mathbf{Q}],\ \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}.$$

Действительно, при перемене последовательности векторов $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ надо изменить направление вектора $\mathbf{R}$ на обратное, чтобы система $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$ осталась левой.

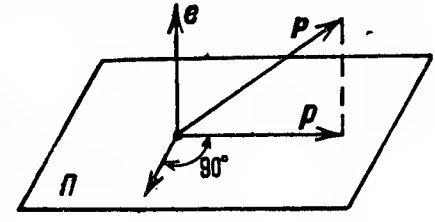
Переходя к доказательству свойств векторного произведения, аналогичных свойствам произведения чисел, отметим прежде всего простое свойство, выражаемое равенством, которое предоставляем доказать читателю:

$$m\mathbf{P} \times n\mathbf{Q} = mn(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}), \tag{4}$$

где m, n — произвольные числа. В частности (при $m = -1$, $n = 1$),

$$(-\mathbf{P}) \times \mathbf{Q} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \times \mathbf{P}. \tag{5}$$

Основным же свойством векторного произведения, сближающим его с произведением чисел, является свойство распределительности, которое сейчас докажем. Начнем с простого замечания, касающегося того случая, когда один из сомножителей есть орт $\mathbf{e}$.



Черт. 32.

Из самого определения векторного произведения следует, что произведение $\mathbf{e} \times \mathbf{P}$ можно получить следующим образом (черт. 32): спроектировать (ортогонально) вектор $\mathbf{P}$ на плоскость П, перпендикулярную к орту $\mathbf{e}$, и полученную проекцию $\mathbf{p}$ повернуть в плоскости П на прямой угол по часовой стрелке (относительно наблюдателя, имеющего ноги в начале вектора $\mathbf{e}$, а голову — в конце).

Из этого замечания легко вывести свойство векторного произведения орта $\mathbf{e}$ и суммы $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n$, выражаемое равенством

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n) = \mathbf{e} \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{e} \times \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{e} \times \mathbf{P}_n. \tag{6}$$

Действительно, построим многоугольник векторов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ и замыкающий вектор его $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n$. Спроектируем полученную фигуру на плоскость П. Пусть $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ и $\mathbf{p}$ суть соответственно проекции векторов $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ и $\mathbf{P}$, причем, конечно, $\mathbf{p}$ будет замыкающим вектором для многоугольника векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$.

Если теперь полученную в проекции плоскую фигуру повернуть в плоскости П на прямой угол (по часовой стрелке), то получим новый многоугольник векторов, сторонами которого будут векторы $\mathbf{e} \times \mathbf{P}_1$, $\mathbf{e} \times \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{e} \times \mathbf{P}_n$, а замыкающим вектором — вектор $\mathbf{e} \times \mathbf{P}$. Это и доказывает формулу (6).

Нетрудно видеть, что формула (6) останется справедливой, если в ней заменить орт $\mathbf{e}$ любым вектором $\mathbf{Q}$. Действительно, всегда имеем $\mathbf{Q} = Q \cdot \mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — орт, параллельный вектору $\mathbf{Q}$, а Q — некоторое число. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} \times (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n) &= Q\,[\mathbf{e} \times (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n)] = \\ &= Q(\mathbf{e} \times \mathbf{P}_1) + Q(\mathbf{e} \times \mathbf{P}_2) + \ldots + Q(\mathbf{e} \times \mathbf{P}_n) = \\ &= \mathbf{Q} \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q} \times \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{Q} \times \mathbf{P}_n,\end{aligned} \tag{7}$$

что и требовалось доказать.

Далее, ясно, что предыдущая формула остается справедливой, если одновременно в правой и левой частях переменить порядок сомножителей; действительно, от этой перестановки обе части изменят знак на обратный.

Таким образом свойство распределительности доказано. Из этого, в частности, следует (см. § 6, замечание 2), что *для составления векторного произведения двух сумм достаточно каждый член первой суммы умножить (векторно) на каждый член второй и результаты сложить.*

Не надо, однако, упускать из вида, что векторное произведение зависит от порядка сомножителей, и поэтому *при перемножении следует сохранять в каждом отдельном произведении порядок сомножителей.* Например,

$$(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)\times(\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2)=\mathbf{P}_1\times\mathbf{Q}_1+\mathbf{P}_2\times\mathbf{Q}_1+\mathbf{P}_1\times\mathbf{Q}_2+\mathbf{P}_2\times\mathbf{Q}_2.$$

Результат оказался бы неправильным, если бы, например, вместо последнего слагаемого $\mathbf{P}_2\times\mathbf{Q}_2$ мы написали $\mathbf{Q}_2\times\mathbf{P}_2$.

Упражнения и дополнения

1. *Векторный момент относительно точки.* Пусть $\mathbf{P}=\overrightarrow{AB}$ — некоторый связанный или скользящий вектор (см. § 5) и пусть C — некоторая точка. *Векторным моментом* вектора P относительно точки C называют вектор L, приложенный к точке C и определяемый следующими условиями: длина вектора L численно равна произведению длины вектора P и перпендикуляра h, опущенного на прямую, содержащую вектор P, из точки C; вектор L перпендикулярен к плоскости CAB и направлен в такую сторону, чтобы векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, L составляли левую систему.

Точка C называется *центром* (или *полюсом*) момента.

Легко видеть, что момент вектора относительно данной точки не изменится, если переместить этот вектор вдоль прямой, содержащей его. Наоборот, если перемещать эту прямую, то момент будет изменяться, так как при этом будет изменяться либо величина h, либо направление плоскости CAB (а следовательно, и направление L), либо и то, и другое вместе. Вот почему понятие момента применяют только к скользящим или связавным векторам, но не к свободным, которые можно произвольно перемещать (не изменяя направления).

Предлагается доказать, что

$$\mathbf{L}=\overrightarrow{CA}\times\mathbf{P}. \tag{8}$$

Решение. По определению, длина вектора L равна $|\mathbf{L}|=|\mathbf{P}|\cdot h=2$ площ. ABC; таким образом длина вектора L равна длине векторного произведения $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$. Замечая, далее, что, по самому определению вектора L, направление его также совпадает с направлением этого произведения, заключаем:

$$\mathbf{L}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}. \tag{9}$$

Но ведь $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\mathbf{P}$; подставляя это выражение в предыдущую формулу и замечая, что $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CA}=0$, получим требуемую формулу (8).

2. Доказать, исходя из формулы (8) предыдущего упражнения, что момент равнодействующей[1]) нескольких векторов, приложенных к данной точке A, равен сумме моментов[2]) составляющих („обобщенная теорема Вариньона").

[1]) Равнодействующей нескольких векторов, приложенных к данной точке, называется их сумма, приложенная к той же точке.

[2]) Речь идет о векторных моментах (см. предыдущее упражнение) относительно некоторой определенной точки C.

26. Смешанное произведение трех векторов. Скалярное и векторное умножения можно комбинировать различными способами друг с другом, что дает ряд формул, полезных для приложений. Мы ограничимся рассмотрением так называемого *смешанного произведения* трех векторов.

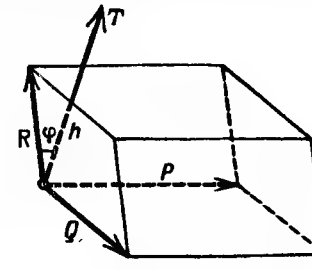
Пусть даны три вектора $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. Составим векторное произведение первых двух из них и полученный вектор умножим скалярно на третий, т. е. составим выражение

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R}.$$

Это выраженне и называется *смешанным произведением трех векторов* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, так как в нем фигурируют два вида умножения. Смешанное произведение мы будем обозначать так: $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}]$, так что, по определению,

$$[\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}] = (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R}. \tag{1}$$

Смешанное произведение есть скалярная величина, ибо оно получается, как результат скалярного перемножения двух векторов $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$. Оно имеет весьма простое геометрическое значение. А именно, легко показать, что *смешанное произведение трех векторов* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *равно объему параллелепипеда, построенного на этих трех векторах* (отложенных от одной и той же точки); при этом объему приписывается определенный знак.



Черт. 33.

Действительно, упомянутый объем V равен произведению площади S параллелограма, построенного на векторах $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, и высоты h (черт. 33). Но

$$S = |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}| \cdot \sin \vartheta,$$

где ϑ — угол между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Следовательно, если $\mathbf{T}$ обозначает векторное произведение $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$, то $S = |\mathbf{T}|$. С другой стороны, очевидно,

$$h = |\mathbf{R}| \cos \varphi_0,$$

где φ_0 — острый угол между $\mathbf{R}$ и h. Этот угол равен углу φ между $\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}$ или же дополняет его до 180°, в зависимости от направления вектора $\mathbf{T}$.

Поэтому $\cos \varphi_0 = \pm \cos \varphi$ и мы будем иметь

$$V = S \cdot h = |\mathbf{T}| \cdot |\mathbf{R}| \cos \varphi_0 = \pm |\mathbf{T}| \cdot |\mathbf{R}| \cos \varphi = \pm \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}$$

или, если вспомнить, что $\mathbf{T} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$,

$$V = \pm (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} = \pm [\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}].$$

Знак $+$ или $-$ надо выбирать так, чтобы для объема получалось положительное значение.

Можно, однако, отбросить это условие и определить V формулой

$$V = [\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}]. \tag{2}$$

Эта формула приписывает объему определенный знак: именно, как легко видеть, объем будет положительным, если векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ соста-

вляют левую систему; в противном случае объем будет отрицательным [1]). Ясно, кроме того, что если в определении векторного произведения (см. начало § 25) заменить условие с) условием, чтобы векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ составляли правую систему, то $V>0$, если $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ составляют правую систему, и $V<0$ — в противном случае.

На основании указанного геометрического значения смешанного произведения очевидно, что оно не изменяется при круговой перестановке сомножителей, т. е. что

$$[\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}] = [\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{P}] = [\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}], \tag{3}$$

т. е.

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R} = (\mathbf{Q}\times\mathbf{R})\cdot\mathbf{P} = (\mathbf{R}\times\mathbf{P})\cdot\mathbf{Q}.$$

Из предыдущего следует, в частности (так как скалярное произведение двух векторов не зависит от порядка сомножителей):

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R} = \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{R}).$$

Легко, далее, видеть, что смешанное произведение изменяет знак на обратный при перестановке любых двух сомножителей; например,

$$[\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}] = -[\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{R}]. \tag{3а}$$

Упражнения и приложения

1. Доказать, что равенство

$$[\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}] = 0$$

есть необходимое и достаточное условие того, чтобы векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ были параллельны одной и той же плоскости.

2. *Момент вектора относительно оси. Скалярным моментом* L_Δ скользящего или связанного вектора $\mathbf{P} = \overrightarrow{AB}$ относительно данной оси Δ называется алгебраическое значение прямоугольной проекции на ось Δ векторного момента [2]) вектора $\mathbf{P}$, взятого относительно некоторой точки C оси Δ.

Доказать, что

$$L_\Delta = [\overrightarrow{CA}, \mathbf{P}, \mathbf{e}], \tag{4}$$

где $\mathbf{e}$ — орт оси Δ, и что L_Δ не зависит от положения точки C на оси Δ.

Доказательство. По определению, имеем $L_\Delta = \text{пр}_\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{e}$; здесь $\mathbf{L} = \overrightarrow{CA}\times\mathbf{P}$ есть векторный момент вектора $\mathbf{P}$ относительно точки C, расположенной на оси Δ. Следовательно, $L_\Delta = (\overrightarrow{CA}\times\mathbf{P})\cdot\mathbf{e} = [\overrightarrow{CA}, \mathbf{P}, \mathbf{e}]$, а это и есть требуемая формула.

Произведя круговые перестановки, эту формулу можно переписать еще так:

$$L_\Delta = [\mathbf{P}, \mathbf{e}, \overrightarrow{CA}] = [\mathbf{e}, \overrightarrow{CA}, \mathbf{P}] = (\mathbf{e}\times\overrightarrow{CA})\cdot\mathbf{P}.$$

Пусть C' обозначает какую-либо другую точку на оси Δ. Тогда $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A}$. Подставляя это значение в последнее выражение и замечая, что $\mathbf{e}\times\overrightarrow{CC'} = 0$, получим

$$L_\Delta = (\mathbf{e}\times\overrightarrow{C'A})\cdot\mathbf{P} = [\mathbf{e}, \overrightarrow{C'A}, \mathbf{P}] = [\overrightarrow{C'A}, \mathbf{P}, \mathbf{e}],$$

откуда следует, что L_Δ не изменяется при замене C на C'.

---

[1]) Действительно, в первом случае угол φ, очевидно, острый и поэтому $[\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}] = |\mathbf{T}|\cdot|\mathbf{R}|\cos\varphi > 0$; во втором же случае угол φ — тупой и поэтому $|\mathbf{T}|\cdot|\mathbf{R}|\cos\varphi < 0$.

[2]) См упражнение 1 предыдущего параграфа.

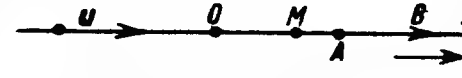
ГЛАВА ВТОРАЯ

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА И ТОЧКИ

I. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Мы переходим теперь к одному из способов осуществления связи между геометрическими образами и числами. Мы начнем с простейших геометрических образов — точек и векторов — и введем понятие декартовых координат этих образов. Координатами данного образа, вообще говоря, называются числа, которое вполне характеризуют существенные геометрические элементы, связанные с этим образом.

27. Координаты на прямой (оси). Пусть дана некоторая ось Ox (черт. 34) и пусть $\mathbf{P} = \overrightarrow{AB}$ — некоторый вектор, расположенный на этой оси. Пусть $\mathbf{u}$ обозначает орт оси Ox. Тогда (см. § 11) мы можем написать



Черт. 34.

$$\mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot X, \tag{1}$$

где X обозначает алгебраическое значение вектора $\mathbf{P}$ по оси Ox т. е.[1])

$$X = \pm |\mathbf{P}|, \tag{2}$$

а $+$ или $-$ берется в зависимости от того, совпадает ли направление $\mathbf{P}$ с направлением оси Ox или противоположно ему. Если дан вектор $\mathbf{P}$, то величина X вполне определена (например, если длина вектора $\mathbf{P}$ равна 4, а направление его противоположно направлению оси Ox, то $\mathbf{P} = -4\mathbf{u}$ и $X = -4$). Обратно, если дано число X, то длина и направление вектора $\mathbf{P}$ вполне определены (длина равна абсолютной величине X, а направление определяется знаком X; например, если $X = -3$, то длина вектора $\mathbf{P} = -3\mathbf{u}$ равна 3, а направление противоположно направлению оси Ox).

Мы, как и раньше, будем считать вектор вполне данным, если известны его длина и направление (так что положению начала мы не будем придавать никакого значения). Поэтому мы можем сказать, что число X вполне определяет вектор $\mathbf{P}$.

Это число X (т. е., попросту, алгебраическое значение вектора $\mathbf{P}$ по оси Ox) называется *декартовой координатой вектора* $\mathbf{P}$, расположенного на оси Ox. Ось же Ox носит название *оси декартовой системы координат*.

---

[1]) Согласно обозначениям § 12, $X = AB$ (без стрелки наверху).

На основании определения ясно, что координаты двух равных векторов равны между собою, и обратно, если координаты двух векторов равны, то равны и векторы.

Пусть теперь O обозначает некоторую постоянную точку на оси Ox (черт. 34). Положение любой другой точки M на этой оси вполне определяется заданием вектора $\overrightarrow{OM}$ по длине и направлению; с другой стороны, длина и направление этого вектора вполне определяются его координатой.

Обозначим через x эту координату, т. е. положим [1])

$$x = OM. \tag{3}$$

Число x в то же время называется декартовой координатой точки M; точка же O называется *началом координат*.

Часто также координату x называют *абсциссой* точки M, а ось Ox — *осью абсцисс*.

Начало координат разбивает ось абсцисс на две части. Точки, лежащие на одной из этих частей (на нашем чертеже — точки, лежащие справа от O), имеют положительные абсциссы, а точки, лежащие на другой части (на нашем чертеже — слева от O), — отрицательные абсциссы. Первую часть можно назвать положительною частью оси x, а вторую — отрицательною.

На основании сказанного выше, абсциссу можно определить еще и следующим образом:

Абсцисса точки M есть число x, абсолютное значение которого равно расстоянию точки M до начала координат и которое считается положительным, когда M находится на положительной части оси, а в противном случае — отрицательным [2]).

Чтобы отметить, что x есть координата точки M, пишут: точка $M(x)$. Например, точка $M(-3)$ есть точка, расстояние которой от начала координат равно 3 единицам и которая расположена на отрицательной части оси координат.

Упражнения

1. Построить векторы $\mathbf{P} = 2\mathbf{u}$, $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathbf{u}$, $\mathbf{P} = -\frac{3}{4}\mathbf{u}$.
2. Построить точки $M(-1)$, $M(0)$, $M(10)$.
3. Найти расстояние между точками $M_1(-4)$ и $M_2(12)$.
4. Даны две точки $A(-3)$ и $B(-4)$. Найти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Ответ. $\overrightarrow{AB} = -\mathbf{u}$, $\overrightarrow{BA} = \mathbf{u}$.

28. Координаты вектора и точки на плоскости. В предыдущем параграфе мы убедились, что вектор, расположенный на данной прямой (оси), вполне определяется заданием одного числа (координаты); то же относится и к положению точки на данной прямой. Мы увидим сейчас,

---

[1]) Напомним, что OM (без стрелки наверху) обозначает положительное или отрицательное число (смотря по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$).

[2]) Во всем предыдущем подразумевается, что раз навсегда выбрана единица длины (например, саитиметр), которой измеряются длины отрезков. Иначе слова „абсолютное значение x равно расстоянию...“ не имели бы смысла.

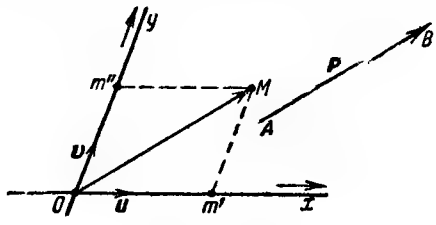
что для определения вектора, расположенного на данной плоскости, необходимо задание двух чисел; это относится также к определению положения точки на данной плоскости.

Возьмем на данной плоскости две пересекающиеся оси Ox, Oy (черт. 35). Докажем, что любой вектор $\mathbf{P} = \overrightarrow{AB}$, находящийся на этой плоскости, можно представить как сумму двух векторов, из которых каждый параллелен одной из осей Ox, Oy.

Действительно, перенесем вектор $\mathbf{P}$ (не изменяя длины и направления его) в положение $\overrightarrow{OM}$ так, чтобы его начало совпало с точкою O пересечения осей Ox, Oy. Проведем, далее, прямые Mm' и Mm'', соответственно параллельные осям Oy и Ox, и пусть m' и m'' обозначают их пересечения соответственно с осями Ox и Oy. Тогда, очевидно:

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om'} + \overrightarrow{Om''}, \quad (1)$$

что и доказывает наше утверждение.



Черт. 35.

Последнему равенству можно придать вид, где ясно выступает характер представления (1).

Действительно, обозначим соответственно через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ орты осей Ox и Oy. Тогда, очевидно (см. § 11):

$$\overrightarrow{Om'} = \mathbf{u}X, \quad \overrightarrow{Om''} = \mathbf{v}Y, \quad (2)$$

где X и Y обозначают соответственно алгебраические значения векторов $\overrightarrow{Om'}$ и $\overrightarrow{Om''}$ по осям Ox и Oy.

Таким образом

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y. \quad (3)$$

На основании определения величин X и Y ясно, что

$$\left.\begin{aligned} X &= \text{пр}_x \overrightarrow{OM} = \text{пр}_x \mathbf{P} \text{ (взятая параллельно оси } Oy), \\ Y &= \text{пр}_y \overrightarrow{OM} = \text{пр}_y \mathbf{P} \text{ (взятая параллельно оси } Ox) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

(пр_x и пр_y обозначают соответственно алгебраические значения проекций на оси Ox и Oy).

Легко показать, что представление данного вектора в виде (3) возможно только единственным способом, т. е. что если для того же вектора $\mathbf{P}$ имеем представление

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X' + \mathbf{v}Y',$$

то необходимо $X' = X$, $Y' = Y$. Действительно, сравнивая предыдущую формулу с (3), получаем $\mathbf{u}X' + \mathbf{v}Y' = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y$, откуда следует, что $\mathbf{u}(X' - X) + \mathbf{v}(Y' - Y) = 0$, или еще

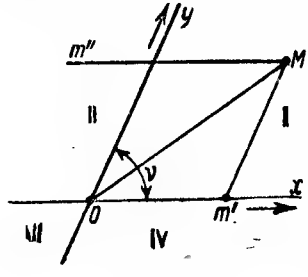
$$\mathbf{u}l + \mathbf{v}m = 0, \quad (5)$$

где $l = X' - X$, $m = Y' - Y$. С другой стороны, легко видеть, что равенство вида (5), в котором $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — непараллельные векторы, возможно только в том случае, если $l = m = 0$. Действительно, в противном случае вышло бы, что векторы $\mathbf{u} \cdot l$ и $-\mathbf{v} \cdot m$, параллельные различным направлениям $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, равны между собой, что невозможно. Итак, мы имеем $l = m = 0$, откуда и следует, что $X' = X$, $Y' = Y$.

Таким образом величины X и Y вполне определены, если дан вектор $\mathbf{P}$; обратно, если X и Y даны, вектор $\mathbf{P}$ вполне определяется формулой (3) [1]).

Величины X и Y называются *декартовыми координатами вектора* $\mathbf{P}$. Для обозначения факта, что X и Y являются координатами вектора $\mathbf{P}$, пишут $\mathbf{P}(X, Y)$ или

$$\mathbf{P} = (X, Y);$$



Черт. 36.

последнее равенство надо понимать, попросту, *как краткую запись формулы* (3).

Из самого определения координат вытекает, что координаты равных векторов равны между собою и что, обратно, векторы с одинаковыми координатами равны.

Очевидно, далее, что если вектор равен нулю (т. е. его длина равна нулю), то координаты его равны нулю, и обратно.

Пусть M есть произвольная точка на данной плоскости. Положение точки M на плоскости вполне определено, если известны длина и направление вектора $\overrightarrow{OM}$ (черт. 36), иначе говоря, если известны координаты этого вектора, который называется *радиусом-вектором* точки M относительно точки O.

Обозначим через x и y эти координаты, иначе говоря, положим

$$x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM} \text{ (взятая параллельно оси } Oy),$$

$$y = \text{пр}_y \overrightarrow{OM} \text{ (взятая параллельно оси } Ox);$$

числа x и y, которые вполне определяют положение точки M на плоскости, называются *декартовыми координатами* точки M. *Задать точку* — это значит *задать ее координаты*.

Для обозначения факта, что x и y являются координатами точки M, пишут: точка $M(x, y)$.

Можно дать еще следующее определение координат x и y.

Пусть m' и m'' обозначают проекции точки M на оси Ox и Oy (взятые соответственно параллельно осям Oy и Ox); тогда

$$x = Om'; \quad y = Om'';$$

иначе говоря, x есть алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{Om'}$, т. е. координата точки m' на оси Ox (см. предыдущий параграф); аналогично для y.

---

[1]) Напомним еще раз, что свободный вектор считается определенным, если известны его длина и направление; положение начала — безразлично.

Чтобы построить точку M по данным координатам x и y, достаточно отложить (не упуская из вида знаков) на оси Ox отрезок $Om' = x$, а на оси Oy — отрезок $Om'' = y$ и из полученных точек провести прямые, параллельные соответственно осям Oy и Ox; точка пересечения последних прямых и есть точка M.

Оси Ox и Oy называются *осями декартовой системы координат*, а точка O — *началом координат*. Угол же ν, заключенный между положительными направлениями осей, называется *координатным углом*. Оси координат разбивают всю плоскость на четыре части I, II, III, IV (черт. 36), из которых каждая характеризуется знаками координат точек, принадлежащих этой части.

В части I обе координаты положительны, в части II $x < 0$, $y > 0$, в части III $x < 0$, $y < 0$ и, наконец, в части IV $x > 0$, $y < 0$.

Часть I (т. е. где $x > 0$, $y > 0$) называется иногда *нормальным* координатным углом.

Обыкновенно на чертеже ось Ox („ось x-ов“) проводится горизонтально и направляется слева направо, а ось Oy („ось y-ов“) — снизу вверх.

Координату x называют *абсциссой* точки M, а координату y — *ординатой*; соответственно этому ось x-ов называется также *осью абсцисс*, а ось y-ов — *осью ординат*.

При только что указанном расположении чертежа точки, лежащие справа от оси Oy, имеют положительные абсциссы, а точки, расположенные слева от этой оси, — отрицательные. Точно так же точки, лежащие выше оси Ox, имеют положительные ординаты, а точки, лежащие ниже этой оси, — отрицательные. Например, точка $M(-3, +5)$ расположена влево от оси Oy и выше оси Ox, и для построения этой точки достаточно отложить вдоль оси Ox, влево от O, отрезок длины 3, а из конца этого отрезка на прямой, параллельной оси Oy, отложить отрезок длины 5 по направлению кверху.

Упражнения

1. Начертить какую-либо систему осей координат Ox, Oy и, выбрав определенную единицу длины, построить точки:

$$M(0, 0),\ M(5, 0),\ M(0, 3),\ M(0, -1),\ M(5, -2),\ M(-3, -3).$$

2. Построить вектор $\mathbf{P} = (3, -1)$.

3. Построить векторы (1, 2) и (4, 8) и доказать, что они параллельны.

4. Предполагая координатный угол ν равным 60°, построить точки $M_1(1, 0)$, $M_2(0, 2)$ и найти расстояние между ними.

Ответ. $|M_1M_2| = \sqrt{3}$.

5. При координатном угле $\nu = 60°$ найти расстояние точки (4, 4) до начала координат.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

6. Доказать, основываясь на результате упражнения 1 § 8, что расстояние точки $M(x, y)$ до начала координат дается формулой:

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\nu}, \qquad (*)$$

где ν — угол между осями координат. Тщательно исследовать разницу между этой формулой и формулой упомянутого упражнения. Доказать, что формула (*)

справедлива не только при $x>0$, $y>0$, а при всех возможных сочетаниях знаков ($x>0$, $y<0$; $x<0$, $y>0$; $x<0$, $y<0$).

(Ниже эта формула будет выведена при помощи общего метода, не требующего кропотливого исследования всех возможных частных случаев; однако читателю рекомендуется произвести здесь это исследование для того, чтобы он вполне уяснил себе преимущество общего метода, изложенного в дальнейшем.)

29. Прямоугольные координаты на плоскости. Если угол ν между осями декартовых координат прямой $\left(\nu=\frac{\pi}{2}\right)$, то система координат называется *прямоугольной*, или *ортогональной*.

В этом случае координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\mathbf{P}$ суть, попросту, алгебраические значения прямоугольных проекций его на оси координат

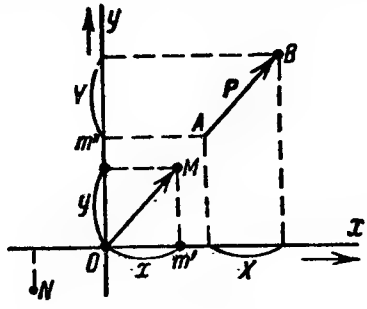
$$X=\text{пр}_x\,\mathbf{P},\quad Y=\text{пр}_y\,\mathbf{P};$$

иначе эти формулы можно написать так:

$$X=\mathbf{u}\cdot\mathbf{P},\quad Y=\mathbf{v}\cdot\mathbf{P}, \tag{1}$$

где, как всегда, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ обозначают орты осей координат.

Точно так же координаты любой точки M суть алгебраические значения прямоугольных проекций радиуса-вектора этой точки на оси координат (черт. 37).



Черт. 37.

Можно также сказать, что координаты точки M суть расстояния этой точки до осей, снабженные определенными знаками. Именно, x есть расстояние точки M до оси Oy, взятое со знаком $(+)$, если точка M расположена с той стороны от оси Oy, куда обращено положительное направление оси Ox; аналогично для y.

Для того чтобы построить, например, точку $N(-3,-2)$, надо по оси Ox, в отрицательном направлении, отложить от точки O отрезок длины 3 и из конца полученного отрезка восставить перпендикуляр длины 2 в направлении, противоположном направлению оси Oy; конец этого перпендикуляра и есть точка N (черт. 37).

В отличие от прямоугольной системы непрямоугольные системы называются *косоугольными*.

Упражнения

1. Построить вектор $\mathbf{P}=(5, 4)$, найти его длину и тангенс угла φ, который он составляет с осью Ox.

Ответ. $|\mathbf{P}|=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{5}$.

2. Построить точки $A(1, 1)$ и $B(3, 2)$, затем построить вектор $\overrightarrow{AB}$, вычислить его координаты и найти угол φ вектора $\overrightarrow{AB}$ с осью Ox.

Ответ. $\overrightarrow{AB}=(2, 1)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$.

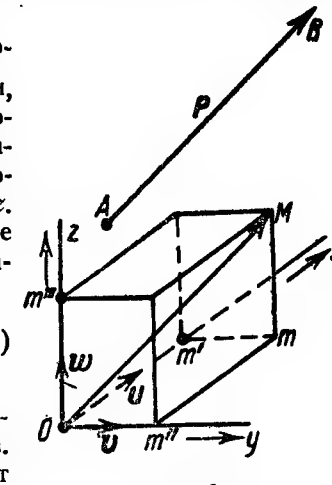
30. Координаты вектора и точки в пространстве. Обобщение на случай пространства напрашивается само собою. Возьмем три оси Ox, Oy, Oz, пересекающиеся в одной точке O и не лежащие в одной и той же плоскости (черт. 38). Эти оси назовем *осями декартовой системы координат*, а плоскости Oyz, Ozx, Oxy — *плоскостями координат*. Точку O назовем *началом координат*.

Пусть $\mathbf{P} = \overrightarrow{AB}$ — некоторый вектор, произвольно расположенный в пространстве. Докажем, что этот вектор можно представить как сумму трех векторов, из которых каждый параллелен одной из осей координат.

Действительно, перенесем вектор $\mathbf{P}$ в положение $\overrightarrow{OM}$ и проведем из M три плоскости, параллельные соответственно трем плоскостям координат. Пусть m', m'' и m''' обозначают точки пересечения проведенных плоскостей соответственно с осями Ox, Oy, Oz. Ясно, что три проведенные плоскости вместе с тремя координатными плоскостями образуют параллелепипед и что

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om'} + \overrightarrow{Om''} + \overrightarrow{Om'''}. \qquad (1)$$

Это и доказывает наше утверждение.



Черт. 38.

Так же, как и в § 28, последнее представление можно выразить при помощи ортов. Пусть, в самом деле, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ обозначают соответственно орты осей Ox, Oy и Oz. Тогда, очевидно:

$$\overrightarrow{Om'} = \mathbf{u}X, \quad \overrightarrow{Om''} = \mathbf{v}Y, \quad \overrightarrow{Om'''} = \mathbf{w}Z, \qquad (2)$$

где X, Y и Z обозначают, соответственно, алгебраические значения векторов $\overrightarrow{Om'}$, $\overrightarrow{Om''}$, $\overrightarrow{Om'''}$, взятые соответственно по осям Ox, Oy и Oz. Таким образом получаем основную формулу:

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z. \qquad (3)$$

На основании определения величин X, Y и Z ясно, что

$X = \text{пр}_x\mathbf{P}$ (взятая параллельно плоскости Oyz),
$Y = \text{пр}_y\mathbf{P}$ („ „ „ Ozx),
$Z = \text{пр}_z\mathbf{P}$ („ „ „ Oxy).

Легко видеть, что представление (3) возможно одним единственным способом, т. е. что если каким-либо другим образом мы найдем для того же вектора $\mathbf{P}$, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X' + \mathbf{v}Y' + \mathbf{w}Z',$$

то необходимо $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z$. Действительно, сравнивая предыдущую формулу с (3), получим, как в § 28,

$$\mathbf{u}l + \mathbf{v}m + \mathbf{w}n = 0,$$

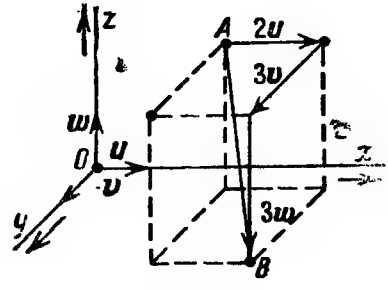
где положено $l = X' - X$, $m = Y' - Y$, $n = Z' - Z$. Но предыдущее равенство возможно только при $l = m = n = 0$. Действительно, если бы одно из чисел l, m, n, например n, не было равно иулю, вышло бы, что вектор $\mathrm{w} \cdot n$, отличный от нуля и параллельиый оси Oz, равен вектору $-\mathrm{u}l - \mathrm{v}m$, который параллелен плоскости Oxy (так как последиий вектор есть сумма векторов $-\mathrm{u}l$ и $-\mathrm{v}m$ параллельных плоскости Oxy). Но это невозможно, ибо ось Oz, по условию, не параллельна плоскости Oxy.

Таким образом, если дан вектор P, то величины X, Y и Z вполне определены, и обратно, если даны величины X, Y и Z, вектор P вполне определяется формулой (3).

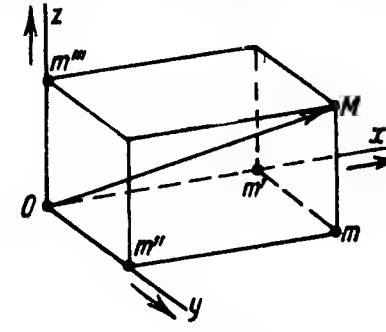
Например, если $X = 2$, $Y = 3$, $Z = -3$, то вектор

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{u} + 3\mathrm{v} - 3\mathrm{w}$$

построится следующим образом. Из произвольной точки A проведем вектор 2u (т. е. вектор длины 2, одинаково направленный с осью Ox);



Черт. 39.



Черт. 40.

из конца этого вектора проведем вектор 3v (т. е. вектор длины 3, одинаково направленный с осью Oy) и, наконец, из конца последиего вектора проведем вектор $-3\mathrm{w}$ (т. е. вектор длины 3, направленный противоположно оси Oz). Вектор $\overrightarrow{AB}$ (замыкающий вектор) с началом в A и концом в конце B последнего из проведенных векторов есть искомый вектор P (черт. 39). Можно было бы, конечно, произвести построение и при помощи параллелепипеда (как показано на черт. 39 пунктиром), но указанное выше построение нагляднее. X, Y, и Z называются *декартовыми координатами* вектора P. Для обозначения того, что X, Y, Z являются координатами вектора P, пишут: P (X, Y, Z), или еще

$$\mathrm{P} = (X, Y, Z);$$

это — просто краткая запись формулы (3).

Из самого определения координат вытекает, что координаты равных векторов равны между собою и, обратно, векторы с одинаковыми координатами равны.

Очевидно, далее, что если вектор равен нулю, то все три его координаты равны нулю, и обратно.

Совершенно аналогично случаю двух измерений (§ 28) положение какой-либо точки M в пространстве можно определить координатами

связанного вектора $\overrightarrow{OM}$, называемого *радиусом-вектором* точки M относительно точки O (черт. 40).

Обозначим через x, y и z эти координаты, т. е. положим

$$x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM} \quad \text{(взятая параллельно плоскости } Oyz\text{)},$$
$$y = \text{пр}_y \overrightarrow{OM} \quad (\ \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad Ozx),$$
$$z = \text{пр}_z \overrightarrow{OM} \quad (\ \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad Oxy).$$

Числа x, y и z называются *декартовыми координатами* точки M. Если эти числа даны, то для построения точки M достаточно отложить по осям координат (соблюдая знаки) отрезки $Om' = x$, $Om'' = y$, $Om''' = z$ и через точки m', m'', m''' провести плоскости, соответственно параллельные плоскостям Oyz, Ozx, Oxy; точка пересечения этих плоскостей даст точку M.

Для большей наглядности представим себе, что плоскость Oxy горизонтальна, ось Oz направлена снизу вверх, Ox — слева направо, а ось Oy — в нашу сторону.

Плоскости координат разбивают все пространство на восемь частей. Именно, при указанном расположении чертежа плоскость Oxy разбивает пространство на две части: верхнюю и нижнюю; каждая из этих частей разбивается плоскостью Oyz, в свою очередь, на две части: правую и левую; наконец, каждая из полученных четырех частей разбивается плоскостью Ozx на две части: по сю сторону и по ту сторону. В результате получается восемь частей.

Каждая из упомянутых восьми частей характеризуется знаками координат x, y и z. Именно, если $z > $ или < 0, то точка находится выше или ниже плоскости Oxy; если $y > $ или < 0, то точка находится по сю или по ту сторону плоскости Ozx, если $x > $ или < 0, то точка находится справа или слева от плоскости Oyz.

Та часть пространства, где все три координаты положительны, называется иногда *нормальным* координатным углом; эта часть состоит (при принятом выше расположении чертежа) из точек, которые расположены выше плоскостн Oxy, справа от плоскости Oyz и по сю сторону от плоскости Ozx.

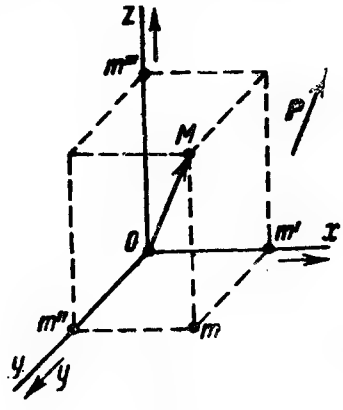
31. Прямоугольные координаты в пространстве. Наиболее важен случай, когда оси координат попарно взаимно перпендикулярны. Тогда и плоскости координат попарно взаимно перпендикулярны, и система декартовых координат называется *прямоугольной*, или *ортогональной* (непрямоугольные системы называются *косоугольными*). В случае прямоугольной системы координаты вектора суть, попросту, алгебраические значения его прямоугольных проекций на оси координат

$$X = \text{пр}_x \mathbf{P}, \quad Y = \text{пр}_y \mathbf{P}, \quad Z = \text{пр}_z \mathbf{P}.$$

Если, как и ранее, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ обозначают орты осей координат, то предыдущие формулы могут быть написаны так (§ 23):

$$X = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}, \quad Y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}, \quad Z = \mathbf{w} \cdot \mathbf{P}. \tag{1}$$

Точно так же координаты x, y, z точки M суть алгебраические значения прямоугольных проекций радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ этой точки на оси координат (черт. 41).



Черт. 41.

Ясно, что координаты x, y и z численно равны расстояниям точки M соответственно до координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy, знаки же берутся по следующему правилу: если M находится по ту сторону от координатной плоскости, куда направлена перпендикулярная к этой плоскости ось, то расстояние надо взять со знаком $(+)$; в противном случае со знаком $(-)$.

32. Разложение вектора по данным направлениям. Мы считаем полезным повторить, с целью подчеркнуть их, некоторые результаты, полученные нами ранее. Для сокращения речи условимся в одном термине: если несколько свободных векторов параллельны одной и той же плоскости, то мы будем говорить, что они *компланарны*[1]). В частности, *два* вектора всегда компланарны; чтобы в этом убедиться, достаточно отложить их от одной и той же точки. Ясно, далее, что направление плоскости, которой параллельны два данные вектора, вполне определено, если эти два вектора непараллельны между собою. Любую плоскость, которой параллельны данные компланарные векторы, мы будем называть просто плоскостью данных векторов.

Рассматривая в § 28 произвольный вектор $\mathbf{P}$, расположенный в данной плоскости, мы показали, что его всегда можно представить, как сумму двух векторов, параллельных двум заданным ортам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, расположенным в той же плоскости. Говоря о векторах, расположенных в одной и той же плоскости, мы поступили так исключительно ради наглядности; на самом же деле здесь имелись в виду, попросту, компланарные векторы (в указанном смысле этого термина).

Поэтому сказанное в начале § 28 лучше формулировать следующим образом: пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — любые непараллельные орты и пусть $\mathbf{P}$ — любой вектор, компланарный с ними. Тогда вектор $\mathbf{P}$ можно представить в виде суммы

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \qquad (1)$$

двух векторов, параллельных направлениям $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно отложить векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{P}$ от какого-либо общего начала и произвести построение, указанное в § 28.

---

[1]) Слово „компланарные“ означает, в сущности: „имеющие общую плоскость“, т. е. „расположенные в одной плоскости“. Но так как речь здесь идет о свободных векторах, которые можно переносить (не изменяя длины и направления) произвольным образом, мы должны называть компланарными векторы, параллельные одной и той же плоскости, ибо в этом случае их можно перенести так, чтобы они оказались расположенными в одной плоскости.

Формула (1) дает *разложение вектора* **P** *по двум данным* (непараллельным между собою) *направлениям* в предположении, что вектор **P** и эти два направления компланарны. Из (1) получаем (см. § 28) формулу

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y, \tag{2}$$

дающую *разложение вектора* **P** *по двум данным ортам,* компланарным с **P**.

Точно так же, из сказанного в § 30 вытекает, что если даны три некомпланарных орта или, что сводится к тому же, три некомпланарных направления, то всякий вектор **P** может быть *разложен по этим трем направлениям*, т. е. представлен в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3, \tag{3}$$

где векторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ соответственно параллельны данным направлениям. Чтобы получить это разложение, достаточно отложить от любой точки O пространства орты **u**, **v**, **w** и произвести построение, указанное в § 30.

Из (3) вытекает (§ 30) *разложение вектора* **P** *по трем некомпланарным ортам*

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z.$$

На основании сказанного очевидно, что при определении координат свободного вектора нет надобности вводить в рассмотрение начало координат: достаточно, в общем случае, задать три (некомпланарных) координатных орта. В случае векторов, параллельных данной плоскости, достаточно задать два (непараллельных) координатных орта, а в случае векторов, параллельных данному направлению, — один координатный орт. Наоборот, положение начала координат имеет, очевидно, существенное значение, когда речь идет о координатах *точки.*

Добавим в заключение, что если дана плоскость Π и непараллельная ей прямая Δ, то всякий вектор может быть (единственным образом) разложен так:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_\Delta + \mathbf{P}_\Pi,$$

где $\mathbf{P}_\Delta$ и $\mathbf{P}_\Pi$ — векторы, соответственно параллельные Δ и Π. Действительно, как легко видеть,

$$\mathbf{P}_\Delta = \overrightarrow{\text{пр}_\Delta}\,\mathbf{P}\ (\text{взятой} \parallel \Pi), \quad \mathbf{P}_\Pi = \overrightarrow{\text{пр}_\Pi}\,\mathbf{P}\ (\text{взятой} \parallel \Delta).$$

33. Обобщенные декартовы координаты. Понятие декартовых координат можно несколько обобщить, воспользовавшись для разложения вектора не ортами, а векторами произвольной длины.

Начнем с векторов, параллельных данному направлению. Пусть **u** — *произвольный, отличный от нуля вектор,* имеющий данное направление. Всякий другой вектор **P**, параллельный ему, может быть представлен единственным образом в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{u} \cdot X, \tag{1}$$

где

$$X = \frac{P}{|\mathbf{u}|} \tag{2}$$

(P — алгебраическое значение вектора **P** по направлению **u**).

Предыдущие формулы непосредственно вытекают из определения произведения вектора и числа [1]). Число X называют *отношением параллельных* [2]) *векторов* $\mathbf{P}$ и $\mathbf{u}$.

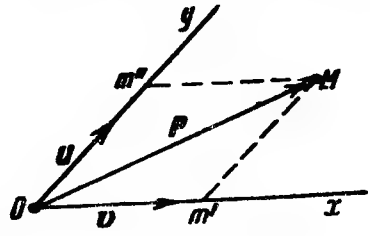
Число X может быть и здесь названо *координатой* вектора $\mathbf{P}$, *по отношению к координатному вектору* $\mathbf{u}$.

Для определения положения точки M на данной оси Ox мы можем воспользоваться, как раньше, вектором $\overrightarrow{OM}$, отложенным от определенной точки O („начала координат") этой оси. Мы будем иметь, согласно (1),

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x, \tag{3}$$

где $\mathbf{u}$ обозначает некоторый (раз навсегда выбранный) вектор, параллельный данной оси („координатный вектор"), а x — определенное число:

$$x = \frac{OM}{|\mathbf{u}|}. \tag{4}$$



Черт. 42.

Число x и здесь называется координатой точки M.

Совершенно аналогично, для задания вектора $\mathbf{P}$, параллельного данной плоскости, можно воспользоваться двумя произвольно выбранными (но непараллельными) векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, параллельными нашей плоскости (см. черт. 42, на котором векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{P} = \overrightarrow{OM}$ изображены приложенными к одной точке O, что мы всегда имеем право сделать). Как и в § 28, мы получим

$$\mathbf{P} = \overrightarrow{Om'} + \overrightarrow{Om''},$$

и на основании сказанного выше

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y, \tag{5}$$

где $X = \frac{Om'}{|\mathbf{u}|}$, $Y = \frac{Om''}{|\mathbf{u}|}$. Числа X и Y суть *координаты вектора* $\mathbf{P}$, отнесенного к координатным векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Для определения положения *точки* на данной плоскости необходимо задать, кроме двух координатных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, еще определенное начало координат O. Тогда положение точки M на плоскости будет определяться ее радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$. Полагая

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x + \mathbf{v}y,$$

мы получаем возможность определять положение точки при помощи двух чисел (координат) x, y.

---

[1]) Из этого определения вытекает, что направление вектора $\mathbf{u}X$ совпадает с направлением $\mathbf{P}$ и что длина его $|\mathbf{u}X| = |\mathbf{u}| \cdot |X| = |\mathbf{u}| \cdot \frac{|\mathbf{P}|}{|\mathbf{u}|} = |\mathbf{P}|$.

[2]) Понятие отношения двух векторов определяется только в случае параллельных векторов.

Наконец, для задания вектора P, произвольно направленного в пространстве, мы можем воспользоваться тремя (некомпланарными) координатными векторами u, v, w. Изображая, для наглядности, эти векторы приложенными к одной точке O (черт. 43), получим, как в § 30,

$$\mathrm{P} = \overrightarrow{Om'} + \overrightarrow{Om''} + \overrightarrow{Om'''},$$

откуда

$$\mathrm{P} = \mathrm{u}X + \mathrm{v}Y + \mathrm{w}Z, \tag{6}$$

где

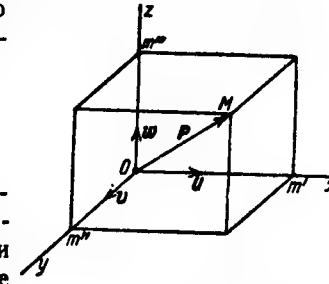
$$X = \frac{Om'}{|\mathrm{u}|}, \quad Y = \frac{Om''}{|\mathrm{v}|}, \quad Z = \frac{Om'''}{|\mathrm{w}|}.$$

Числа X, Y, Z суть *координаты вектора* P, отнесенного к координатным векторам u, v, w.

Для определения положения *точки* M следует задать еще определеиное начало координат O, после чего положение точки будет определяться формулой:

$$\overrightarrow{OM} = \mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z;$$

x, y, z — координаты точки M.



Черт. 43.

Координаты, определенные здесь, мы будем называть *обобщенными декартовыми координатами*, или декартовыми координатами *общего вида* [1]). Координаты, рассмотренные в предыдущих параграфах, представляют собою частный случай, когда $|\mathrm{u}| = |\mathrm{v}| = |\mathrm{w}| = 1$. Эти координаты мы будем теперь называть *необобщенными декартовыми координатами*.

Из предыдущего следует, что обобщенные координаты X, Y, Z равны иеобобщеиным, разделенным на длины соответствующих координиатных векторов. В дальнейшем, если противное не оговорено особо, *под декартовыми координатами мы будем понимать обобщенные декартовы координаты*. Под *прямоугольными* (или *ортогональными*) координатами мы будем понимать (если противное не оговорено особо) *необобщенные прямоугольные декартовы координаты* [2]).

И в случае декартовых координат общего вида мы будем для точек и векторов применять обозначения

$$M(x, y, z), \quad \mathrm{P}(X, Y, Z), \quad \mathrm{P} = (X, Y, Z).$$

II. ОСНОВНЫЕ АФФИННЫЕ ФОРМУЛЫ

В этом отделе мы выведем несколько основных формул, связанных с представлением векторов и точек при помощи декартовых координат. Все формулы, рассматриваемые в этом отделе, таковы, что они имеют

[1]) Их называют также *аффинными*. Целесообразиость этого термина стаиет понятиой, когда мы будем говорить об аффинных свойствах фигур (см. § 76, замечаине).

[2]) В современной литературе декартовыми координатами часто называют только эти последние (т. е. прямоугольные необобщенные декартовы координаты).

совершенно одинаковый вид как в случае обобщенных декартовых, так и в случае (необобщенных) прямоугольных координат. Как мы увидим ниже, эти формулы выражают так называемые *аффинные свойства фигур*[1]).

Каждую формулу мы будем выводить сперва для общего случая пространства трех измерений, а потом указывать те упрощения, которые произойдут в полученных формулах, если рассматривать фигуры, расположенные в одной и той же плоскости.

Формулы, относящиеся к последнему случаю, т. е. случаю двух измерений, можно выводить или непосредственно, или же получать из общих, полагая в них равными нулю координаты Z или z векторов или точек.

В нижеследующем под словами: *найти вектор* (*или точку*), *дан вектор* (*или точка*), следует понимать: *найти координаты вектора* (*или точки*), *даны координаты вектора* (*или точки*).

34. Координаты суммы данных векторов. Пусть дано несколько векторов

$$\mathbf{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),\quad \mathbf{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2),\ \ldots,\quad \mathbf{P}_n=(X_n,\ Y_n,\ Z_n).$$

Требуется найти сумму $\mathbf{P}$ этих векторов (т. е. найти координаты X, Y, Z вектора $\mathbf{P}$). Имеем (§ 33)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1&=\mathbf{u}X_1+\mathbf{v}Y_1+\mathbf{w}Z_1,\\ \mathbf{P}_2&=\mathbf{u}X_2+\mathbf{v}Y_2+\mathbf{w}Z_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \mathbf{P}_n&=\mathbf{u}X_n+\mathbf{v}Y_n+\mathbf{w}Z_n.\end{aligned}$$

Складывая предыдущие формулы, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{P}=\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\ldots+\mathbf{P}_n=\ &\mathbf{u}(X_1+X_2+\ldots+X_n)+\\ +\mathbf{v}(Y_1+&Y_2+\ldots+Y_n)+\mathbf{w}(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n),\end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает, что искомые координаты X, Y, Z вектора $\mathbf{P}$ даются формулами:

$$\begin{aligned}X&=X_1+X_2+\ldots+X_n,\\ Y&=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n,\\ Z&=Z_1+Z_2+\ldots+Z_n;\end{aligned}$$

словами это можно выразать так: каждая *координата суммы векторов равна сумме соответствующих координат составляющих векторов.*

Тем же путем найдем *разность* двух векторов. Именно, если $\mathbf{Q}=(X, Y, Z)$ есть разность векторов $\mathbf{P}_1=(X_1, Y_1, Z_1)$ и $\mathbf{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2)$, то

$$X=X_1-X_2,\quad Y=Y_1-Y_2,\quad Z=Z_1-Z_2,$$

т. е. каждая координата разности векторов равна разности соответствующих координат уменьшаемого и вычитаемого.

В случае двух измерений координаты (X, Y) суммы векторов $\mathbf{P}_1=(X_1,\ Y_1),\ \ldots,\ \mathbf{P}_n=(X_n,\ Y_n)$ даются, разумеется, теми же форму-

[1]) Об этом будет подробнее сказано в гл. III, § 78.

лами, что и выше (надо только отбросить формулу для Z); то же относится и к разности.

Читателю предлагается доказать полученные здесь формулы, исходя непосредственно из теоремы о проекции суммы (или разности) векторов на данную ось, начав со случая необобщенных координат и перейдя затем к обобщенным.

Упражнения

1. Найти сумму векторов $\mathbf{P}_1 = (3, 1)$; $\mathbf{P}_2 = (0, -1)$ и $\mathbf{P}_3 = (-1, -1)$ (на плоскости).

Ответ. (2, —1).

2. Найти сумму векторов $\mathbf{P}_1 = (3, 1, 2)$, $\mathbf{P}_2 = (3, 3, 3)$ и $\mathbf{P}_3 = (0, 1, 1)$.

Ответ. (6, 5, 6).

3. К материальной точке M приложено n сил:

$$\mathbf{F}_1 = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \mathbf{F}_2 = (X_2, Y_2, Z_2), \ldots, \quad \mathbf{F}_n = (X_n, Y_n, Z_n).$$

Каким условиям должны удовлетворять координаты этих сил для того, чтобы силы уравновешивали друг друга (т. е. чтобы их равнодействующая, равная их сумме, обращалась в нуль)?

Ответ.

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0, \quad Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0, \quad Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0.$$

35. Определение вектора по заданным началу и концу. Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и требуется найти координаты X, Y и Z вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

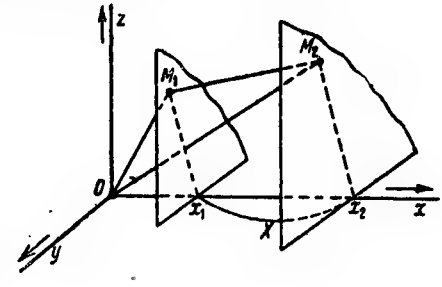
Имеем векторное равенство

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2},$$

откуда $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, т. е. вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ есть разность векторов $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM_1}$. Но мы знаем, что координаты разности равны разностям соответствующих координат уменьшаемого и вычитаемого векторов. С другой стороны, координаты вектора $\overrightarrow{OM_2}$ суть x_2, y_2, z_2, а координаты вектора $\overrightarrow{OM_1}$ суть x_1, y_1, z_1.

Следовательно,

$$X = x_2 - x_1,$$
$$Y = y_2 - y_1,$$
$$Z = z_2 - z_1.$$



Черт. 44.

Словами: *координата X вектора равна абсциссе конца минус абсцисса начала*; аналогично — для координат Y, Z. То же, конечно, относится и к случаю двух измерений.

В случае необобщенных координат справедливость предыдущих формул также непосредственно ясна из черт. 44; переход к обобщенным координатам никакого труда не представляет.

Упражнения

1. Построить на плоскости Oxy точки $A(1, 0)$ и $B(3, 2)$ и проверить на чертеже, что $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$, $\overrightarrow{BA} = (-2, -2)$.

2. Найти вектор $\overrightarrow{AB}$ по его началу $A(3, 3, 2)$ и концу $B(-1, -5, -2)$.

Ответ. $\overrightarrow{AB} = (-4, -8, -4)$.

3. Начало вектора $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ находится в точке $A(x, y, z)$; найтя его конец $B(x_1, y_1, z_1)$.

Ответ. $x_1 = x + X$, $y_1 = y + Y$, $z_1 = z + Z$.

4. Три последовательные вершины параллелограма (на плоскости) суть $A(1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(6, 8)$. Найти четвертую вершину $D(x, y)$.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (4, 9)$. Следовательно (ср. предыдущее упражнение), $x = 1 + 4 = 5$, $y = 1 + 9 = 10$.

36. Координаты произведения вектора и числа. Пусть $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ — данный вектор, а m — данное число; найдем координаты произведения $m\mathbf{P}$. Имеем

$$m\mathbf{P} = m(\mathrm{u}X + \mathrm{v}Y + \mathrm{w}Z) = \mathrm{u}(mX) + \mathrm{v}(mY) + \mathrm{w}(mZ),$$

т. е.

$$m \cdot (X, Y, Z) = (mX, mY, mZ).$$

(Читайте эту формулу так: m, умноженное на вектор с координатами X, Y, Z, равно вектору с координатами mX, mY, mZ.)

В частности, если $m = -1$, получим, что координаты вектора $(-1)\mathbf{P}$, или $(-\mathbf{P})$, равны соответственно, $-X$, $-Y$ и $-Z$. Иными словами, координаты взаимно противоположных векторов $\mathbf{P}$ и $-\mathbf{P}$ равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Это, впрочем, совершенно очевидно из самого определения координат вектора.

В случае двух измерений имеем:

$$m \cdot (X, Y) = (mX, mY).$$

Упражнения и приложения

1. Даны два вектора (на плоскости) $\mathbf{P}_1 = (8, 2)$, $\mathbf{P}_2 = (6, 10)$. Найти вектор $\frac{1}{2}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$.

Ответ. (7, 6).

2. Даны два вектора $\mathbf{P}_1 = (1, 3, 5)$ и $\mathbf{P}_2 = (2, 0, 4)$. Найти вектор $\frac{1}{3}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$.

Ответ. (1, 1, 3).

3. Дана точка $A(5, 4, 3)$. Найти середину отрезка $\overrightarrow{OA}$, где O — начало координат.

Решение. Искомая середина C дается формулой $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$. Следовательно, координаты точки C суть $\frac{5}{2}$, 2, $\frac{3}{2}$.

4. *Центр тяжести* C системы материальных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$,

$M_2(x_2, y_2, z_2)$, . . . , $M_n(x_n, y_n, z_n)$, обладающих массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, определяется формулой:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 + \ldots + m_n\overrightarrow{OM}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m}(m_1\overrightarrow{OM}_1 + \ldots + m_n\overrightarrow{OM}_n),$$

где O — произвольная точка, а m обозначает сумму $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ (см. § 10, упражнение 2). Считая O началом координат, найти координаты центра тяжести.

Решение. Имеем $\overrightarrow{OM}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, . . . , $\overrightarrow{OM}_n = (x_n, y_n, z_n)$. Поэтому

$$m_1\overrightarrow{OM}_1 = (m_1x_1, m_1y_1, m_1z_1), \ldots, \overrightarrow{OM}_n = (m_nx_n, m_ny_n, m_nz_n).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m}(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n, \; m_1y_1 + \ldots + m_ny_n, \; m_1z_1 + \ldots + m_nz_n),$$

откуда, полагая $\overrightarrow{OC} = (x, y, z)$, т. е. обозначая координаты точки C через x, y, z, имеем

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m},$$

$$z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_nz_n}{m}.$$

5. Зная, что центр тяжести двух материальных точек, обладающих равными массами, находится посредине между ними, найти координаты (x, y, z) середины отрезка, соединяющего точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, пользуясь результатом предыдущего упражнения.

Ответ. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

37. Условие параллельности двух векторов. Пусть даны два вектора $\mathbf{P}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ и $\mathbf{P}_2(X_2, Y_2, Z_2)$; требуется найти условия, которым должны удовлетворять координаты этих векторов, для того чтобы они были параллельны.

Если вектор $\mathbf{P}_1 = 0$, т. е. если $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$, то тогда его направление неопределенно и его можно считать параллельным любому направлению, в частности, параллельным вектору $\mathbf{P}_2$.

Пусть теперь $\mathbf{P}_1 \neq 0$. Для того чтобы вектор $\mathbf{P}_2$ был параллелен вектору $\mathbf{P}_1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{P}_2 = k\mathbf{P}_1, \tag{1}$$

где k — некоторое число[1]). Предыдущее условие можно переписать (см. предыдущий параграф) таким образом:

$$X_2 = kX_1, \quad Y_2 = kY_1, \quad Z_2 = kZ_1, \tag{2}$$

или

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}; \tag{3}$$

это и есть искомое *условие параллельности*. Итак, *для параллельности двух векторов необходимо и достаточно, чтобы координаты*

[1]) См. § 33, формула (1).

одного вектора были пропорциональны координатам другого (см. ещё замечание в конце параграфа).

В случае двух измерений условие параллельности выразится так (при $\mathbf{P}_1 \neq 0$):

$$X_2 = kX_1, \quad Y_2 = kY_1, \tag{2a}$$

где k — некоторое число; или

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1}. \tag{3a}$$

Замечание. Если мы говорим, что величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пропорциональны величинам $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (из которых не все равны нулю), это значит, что

$$a_1 = kb_1, \quad a_2 = kb_2, \ldots, \quad a_n = kb_n, \tag{A}$$

где k — некоторое число[1]). Если ни одна из величин $b_1, b_2, \ldots, b_n$ не равна нулю, то это обстоятельство можно записать так:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}. \tag{B}$$

Но если некоторые из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны нулю, например, если не равны нулю $b_1, b_2, \ldots, b_m$, но $b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = b_n = 0$, тогда вместо предыдущей формулы будем иметь на основании (A)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_m}{b_m}, \quad a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_n = 0. \tag{B'}$$

Однако и в этом случае можно сохранить формулу (B), если условиться в следующем правиле: *из формулы* (B) *вычеркиваются те из отношений, знаменатели которых равны нулю, а числители вычеркнутых отношений приравниваются нулю.*

В этом смысле и надо понимать формулу (3), когда одно или два из чисел X_2, Y_2, Z_2 равны нулю (см. упражнения 3 и 4).

Упражнения

1. Доказать, что векторы $\mathbf{P}_1 = (3, 2, 1)$ и $\mathbf{P}_2 = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ параллельны.

2. Доказать, что векторы $\mathbf{P}_1 = (3, 0, 2)$ и $\mathbf{P}_2 = (-6, 0, -4)$ параллельны.

3. Найти условие параллельности векторов $(2, 0, 5)$ и (X, Y, Z).

Ответ. Условие (3) дает

$$\frac{X}{2} = \frac{Y}{0} = \frac{Z}{5}.$$

Эти соотношения следует понимать следующим образом (см. выше, замечание):

$$\frac{X}{2} = \frac{Z}{5}, \quad Y = 0.$$

4. Найти условие параллельности векторов $(3, 0, 0)$ и (X, Y, Z).

Ответ. Применение условия (3) дает

$$\frac{X}{3} = \frac{Y}{0} = \frac{Z}{0}.$$

[1]) Которое может быть и равным нулю.

На основаиии вышеприведевного замечания из этой формулы надо вычеркнуть $\frac{Y}{0}$ и $\frac{Z}{0}$; тогда никакого равенства не остается; приравнивая числители вычеркнутых дробей нулю, получим

$$Y=0, \quad Z=0;$$

это и есть искомое условие параллельности; это очевидно и непосредственно, ибо вектор (3, 0, 0) параллелен оси Ox, а следовательно, и вектор (X, Y, Z) должен быть параллелен этой оси, т. е. $Y=Z=0$, а X — произвольная величиина.

37а. Условие параллельности двух векторов (продолжение). Условие параллельностн двух векторов можно формулировать в более симметричном общем виде, не исключающем случая $\mathbf{P}_1=0$. Именно, легко показать, что для параллельности векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$l\mathbf{P}_1+m\mathbf{P}_2=0, \tag{1}$$

где l и m — числа, *из которых по крайней мере одно отлично от нуля.*

Докажем сперва, что условие (1) достаточно. Пусть (1) имеет место. Так как по условию l и m не равны нулю одновременно, то мы можем, например, считать $m\neq 0$, и тогда (1) дает $\mathbf{P}_2=-\frac{l}{m}\mathbf{P}_1$ или $\mathbf{P}_2=k\mathbf{P}_1$, где $k=-\frac{l}{m}$. Следовательно, $\mathbf{P}_2 \parallel \mathbf{P}_1$, что и требовалось доказать [1]).

Докажем теперь, что условие (1) необходимо. Пусть $\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_2$. Если один из векторов $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ отличен от нуля, например $\mathbf{P}_1\neq 0$, то, как мы уже знаем, $\mathbf{P}_2=k\mathbf{P}_1$, где k — некоторое число; это равенство можно переписать так: $k\mathbf{P}_1+(-1)\mathbf{P}_2=0$. Таким образом мы имеем действительно равенство вида (1) [2]). Если же оба вектора $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ равны нулю, то равенство (1) имеет место при любом выборе l и m. Таким образом предложение доказано.

38. Условие коллинеарности [3]) трех точек. Для того чтобы три точки $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежали на одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ были параллельны (черт. 45). Но

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1);$$

следовательно, на основании результата § 37, условие параллельности этих векторов выразится так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1}$$

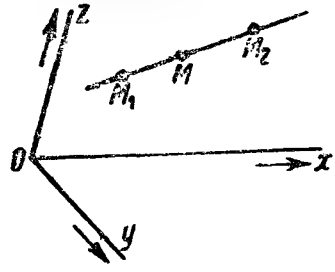
[1]) Заключение справедливо и при $\mathbf{P}_1=0$, ибо вектор, равный нулю, считается параллельным любому вектору.

[2]) В нашем случае $l=k$, $m=-1\neq 0$.

[3]) Точки называются *коллинеарными*, если они расположены на одной и той же прямой. Параллельные свободные векторы также можно иазывать коллиеарными (ср. примечание на стр. 56).

Это и есть *условие коллинеарности трех данных точек в пространстве.*

На плоскости условие коллинеарности трех точек $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ выразится так:



Черт. 45.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2)$$

С целью придать последнему условию более симметричный вид перепишем его так: $(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0$ или, что все равно,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2a)$$

Легко убедиться далее, что определитель в левой части равен определителю

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

взятому с обратным знаком. Действительно, вычитая вторую строку последнего определителя последовательно из первой и третьей строк (что, как известно, не изменяет его значения), получим, что он равен

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, условие (2), или, что то же, условие (2а), можно переписать в следующем, весьма симметричном виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

39. Условие компланарности трех данных векторов. Мы условились (§ 32) называть компланарными свободные векторы, параллельные одной и той же плоскости. Мы знаем, что *два* вектора всегда компланарны. Пусть теперь даны *три* вектора

$$\mathbf{P}_1=(X_1, Y_1, Z_1),\quad \mathbf{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2),\quad \mathbf{P}_3=(X_3, Y_3, Z_3).$$

Если векторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ параллельны, то, очевидно, наши три вектора

компланарны[1]). Предположим теперь, что векторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ непараллельны. Тогда, на основании сказанного в § 33, для компланарности наших трех векторов необходимо и достаточно, чтобы существовали два числа k_1 и k_2 таких, что

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1 k_1 + \mathbf{P}_2 k_2; \qquad (1)$$

действительно, если имеет место предыдущее равенство, то вектор $\mathbf{P}_3$, очевидно, параллелен той же плоскости, что и $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$; обратно, всякий вектор $\mathbf{P}_3$, компланарный с $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, представим формулой (1); см. § 33, формула (5).

Условие (1) компланарности трех векторов может быть представлено в более симметричном и общем виде, пригодном и в том случае, когда векторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ параллельны. А именно, мы докажем, что для компланарности трех векторов $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ необходимо и достаточно существование трех чисел l, m, n, *не равных одновременно нулю*, таких, что

$$l\mathbf{P}_1 + m\mathbf{P}_2 + n\mathbf{P}_3 = 0. \qquad (2)$$

Покажем сперва, что условие (2) достаточно. Действительно, если оно соблюдено, то, предполагая, например $n \neq 0$[2]), можно написать

$$\mathbf{P}_3 = -\frac{l}{n}\mathbf{P}_1 - \frac{m}{n}\mathbf{P}_2 = k_1\mathbf{P}_1 + k_2\mathbf{P}_2,$$

где $k_1 = -\frac{l}{n}$, $k_2 = -\frac{m}{n}$. Это показывает, что вектор $\mathbf{P}_3$ компланарен с векторами[3]) $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$.

Покажем теперь, что условие (2) необходимо, т. е. что оно имеет место всякий раз, когда $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$ компланарны. Действительно, если $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ непараллельны между собой, то мы имеем равенство (1), которое можно переписать и так:

$$k_1\mathbf{P}_1 + k_2\mathbf{P}_2 + (-1)\mathbf{P}_3 = 0,$$

таким образом условие (2) соблюдено (при $l = k_1$, $m = k_2$, $n = -1 \neq 0$). Если же векторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ параллельны, то мы имеем, на основании § 37а, $l\mathbf{P}_1 + m\mathbf{P}_2 = 0$, причем по крайней мере одно из чисел l, m отлично от нуля. Но предыдущее равенство можно переписать и так:

$$l\mathbf{P}_1 + m\mathbf{P}_2 + 0\cdot\mathbf{P}_3 = 0,$$

и мы снова имеем равенство вида (2); в нашем случае $n = 0$.

Итак, необходимость и достаточность условия (1) доказана. Условие это можно переписать так:

$$l\cdot(X_1, Y_1, Z_1) + m\cdot(X_2, Y_2, Z_2) + n\cdot(X_3, Y_3, Z_3) = 0,$$

---

[1]) Чтобы это стало ясным, достаточно представить себе, что $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$ отложены от одной и той же точки.

[2]) По условию, не все три числа l, m, n равны нулю; не нарушая общности, можем считать, например, $n \neq 0$.

[3]) Это заключение остается, очевидно, справедливым и тогда, когда $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ параллельны.

откуда следует

$$\left.\begin{array}{c} lX_1+mY_1+nZ_1=0, \quad lX_2+mY_2+nZ_2=0, \\ lX_3+mY_3+nZ_3=0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Но из теории определителей известно, что для существования чисел l, m, n, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих предыдущей системе уравнений, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Это и есть *условие компланарности трех данных векторов*, выраженное при помощи их координат.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что векторы (3, 5, 8), (1, 4, 1), (4, 9, 9) компланарны.

2. Найти условие, которому должны удовлетворять координаты вектора $\mathbf{P}=(X, Y, Z)$, чтобы он был компланарен с векторами (0, 2, 3) и (3, 0, 1).

Ответ. $2X+9Y-6Z=0$.

3. *Линейно зависимые и независимые векторы.* Векторы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ называются *линейно зависимыми*, если можно найти такие числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$, *не равные одновременно нулю*, что

$$l_1\mathbf{P}_1+l_2\mathbf{P}_2+\ldots+l_n\mathbf{P}_n=0; \tag{5}$$

если же равенство (5) возможно только при $l_1=l_2=\ldots=l_n=0$, то векторы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ называются *линейно независимыми*. Условившись в этих терминах, результаты, полученные в § 37а и в настоящем, можем формулировать так:

Если *два* вектора линейно зависимы, то они параллельны, и обратно.

Если *три* вектора линейно зависимы, то они компланарны, и обратно.

Наконец, легко показать, что всякие *четыре* вектора линейно зависимы. Действительно, если среди векторов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$, например, первые три линейно независимы (и, значит, некомпланарны), то мы имеем (§ 33)

$$\mathbf{P}_4=k_1\mathbf{P}_1+k_2\mathbf{P}_2+k_3\mathbf{P}_3,$$

где k_1, k_2, k_3 — некоторые числа. Это равенство можно переписать так:

$$k_1\mathbf{P}_1+k_2\mathbf{P}_2+k_3\mathbf{P}_3+(-1)\mathbf{P}_4=0,$$

т. е. наши четыре вектора линейно зависимы. Если же первые три вектора линейно зависимы, то мы имеем

$$l\mathbf{P}_1+m\mathbf{P}_2+n\mathbf{P}_3=0,$$

причем l, m, n не равны нулю одновременно. Но предыдущее равенство можно переписать так:

$$l\mathbf{P}_1+m\mathbf{P}_2+n\mathbf{P}_3+0\cdot\mathbf{P}_4=0,$$

т. е. и в этом случае наши четыре вектора линейно зависимы.

Вообще, если среди n векторов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ имеется m векторов ($m\leqslant n$) линейно зависимых, то и все n векторов линейно зависимы. Например, если линейно зависимы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_m$, то мы имеем $l_1\mathbf{P}_1+\ldots+l_m\mathbf{P}_m=0$, где не все $l_1, \ldots, l_m$ равны нулю. Но это равенство можно написать и так:

$$l_1\mathbf{P}_1+\ldots+l_m\mathbf{P}_m+0\cdot\mathbf{P}_{m+1}+\ldots+0\cdot\mathbf{P}_n=0,$$

откуда и следует наше утверждение.

В частности, из предыдущего следует, что всякие n векторов при $n\geqslant 4$ линейно зависимы.

40. Условие компланарности четырех данных точек. Точки называются *компланарными*, если они расположены на одной и той же плоскости. Две или три точки всегда компланарны. Для того чтобы четыре точки $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ были компланарны, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ были компланарны [1]). Замечая, что

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1), \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1),$$

и применяя к этим векторам условие (4) предыдущего параграфа, получим

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0; \tag{1}$$

это и есть условие компланарности четырех данных точек. Условие это можно переписать в более симметричном виде (ср. § 38). Именно, его можно написать так:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Действительно, если вычесть вторую строку последнего определителя последовательно из первой, третьей и четвертой строк, получим в левой части

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

что совпадает с левой частью (1).

41. Деление отрезка в данном отношении. Разделить отрезок M_1M_2 прямой Δ, проходящей через данные точки M_1 и M_2, в данном отношении λ, — это значит найти на прямой Δ такую точку M, чтобы [2]) (черт. 45, стр. 66)

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2} \tag{1}$$

(обратите внимание на порядок букв, который не безразличен). Легко видеть, что если $\lambda > 0$, то точка M должна находиться между точками

[1]) Конечно, вместо этих векторов можно взять векторы $\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_3}$ и т. д.

[2]) В сущности, условие, чтобы точка M лежала на прямой Δ, само собой вытекает из условия (1).

M_1 и M_2, так как в этом случае векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ должны иметь одинаковые направления[1]); если же $\lambda < 0$, то точка M должна находиться на Δ вне отрезка M_1M_2, так как в этом случае векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ должны иметь противоположные направления[2]) (составьте чертежи для случаев, когда $-1 < \lambda < 0$ и когда $\lambda < -1$).

Предложим себе найти точку $M(x, y, z)$, когда даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и число λ.

По условию имеем

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda \cdot (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z),$$

т. е.

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

откуда сразу находим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

В частности, для *координат середины отрезка* M_1M_2 получим (в этом случае $\lambda = 1$)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \tag{3}$$

т. е. *эти координаты суть средние арифметические координат концов отрезка.*

В случае двух измерений вместо формул (2) получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{2a}$$

Замечание. Формулы (2) теряют смысл при $\lambda = -1$. Легко видеть, что если λ остается отличным от -1, но стремится к этому значению, то точка M уделяется в бесконечность. Это следует как из формул (2), так и из геометрического значения величины λ.

Упражнения и приложения

1. Найти середину отрезка, соединяющего точки (0, 1, 0) и (−3, 1, 2).

Ответ. $\left(-\frac{3}{2}, 1, 1\right)$.

2. На прямой, проходящей через точки $A(0, 0)$ и $B(2, 2)$ (на плоскости), найти точку M, делящую AB в отношении $\lambda = -\frac{1}{2}$, и проверить на чертеже справедливость результата.

3. Даны две точки $A(2, 3, 6)$ и $B(5, 2, 8)$. Найти на прямой AB точку C такую, чтобы B была серединой отрезка AC (*указание*: задача сводится к делению отрезка AB в отношении $\lambda = -2$).

Ответ. (8, 1, 10).

4. Даны две смежные вершины $A(2, 5)$ и $B(6, 6)$ параллелограма (на пло-

---

[1]) В этом случае говорят о „внутреннем разделении".

[2]) „Внешнее разделение".

скости), а также точка пересечения $K(3, 8)$ диагоналей. Найти остальные вершины.

Ответ. (4, 11) и (0, 10).

4а. Даны две смежные вершины $A(1, 3, -3)$ и $B(2, -5, 5)$ параллелограма и точка $K(1, 1, 1)$ пересечения диагоналей. Найти остальные вершины.

Ответ. (1, —1, 5) и (0, 7, —3).

5. Найти на прямой, проходящей через точки $M_1(1, 2)$ и $M_2(4, 3)$, такую точку M, чтобы отношение *длин* отрезков $|M_1M|$ и $|MM_2|$ равнялось 2, т. е. чтобы $|M_1M| = 2|MM_2|$; [обратить внимание на разницу между последней формулой и формулой (1)].

Два ответа: $M\left(3, \frac{8}{3}\right)$ и $M(7, 4)$.

6. На одной из медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$, найти точку M, делящую ее в отношении $\lambda = 2$ (считая от вершины треугольника). Доказать, что эта точка принадлежит также двум другим медианам и делит их в том же отношении.

Решение. Рассмотрим медиану AD, где D — середина стороны BC. Координаты D суть $\frac{x_2+x_3}{2}$, $\frac{y_2+y_3}{2}$. Следовательно, координаты точки $M(x, y)$ будут

$$x = \frac{x_1 + 2\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Симметрия этих выражений показывает, что мы получим ту же точку, рассматривая две другие медианы. Точка пересечения медиан треугольника называется *центром тяжести площади данного треугольника*[1]).

7. Найти центр тяжести $M(x, y, z)$ площади треугольника, вершины которого суть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ (см. предыдущее упражнение).

Ответ. $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$, $z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.

8. Доказать, что прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести площадей противоположных граней, пересекаются в одной точке M и что эта точка M делит каждый из отрезков упомянутых прямых, заключенный между вершиной и противоположной гранью, в отношении $\lambda = 3$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству подобного предложения для медиан треугольника (см. упражнение 6). Точка M называется *центром тяжести объема данного тетраэдра*. Координаты ее будут

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \quad z = \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4},$$

где (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) — координаты вершин тетраэдра.

9. Доказать, что центр тяжести объема тетраэдра совпадает с центром тяжести четырех одинаковых материальных точек[2]), расположенных в вершинах тетраэдра. Доказать аналогичное предложение для треугольника.

10. Пользуясь тем, что центр тяжести двух материальных точек делит соединяющий их отрезок на части, обратно пропорциональные массам, вывести формулы (2) из формул для координат центра тяжести (§ 36, упражнение 4).

---

[1]) Он совпадает с центром тяжести (в обычном, механическом, значении этого слова) бесконечно тонкой однородной пластинки, имеющей форму рассматриваемого треугольника.

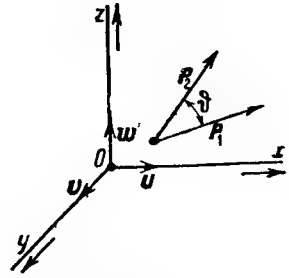
[2]) См. § 36, упражнение 4.

III. ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

В этом отделе мы выведем те основные формулы, вид которых изменяется при переходе от прямоугольных координат к декартовым координатам общего вида. Эти формулы выражают так называемые *метрические свойства* фигур. (Пояснение этого термина и более точное его определение будет дано ниже, в § 78). Так как подобные формулы, вообще говоря, значительно упрощаются при применении прямоугольных координат, то мы в этом отделе будем считать координаты прямоугольными.

42. Скалярное произведение двух векторов (черт. 46). Начнем с рассмотрения скалярных произведений ортов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ осей координат. По самому определению скалярного произведения имеем[1])

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{w}^2 = 1 \tag{1}$$



Черт. 46.

и

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) представляют собою „таблицу умножения“ ортов осей координат.

Пусть даны два вектора $\mathbf{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ и $\mathbf{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ и требуется найти их скалярное произведение $\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2$.

Мы решим эту задачу двумя способами, одинаково простыми.

Первый способ. Имеем

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{u}X_1 + \mathbf{v}Y_1 + \mathbf{w}Z_1, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{u}X_2 + \mathbf{v}Y_2 + \mathbf{w}Z_2.$$

На основании доказанного в § 22, для получения искомого произведения достаточно перемножить правые части, как обыкновенные многочлены, и результаты сложить. Так как произведения различных ортов равны нулю, то остается перемножить только члены, содержащие одинаковые орты, что дает

$$\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2 = \mathbf{u}^2X_1X_2 + \mathbf{v}^2Y_1Y_2 + \mathbf{w}^2Z_1Z_2,$$

или, принимая во внимание (1),

$$\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{3}$$

Эта формула является одной из основных формул векторной алгебры.

Второй способ. Имеем

$$\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2 = (\mathbf{u}X_1 + \mathbf{v}Y_1 + \mathbf{w}Z_1)\cdot\mathbf{P}_2 = X_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{P}_2) + Y_1(\mathbf{v}\cdot\mathbf{P}_2) + Z_1(\mathbf{w}\cdot\mathbf{P}_2).$$

Но (§ 23)

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{P}_2 = \mathrm{пр}_x\mathbf{P}_2 = X_2; \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{P}_2 = Y_2; \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{P}_2 = Z_2;$$

подставляя эти значения в предыдущую формулу, снова получим (3).

В случае двух измерений для скалярного произведения векторов $\mathbf{P}_1 = (X_1, Y_1)$ и $\mathbf{P}_2 = (X_2, Y_2)$ получим

$$\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2. \tag{3a}$$

[1]) Имеем, например, $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1\cdot1\cdot\cos 0 = 1$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 1\cdot1\cdot\cos 90^\circ = 0$.

43. Длина вектора; углы, составляемые вектором с осями координат; расстояние между двумя точками. Пусть дан вектор $\mathbf{P}(X, Y, Z)$; требуется найти его длину $|\mathbf{P}|$ и углы α, β, γ, которые он составляет с осями координат (черт. 47)[1].

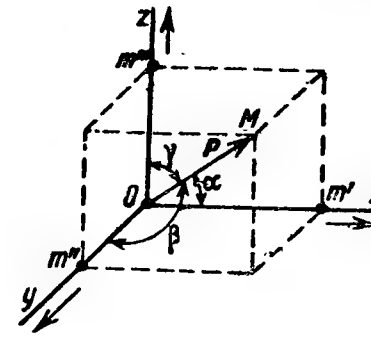
Для вычисления длины воспользуемся формулой (3) предыдущего параграфа, в которой возьмем $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}$. Так как в нашем случае $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}^2 = |\mathbf{P}|^2$, то упомянутая формула дает

$$|\mathbf{P}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad (1)$$

или

$$|\mathbf{P}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (2)$$

Читателю предлагается вывести эту же формулу, пользуясь теоремой элементарной геометрии о квадрате длины диагонали прямоугольного параллелепипеда.



Черт. 47.

Для вычисления углов α, β, γ вектора $\mathbf{P}$ с осями координат достаточно заметить, что

$$X = \text{пр}_x \mathbf{P} = |\mathbf{P}| \cos\alpha, \quad Y = |\mathbf{P}| \cos\beta, \quad Z = |\mathbf{P}| \cos\gamma, \qquad (3)$$

откуда, приннмая во внимание (2), получаем

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Формулы (1)—(4) — одни из основных формул векторной алгебры.

Возводя равенства (4) в квадрат и складывая, получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1,$$

т. е.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1; \qquad (5)$$

это — весьма важная формула, связывающая углы, составляемые с осями координат любым вектором (илн направлением).

В случае двух измерений (черт. 48) будем иметь, в частности,

$$|P| = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad (2a)$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \qquad (4a)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \qquad (5a)$$

Чтобы найти *расстояние r между двумя точками* $M_1(x_1, y_1, z_1)$

[1]) На этом чертеже вектор P для наглядностн изображен приложенным к вачалу координат, что не нарушает общности.

и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (черт. 49), достаточно применить формулу (2) к вектору

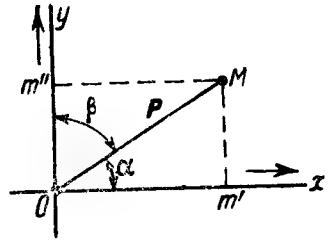
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1),$$

что дает

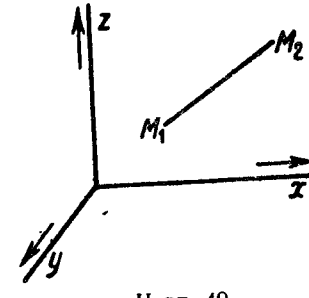
$$r = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}; \qquad (6)$$

в частности, для *расстояния точки* $M(x, y, z)$ *до начала координат* (черт. 47) имеем

$$r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (7)$$



Черт. 48.



Черт. 49.

В случае двух измерений получим соответственно

$$r = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (6а)$$

$$r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (7а)$$

(Постройте соответствующие чертежи!)

Упражнения

1. Найти длину вектора $\mathbf{P} = (2, -1)$ (на плоскости) и углы, которые он составляет с осями координат.

Ответ. $|\mathbf{P}| = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Найти расстояние между точками $M_1(3, 2, 0)$ и $M_2(4, -2, -2)$ и углы, которые вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ составляет с осями координат.

Ответ. $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{21}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{21}}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{21}}$.

3. Дан (на плоскости) треугольник с вершинами $A(1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(5, 6)$. Найти длину медианы стороны AB.

Ответ. 5.

4. Вершины треугольника суть $A(0, 0)$, $B(3, 4)$, $C(0, 2)$. Найти точку M пересечения биссектрисы внутреннего угла A со стороною BC. (Как известно из элементарной геометрии, точка M делит сторону BC на части, пропорциональные длинам $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{AC}|$.)

Ответ. $M\left(\frac{6}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

5. Найти координаты вектора **P** (в пространстве), если известно, что длина его равна 10, а углы, которые он составляет с осями Ox, Oy, равны 60° каждый [воспользуйтесь формулами (3) и (5)].

Ответ. $(5, 5, 5\sqrt{2})$ или $(5, 5, -5\sqrt{2})$.

6. Найти вектор $\mathbf{P}=(X, Y, Z)$ длины $|\mathbf{P}|=10$, параллельный вектору $(3, -1, 3)$.

Ответ. $X=\pm\frac{30}{\sqrt{19}}$, $Y=\mp\frac{10}{\sqrt{19}}$, $Z=\pm\frac{30}{\sqrt{19}}$.

(Одновременно берутся или верхние, или нижние знаки.)

44. Координаты орта. Косинусы направления. Пусть **e** обозначает орт, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через l, m, n координаты орта **e** так, что

$$\mathbf{e}=(l, m, n). \tag{1}$$

Формула (1) предыдущего параграфа дает (если принять во внимание, что $|\mathbf{e}|=1$)

$$l^2+m^2+n^2=1, \tag{2}$$

а формулы (3) того же параграфа обращаются в следующие:

$$\left.\begin{aligned} l&=\cos\alpha,\\ m&=\cos\beta,\\ n&=\cos\gamma,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где α, β и γ обозначают углы, составляемые ортом с осями координат.

Если подставим последние выражения в предыдущую формулу, получим

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{4}$$

т. е. формулу, уже выведенную раньше иным путем [предыдущий параграф, формула (5)].

Всякий орт, как известно, характеризует определенное направление в пространстве. Поэтому величины l, m и n мы будем называть также *координатами направления*, или, принимая во внимание формулы (3), *косинусами направления*.

Косинусы (или координаты) направления не независимы между собой, а всегда связаны соотношением (2).

Легко видеть, что, обратно, любые три величины l, m, n, снязанные соотношением (2), представляют собою косинусы некоторого направления. Действительно, вектор $\mathbf{e}=(l, m, n)$ есть орт, так как его длина равна единице в силу соотношения (2). Поэтому l, m, n являются косинусами направления, характеризуемого этим ортом.

Замечание. И в случае декартовых координат общего вида мы будем называть координаты l, m, n орта **e** координатами направления. Надо, однако, заметить, что в этом случае нет особой выгоды пользоваться ортом вместо вектора произвольной длины.

Считаем полезным подчеркнуть, что в общем случае координаты направления l, m, n не совпадают с косинусами направления $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, где α, β, γ обозначают углы орта **e** с осями координат (см. § 57).

45. Угол между двумя векторами (направлениями). Пусть даны два вектора (черт. 50)

$$\mathbf{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2);$$

требуется найти угол ϑ между ними.

На основании определения скалярного произведения имеем:

$$\cos\vartheta=\frac{\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_1|\cdot|\mathbf{P}_2|}. \tag{1}$$

Подставляя сюда значения [§ 42, формула (3) и § 43, формула (2)]

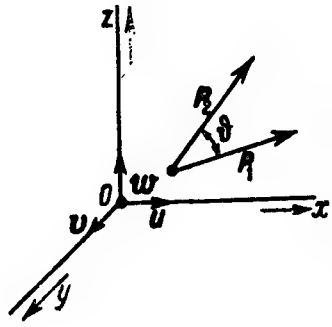
$$\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$

$$|\mathbf{P}_1|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2},$$

$$|\mathbf{P}_2|=\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2},$$

получим важную формулу

$$\cos\vartheta=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{2}$$



Черт. 50.

Если вместо произвольных векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ взять орты $\mathbf{e}_1=(l_1,\ m_1,\ n_1)$ и $\mathbf{e}_2=(l_2,\ m_2,\ n_2)$, то предыдущая формула обратится в следующую:

$$\cos\vartheta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2, \tag{3}$$

дающую возможность вычислить угол ϑ между двумя направлениями, если даны косинусы этих направлений (т. е. величины l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2). В частности, если направления $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ совпадают, предыдущая формула обращается в уже известную нам формулу (мы полагаем $l_1=l_2=l$, $m_1=m_2=m$, $n_1=n_2=n$)

$$l^2+m^2+n^2=1.$$

В случае двух измерений для угла между векторами $\mathbf{P}_1=(X_1,\ Y_1)$ и $\mathbf{P}_2=(X_2,\ Y_2)$ получим формулу

$$\cos\vartheta=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}, \tag{2a}$$

а для угла между двумя направлениями, координаты которых суть $(l_1,\ m_1)$ и $(l_2,\ m_2)$, — формулу

$$\cos\vartheta=l_1l_2+m_1m_2. \tag{3a}$$

Упражнения

1. Найти угол ϑ между векторами $\mathbf{P}=(1,\ -1)$ и $\mathbf{Q}=(-2,\ 6)$ (на плоскости).

Ответ. $\cos\vartheta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Найти угол ϑ между векторами $\mathbf{P}=(6,\ 8)$ и $\mathbf{Q}=(-8,\ 6)$.

Ответ. $\vartheta=\frac{\pi}{2}$.

3. Найти угол между векторами (1, 2, 2) и $(-1, 0, 1)$.

Ответ. $\cos\vartheta = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

4. Проверить, что угол между векторами (1, 2, 3) и (2, 4, 6) равен нулю.

5. Найти (на плоскости) вектор $\mathbf{P} = (X, Y)$ длины 2, составляющий угол $\vartheta = 60°$ с вектором $\mathbf{Q} = (3, 4)$.

Ответ. X и Y определяются из системы уравнений:

$$\frac{3X + 4Y}{5 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad X^2 + Y^2 = 4,$$

откуда

$$X = \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{5}, \quad Y = \frac{4 \mp 3\sqrt{3}}{5}.$$

Объяснить, почему получилось два решения.

46. Условие перпендикулярности двух векторов (направлений). Для того чтобы два вектора были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно условие (§ 22)

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 0,$$

которое дает [§ 42, формула (3)]

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0; \tag{1}$$

это и есть *условие перпендикулярности двух векторов*, выраженное аналитически. (Это условие также вытекает из рассмотрения формулы для $\cos\vartheta$ предыдущего параграфа.) В частности, если длины векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ равны единице, то при обозначениях предыдущего параграфа последняя формула дает *условие перпендикулярности двух направлений*

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0, \tag{2}$$

выраженное при помощи косинусов направлений.

В случае двух измерений вместо (1) и (2) получим соответственно:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0, \tag{1a}$$

и

$$l_1l_2 + m_1m_2 = 0. \tag{2a}$$

Упражнения и дополнения

1. Показать, что (на плоскости) векторы $\mathbf{P}(X, Y)$ и $Q(-Y, X)$ всегда взаимно перпендикулярны.

2. Найти вектор $\mathbf{P} = (X, Y)$ (на плоскости) длины 5, перпендикулярный вектору $\mathbf{Q} = (1, 2)$.

Ответ. $X = \pm 2\sqrt{5}$, $Y = \mp\sqrt{5}$.

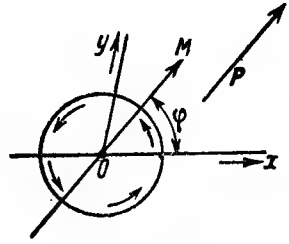
3. Показать, что координаты вектора $\mathbf{P} = (X, Y)$, перпендикулярного к данному вектору $\mathbf{Q}_0(X_0, Y_0)$, всегда могут быть представлены в виде

$$X = -mY_0, \quad Y = mX_0,$$

где m — некоторое число (см. упражнение 1).

47. Определение направления на плоскости. Вместо того чтобы вводить в рассмотрение два угла (α и β), которые вектор (или вообще направление) составляет с осями координат Ox и Oy, можно ограни-

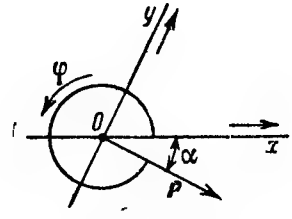
читься одним только углом. Но для этого необходимо предварительно условиться относительно *положительного направления вращения на плоскости Oxy. Условие, которое мы сейчас примем* раз навсегда, *относится как к случаю прямоугольных, так и к случаю декартовых координат общего вида и его следует хорошо запомнить.*



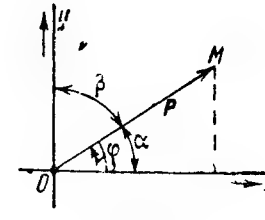
Черт. 51.

Условимся прежде всего в следующем. Пусть на плоскости даны два непараллельных вектора **u**, **v**. Под *направлением вращения, определяемым на плоскости этими векторами, рассматриваемыми в указанном порядке*, будем подразумевать то, которое ведет кратчайшим путем (т. е. путем поворота на угол, меньший π) от направления первого вектора к направлению второго.

За положительное направление на плоскости *Oxy* мы всегда будем принимать направление, определяемое координатными векторами **u**, **v** осей *Ox*, *Oy*. Иными словами, положительное направление вращения на плоскости *Oxy* есть то, в котором надо повернуть *Ox* на угол, меньший π, для того, чтобы привести ее в совпадение с осью *Oy* [1]). На черт. 51 положительное направление вращения отмечено кружком со стрелками.



Черт. 52.



Черт. 53.

Пусть $\mathbf{P}$ — некоторый вектор на плоскости *Oxy*; перенесем его в положение $\overrightarrow{OM}$ так, чтобы его начало совпадало с началом координат (черт. 51), и обозначим через φ угол, на который надо повернуть ось *Ox* в положительном направлении, для того, чтобы ее направление совпало с напранлением $\mathbf{P} = \overrightarrow{OM}$. Ясно, что этот угол φ вполне определяет направление данного вектора; этот угол мы часто будем обозначать символом $\widehat{Ox, \mathbf{P}}$, где на первое место станится направление, от которого отсчитывается угол. Углу φ можно приписывать и значения, большие 2π, как это делается в тригонометрии. Одному и тому же напранлению на плоскости соответствует бесчисленное множество значений угла φ, отличающихся друг от друга на величину вида $2k\pi$, где k — целое число.

---

[1]) Две оси считаются совпадающими только тогда, когда совпадают их положительные направления.

Действительно, сколько бы раз мы ни повернули данное направление на угол 2π (полный оборот), мы опять вернемся к прежнему.

Заметим, что угол φ можно отсчитывать от оси Ox и в отрицательном направлении, но зато приписать этому углу отрицательные значения (как это делается в тригонометрии).

Прибавим еще, что определенный таким образом угол φ не всегда совпадает с углом α между вектором $\mathbf{P}$ и осью Ox, определенным согласно нашим прежним условиям относительно угла между двумя направлениями. Это происходит от разницы в условиях относительно отсчета углов α и φ. Именно, угол α есть, по условию, положительный угол, не превосходящий π, тогда как угол φ может принимать любые значения, в частности, — и отрицательные. Например, в случае, изображенном на черт. 52, угол φ не равен α; а именно, углу φ можно приписать значения $(-\alpha)$ или $2\pi-\alpha$, или, общее, $-\alpha+2k\pi$.

Вернемся теперь к случаю прямоугольных координат (черт. 53).

Легко видеть, что в этом случае всегда будем иметь

$$\cos\alpha=\cos\varphi,\quad \cos\beta=\sin\varphi, \tag{1}$$

где α и β попрежнему обозначают углы (заключенные между 0 и π), которые вектор $\mathbf{P}$ составляет с осями Ox и Oy; эти формулы справедливы, в какой бы четверти ни заключался угол φ [1]).

Соответственно этому для координат X и Y вектора $\mathbf{P}$ получим выражения:

$$X=|\mathbf{P}|\cos\varphi,\quad Y=|\mathbf{P}|\sin\varphi, \tag{2}$$

где, как всегда,

$$|\mathbf{P}|=\sqrt{X^2+Y^2}. \tag{3}$$

Отсюда выводим

$$\cos\varphi=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}; \tag{4}$$

разделив второе из этих равенств на первое, получим еще

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Y}{X}. \tag{5}$$

Формулы (4) позволяют вполне определить угол φ (если не считать слагаемого вида $2k\pi$, не имеющего никакого влияния на направление), когда даны координаты вектора. Для вычисления φ достаточно воспольз-

[1]) Читатель легко проверит, что, считая φ заключенным между 0 и 2π, будем иметь

в первой четверти $\alpha=\varphi,\ \beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$,

во второй четверти $\alpha=\varphi,\ \beta=\varphi-\frac{\pi}{2}$,

в третьей четверти $\alpha=2\pi-\varphi,\ \beta=\varphi-\frac{\pi}{2}$,

в четвертой четверти $\alpha=2\pi-\varphi,\ \beta=2\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$.

зоваться одной только из этих формул, например формулой для $\sin\varphi$; эта формула, однако, не вполне определяет направление вектора. Чтобы оно было вполне определенным, надо знать еще *знак* другой какой-либо тригонометрической функции угла φ, например знак $\cos\varphi$. Проще всего по знакам X и Y (которые совпадают со знаками $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$) определять четверть, в которой находится направление $\mathbf{P}$, а вычисление при помощи таблиц производить по одной из формул (4) или (5). Например, если $X=+2$, $Y=-2$, то искомое направление находится в четвертой четверти. Так как, далее,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2}{+2}=-1,$$

то ясно, что $\varphi=-45^\circ$ или же, что все равно, $\varphi=360^\circ-45^\circ=315^\circ$.

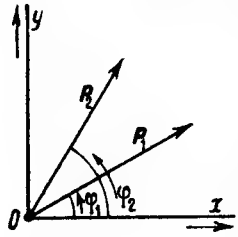
Когда длина рассматриваемого вектора равна единице, т. е. когда мы имеем дело с ортом $\mathbf{e}$, то координаты (l и m) его являются в то же время косинусами направления (см. § 44); формулы (1) настоящего параграфа дают для этого случая

$$l=\cos\varphi,\quad m=\sin\varphi. \tag{6}$$

Соотношение $l^2+m^2=1$, связывающее эти величины, сводится, таким образом, к известному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1.$$

48. Определение угла между двумя направлениями на плоскости, когда углу приписывается знак. Пусть даны на плоскости Oxy два вектора $\mathbf{P}_1=(X_1,\ Y_1)$ и $\mathbf{P}_2=(X_2,\ Y_2)$.



Черт. 54.

Относительно угла между двумя векторами (или вообще направлениями) на данной плоскости мы примем теперь условие, аналогичное тому, которое было принято в предыдущем параграфе относительно угла φ данного вектора с осью Ox; именно, мы будем отсчитывать этот угол в положительном направлении от одного из данных векторов (или вообще направлений). Мы будем допускать отсчет и в отрицательном направлении, но при условии приписывать углу в этом случае отрицательные значения. Если угол отсчитывается от направления $\mathbf{P}_1$, то мы его будем обозначать символом $\widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}$, ставя на первое место вектор, от которого отсчитывается угол.

Найдем теперь угол между $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Обозначим для этого через φ_1 и φ_2 углы, составляемые этими векторами с осью Ox (см. предыдущий параграф). Ясно тогда, что (черт. 54)

$$\widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}=\varphi_2-\varphi_1$$

(если, конечно, не считать слагаемого $2k\pi$, которое можно, ничего не изменяя, прибавить к правой части предыдущего равенства). Обозначая для краткости угол $\widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}$ через φ, будем иметь

$$\cos\varphi=\cos(\varphi_2-\varphi_1),\quad \sin\varphi=\sin(\varphi_2-\varphi_1),$$

откуда, принимая во внимание, что

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\cos\varphi_2\cos\varphi_1+\sin\varphi_2\sin\varphi_1,$$
$$\sin(\varphi_2-\varphi_1)=\sin\varphi_2\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\sin\varphi_1$$

и что

$$\cos\varphi_1=\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}},\quad \sin\varphi_1=\frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}}$$

(и аналогично для $\cos\varphi_2$, $\sin\varphi_2$), получим окончательно

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2}},\tag{1}$$

$$\sin\varphi=\frac{X_1Y_2-X_2Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}.\tag{2}$$

Разделив равенство (2) на (1), получим еще

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{X_1Y_2-X_2Y_1}{X_1X_2+Y_1Y_2}.\tag{3}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что правая часть формулы (1) симметрична относительно координат обоих векторов, тогда как правые части формул (2) и (3) изменяют знак на обратный, если поменять ролями векторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$. Этого надо было ожидать, так как ясно, что

$$\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_1}=-(\widehat{\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2})+2k\pi,$$

а потому

$$\cos\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_1}=\cos\widehat{\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2}$$

и

$$\sin\widehat{\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_1}=-\sin\widehat{\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2}.$$

Формулы (1) и (2) вполне определяют угол φ (если, конечно, не считать слагаемого, кратного 2π). Для действительного вычисления φ можно с удобством воспользоваться формулой (3), четверть же определить по знакам $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, которые совпадают соответственно со знаками выражений:

$$X_1X_2+Y_1Y_2\quad\text{и}\quad X_1Y_2-X_2Y_1.$$

Упражнения

1. Вывести условие перпендикулярности двух векторов на плоскости, исходя из формул (1) или (3).

2. Найти вектор $\mathbf{P}=(X, Y)$ длины 2, составляющий угол $\widehat{\mathbf{Q},\mathbf{P}}=+60°$ с вектором $\mathbf{Q}=(3, 4)$ (ср. упражнение 5 в конце § 45).

Решение. Для решения можно воспользоваться результатом упомянутого упражнения, подобрав знаки так, чтобы $\sin\widehat{\mathbf{Q},\mathbf{P}}$ был положительным, т. е. так, чтобы $3Y-4X>0$; из этого следует, что необходимо взять нижние знаки в формулах упомянутого упражнения.

Можно решить задачу и непосредственно, найдя угол $\varphi+60°$, который вектор $\mathbf{P}$ составляет с осью Ox, где φ есть угол $\widehat{Ox,\mathbf{Q}}$. Имеем

$$\cos(\varphi+60°)=\cos\varphi\cdot\cos 60°-\sin\varphi\cdot\sin 60°,$$
$$\sin(\varphi+60°)=\sin\varphi\cdot\cos 60°+\cos\varphi\cdot\sin 60°,$$

но

$$\cos\varphi = \frac{3}{5}, \quad \sin\varphi = \frac{4}{5}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$\cos(\varphi + 60^\circ) = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}, \quad \sin(\varphi + 60^\circ) = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10};$$

наконец,

$$X = 2\cos(\varphi + 60^\circ) = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{5},$$

$$Y = 2\sin(\varphi + 60^\circ) = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{5}.$$

Если бы мы предположили, что $\widehat{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} = -60^\circ$, тогда мы получили бы формулы, соответствующие верхним знакам в упомянутом выше упражнении.

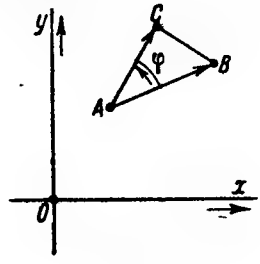
49. Площадь треугольника, построенного на двух векторах, исходящих из одной точки. Пусть $\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{AB} = (X_1, Y_1)$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{P}_2 = (X_2, Y_2)$ — данные векторы с общим началом A (черт. 55a, 55b).

Соединив концы B и C, мы получим треугольник ABC. Найдем площадь S этого треугольника. По известной формуле имеем

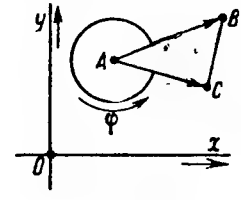
$$S = \frac{1}{2}|\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2| \cdot \sin\varphi, \tag{1}$$

где φ обозначает угол $\widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}$.

В сущности, вместо $\sin\varphi$ следовало бы написать $|\sin\varphi|$, так как $\sin\varphi$ может принимать и отрицательные значения. Однако удобнее пользоваться формулой (1) в том виде, как она написана. Эта формула (1) приписывает площади треугольника ABC определенный знак. Легко убедиться, что знак этот согласуется с нижеприводимым правилом, которое мы и примем: *площадь треугольника положительна, если направление вращения*[1]), *определяемое векторами* $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$, *совпадает с положительным направлением вращений на плоскости Oxy*; в противном случае площадь отрицательна.



Черт. 55a.



Черт. 55b.

Легко также видеть, что, согласно этому правилу, площадь будет положительной, если, описывая периметр треугольника в направлении $ABCA$, мы вращаемся на плоскости Oxy в положительном направлении (черт. 55a); в противоположном случае площадь будет отрицательной (черт. 55b).

---

[1]) См. § 47.

Подставляя теперь в формулу (1) вместо $\sin\varphi$ выражение (2) предыдущего параграфа, получим весьма важную формулу

$$S=\frac{1}{2}(X_1Y_2-X_2Y_1), \tag{2}$$

справедливую по величине и по знаку.

Эту формулу можно представить при помощи определителя так:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Для *площади параллелограма*, построенного на двух векторах $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, будем, очевидно, иметь формулу

$$S=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}; \tag{4}$$

эта формула также приписывает площади определенный знак, согласно указанному правилу.

50. Площадь треугольника, заданного тремя вершинами. Пусть даны три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Требуется найти площадь S треугольника ABC. При этом предполагается, что периметр треугольника ABC обходится в направлении $ABCA$, и в соответствии с этим площади приписывается определенный знак (см. предыдущий параграф).

Искомая площадь есть площадь, построенная на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, как в предыдущем параграфе.

В нашем случае

$$X_1=x_2-x_1, \quad Y_1=y_2-y_1,$$
$$X_2=x_3-x_1, \quad Y_2=y_3-y_1.$$

Подставляя эти значения в формулу (2) предыдущего параграфа, получим

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Этой формуле можно придать весьма симметричный вид, а именно

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}; \tag{2}$$

чтобы в этом убедиться, достаточно преобразовать предыдущий определитель (ср. § 38), вычитая первую строку последовательно из второй и третьей.

Из предыдущей формулы можно вывести условие коллинеарности трех точек на плоскости, выражаемое формулой (3) § 38; действительно, для коллинеарности трех точек, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $S=0$, что и приводит к упомянутой формуле. Однако, последний вывод — менее общий, чем прежний, ибо в § 38 координаты не предполагались прямоугольными.

Упражнения

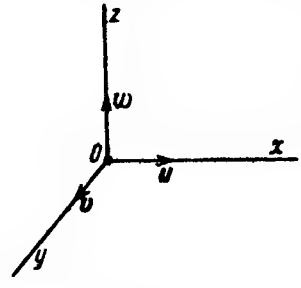
1. Найти площадь треугольника, имеющего вершинами $A(1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(2, 2)$.

Ответ. $S = -\frac{1}{2}$.

2. Найти длину h высоты треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(4, 4)$, соответствующей вершине A.

Ответ. $h = \frac{2|S|}{|BC|} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

51. Векторное произведение двух данных векторов. В этом параграфе мы будем считать, что оси координат Ox, Oy, Oz, взятые в указанном порядке, составляют *левую систему* [1]) (§ 24). На основании самого определения векторного произведения (§ 25) имеем следующую „таблицу умножения" ортов (черт. 56):



Черт. 56.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{w} = 0, \qquad (1)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}. \qquad (2)$$

Достаточно запомнить, кроме формул (1) еще первую из формул (2); остальные получаются из нее круговой перестановкой.

К формулам (2) можно присоединить следующие:

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{w} = -\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{w}. \qquad (2a)$$

Найдем теперь векторное произведение двух данных векторов

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{u}X_1 + \mathbf{v}Y_1 + \mathbf{w}Z_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{u}X_2 + \mathbf{v}Y_2 + \mathbf{w}Z_2.$$

Перемножая векторно правые части (см. конец § 25) и принимая во внимание (1) и (2), легко получим

$$\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 = \mathbf{u}(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) + \mathbf{v}(Z_1X_2 - Z_2X_1) + \mathbf{w}(X_1Y_2 - X_2Y_1). \qquad (3)$$

Итак, если $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ обозначает векторное произведение векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, то

$$X = Y_1Z_2 - Y_2Z_1, \quad Y = Z_1X_2 - Z_2X_1, \quad Z = X_1Y_2 - X_2Y_1. \qquad (4)$$

Легче всего запомнить формулу (3) и вытекающие из нее формулы (4), если заметить, что формула (1) может быть написана так:

$$\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

[1]) Вообще, когда мы будем иметь дело с векторным произведением, мы всегда будем предполагать систему координат левой. Однако все выводимые формулы останутся справедливыми и для правой системы, если только заменить требование c) в определении векторного произведения (§ 25) требованием, чтобы векторы P, Q, R составляли правую систему.

в чем мы убеждаемся, разлагая последний определитель по элементам последней строки.

Упражнения и приложения

1. Найти векторное произведение векторов (6, 4, 5) и (— 3, 2, 1).

Ответ. (— 6, — 21, 24).

2. Найти площадь треугольника, две стороны которого суть данные векторы $\mathbf{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, начала которых совпадают.

Решение. Если S есть искомая площадь, то $S = \frac{1}{2}|\mathbf{R}|$, где $\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$. Так как $|\mathbf{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, где X, Y, Z даются формулами (4), получим

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)^2 + (Z_1X_2 - Z_2X_1)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2}.$$

3. Найти площадь треугольника по заданным вершинам

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad C(x_3, y_3, z_3).$$

Решение. Для получения требуемого выражения достаточно заметить, что задача сводится к предыдущей, если, например, положить

$$\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \mathbf{P}_2 = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

4. Пользуясь определением векторного произведения и формулами (4), найти выражение для $\sin\vartheta$, где ϑ — угол, заключенный между двумя данными векторами.

Решение. Имеем

$$\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 = |\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2| \cdot \sin\vartheta,$$

откуда

$$\sin\vartheta = \frac{\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2|} = \frac{\sqrt{(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)^2 + (Z_1X_2 - Z_2X_1)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2}}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

5. Пользуясь соотношением $\cos^2\vartheta = 1 - \sin^2\vartheta$, вышеприведенным выражением для $\sin\vartheta$ (см. предыдущее упражнение), и выражением для $\cos\vartheta$, полученным в § 45 [формула (2)], доказать *тождество Эйлера-Лагранжа:*

$$(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)(X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2) - (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2)^2 =$$
$$= (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)^2 + (Z_1X_2 - Z_2X_1)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2,$$

справедливое для всякой совокупности шести величин $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2$.

6. Найти проекции на оси координат [1]) векторного момента $\mathbf{L}$ вектора $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$, приложенного к точке $A(x, y, z)$, относительно точки $C(a, b, c)$.

Решение. Имеем, по определению (§ 25, упражнение 1),

$$\mathbf{L} = \overrightarrow{CA} \times \mathbf{P}.$$

Обозначим через L_x, L_y, L_z искомые проекции; замечая, что $\overrightarrow{CA} = (x-a, y-b, z-c)$ и применяя формулы (4), получаем

$$\left.\begin{aligned} L_x &= (y-b)Z - (z-c)Y, \quad L_y = (z-c)X - (x-a)Z, \\ L_z &= (x-a)Y - (y-b)X. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

[1]) Мы не называем проекции вектора $\mathbf{L}$ на оси координат его координатами, так как $\mathbf{L}$ — вектор связанный и для его определения необходимо задать не только его проекции на оси координат, но и точку приложения.

52. Смешанное произведение трех векторов. Объем параллелепипеда. Вычислим теперь смешанное произведение $[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3]$ трех векторов (см. § 26):

$$\mathbf{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \mathbf{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2), \quad \mathbf{P}_3 = (X_3, Y_3, Z_3).$$

По определению (§ 26) имеем, если положим временно,

$$\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 = \mathbf{P} = (X, Y, Z),$$
$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3] = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_3 = XX_3 + YY_3 + ZZ_3,$$

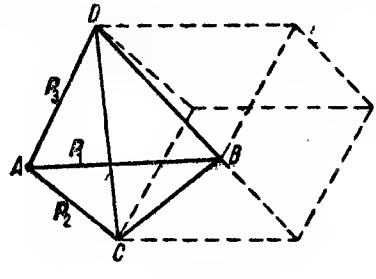
откуда, замечая, что X, Y, Z суть алгебраические дополнения элементов последней строки определителя (5) предыдущего параграфа, заключаем, что правая часть предыдущего равенства получается заменой элементов последней строки этого определителя на X_3, Y_3, Z_3. Следовательно, имеем важную формулу

$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3] = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Мы знаем (§ 26), что объем V параллелепипеда, построенного на трех векторах $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, проведенных из общего начала, равен смешанному произведению этих векторов. Следовательно, по предыдущей формуле

$$V = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Эта формула, как мы знаем, приписывает объему определенный знак. Именно, на основании сказанного в § 26 ясно, что $V > 0$, если векторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, в указанном порядке, также ориентированы (в смысле правой или левой системы), как координатные векторы. В противном случае $V < 0$.



Черт. 57.

Вычислим теперь объем тетраэдра $ABCD$, построенного на наших трех векторах (черт. 57). Этот объем V' равен шестой части объема V параллелепипеда, построенного на тех же трех векторах, ибо $V = S \cdot h$, где S — площадь параллелограма, построенного на векторах $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, а $V' = \frac{1}{3} S'h'$, где S' — площадь треугольника, построенного на тех же векторах; h обозначает перпендикуляр, опущенный из вершины D на противоположную грань. Следовательно,

$$V' = \frac{1}{6}[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Если мы не хотим приписывать объему знак, то должны брать абсолютное значение правой части.

Из предыдущей формулы можно снова вывести условие компланарности трех векторов (см. § 39). Действительно, условие это, очевидно, сводится к условию $V=0$, что снова приводит к формуле (4) упомянутого параграфа. Однако полученный там результат является более общим, так как тогда мы не предполагали координаты прямоугольными.

Упражнения и дополнения.

1. Доказать, исходя из формулы (1), свойства, выражаемые формулами (3), (3а) § 26.

2. Найти выражение для скалярных моментов вектора $\mathbf{P}=(X, Y, Z)$, приложенного к точке $A(x, y, z)$ относительно осей координат (см. § 26, упражнение 2).

Решение можно получить по формуле (6) § 51 (упражнение 6), взяв за точку C (§ 26, упражнение 2) начало координат и замечая, что, по самому определению скалярного момента относительно оси, искомые моменты суть как раз L_x, L_y, L_z. Это дает

$$L_x=yZ-zY, \quad L_y=zX-xZ, \quad L_z=xY-yX.$$

Предоставляем читателю вывести эти же формулы из формулы (1) этого параграфа.

3. Доказать, пользуясь формулой (2) и правилом умножения определителей, что

$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3]^2=\begin{vmatrix} \mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3]^2=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Применяя правило умножения определителей и произведя умножение по строкам, получим

$$[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3]^2= \\ =\begin{vmatrix} X_1^2+Y_1^2+Z_1^2 & X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 & X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3 \\ X_2X_1+Y_2Y_1+Z_2Z_1 & X_2^2+Y_2^2+Z_2^2 & X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3 \\ X_3X_1+Y_3Y_1+Z_3Z_1 & X_3X_2+Y_3Y_2+Z_3Z_2 & X_3^2+Y_3^2+Z_3^2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

откуда и следует требуемая формула.

4. Пользуясь формулой (4) предыдущего упражнения, доказать формулу

$$V^2=|\mathbf{P}_1|^2\cdot|\mathbf{P}_2|^2\cdot|\mathbf{P}_3|^2\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

где V обозначает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, и λ, μ, ν обозначают соответственно углы между $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_3$ и $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$.

5 *Синус Штаудта.* Площадь параллелограма, построенного на двух ортах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, проведенных из одного начала, равна

$$|\mathbf{e}_1|\cdot|\mathbf{e}_2|\sin\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}=\sin\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2},$$

По аналогии с этим объем параллелепипеда (снабженный знаком), построенного на трех ортах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, проведенных из одного начала, можно назвать синусом трехгранного угла, определяемого этими ортами (синус Штаудта). На основании предыдущего он равен смешанному произведению $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$. Из формулы предыдущего упражнения вытекает, что квадрат этого сивуса равен

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

53. Объем тетраэдра, заданного координатами вершин. Если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ — координаты вершин тетраэдра (черт. 57), то, очевидно, объем его V получится из формулы (3) предыдущего параграфа, если положить

$$\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{P}_2 = \overrightarrow{AC}, \quad \mathbf{P}_3 = \overrightarrow{AD}.$$

Следовательно, будем иметь

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

или (см. аналогичное преобразование в § 40)

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Из этой формулы можно снова получить условие компланарности четырех точек, выведенное иным путем в § 40 (ср. предыдущий параграф).

IV. ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В ОБЩИХ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ [1])

В этом отделе мы обобщим некоторые из формул предыдущего отдела на случай декартовых координат общего вида. Понятие „ковариантных координат“ (заимствованное из современного тензорного исчисления), которое будет введено в следующем параграфе, позволит представить результаты в виде значительно более простом, чем это обычно делалось в курсах аналитической геометрии.

54. Ковариантные и контравариантные декартовы координаты. В основу определения координат X, Y, Z вектора $\mathbf{P}$ (§ 33) нами было положено разложение

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z,$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — координатные векторы. В случае прямоугольных координат,

[1]) При первом чтении отдел IV (§ 54—57) можно опустить.

когда в качестве координатных векторов берутся взаимно перпендикулярные орты, определенные таким образом координаты суть, попросту, алгебраические значения прямоугольных проекций вектора $\mathbf{P}$ на оси координат и могут быть представлены в виде скалярных произведений (§ 31)

$$X = \mathbf{u}\cdot\mathbf{P}, \quad Y = \mathbf{v}\cdot\mathbf{P}, \quad Z = \mathbf{w}\cdot\mathbf{P}. \tag{1}$$

Если эти последние формулы положить в основу обобщения на случай произвольных (разумеется, некомпланарных) координатных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, то естественно придем к рассмотрению величин

$$X^* = \mathbf{u}\cdot\mathbf{P}, \quad Y^* = \mathbf{v}\cdot\mathbf{P}, \quad Z^* = \mathbf{w}\cdot\mathbf{P}. \tag{2}$$

В случае прямоугольной системы величины X^*, Y^*, Z^* сводятся к обычным координатам X, Y, Z, но в общем случае этого совпадения нет, ибо на основании самого определения

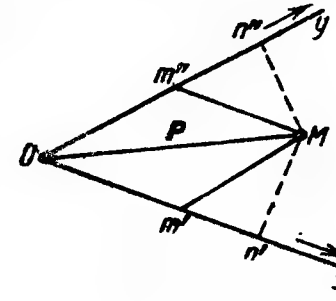
$$X^* = |\mathbf{u}|\cdot \mathrm{пр}_x \mathbf{P}, \quad Y^* = |\mathbf{v}|\cdot \mathrm{пр}_y \mathbf{P}, \quad Z^* = |\mathbf{w}|\cdot \mathrm{пр}_z \mathbf{P}, \tag{3}$$

где подразумеваются *прямоугольные* проекции, тогда как величины X, Y, Z даются формулами (см. § 33)

$$X = \mathrm{пр}_x \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{u}|}, \quad Y = \mathrm{пр}_y \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{v}|}, \quad Z = \mathrm{пр}_z \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{w}|},$$

где подразумеваются *проекции, взятые параллельно соответствующим плоскостям координат* [1]).

Тем не менее, величины X^*, Y^*, Z^* также можно назвать координатами вектора $\mathbf{P}$, ибо их задание вполне определяет вектор $\mathbf{P}$ (и обратно), в чем читатель может легко убедиться сам, на основании простых геометрических соображений [2]). Для различения двух родов координат — X, Y, Z и X^*, Y^*, Z^* — первые мы будем называть *обычными* или *контравариантными* координатами, а вторые — *ковариантными* [3]). *Во всем дальнейшем, говоря просто о координатах, мы всегда будем подразумевать контравариантные, т. е. обычные координаты.*



Черт. 58.

Совершенно аналогично определяются ковариантные координаты *в случае двух измерений*. На черт. 58 изображен этот случай. Если считать, что координаты необобщенные (т. е. что $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$), тогда на чертеже

$$X = Om', \quad Y = Om'', \quad X^* = On' \quad Y^* = On''.$$

В общем же случае

$$X = \frac{Om'}{|\mathbf{u}|}, \quad Y = \frac{Om''}{|\mathbf{v}|}, \quad X^* = On'\cdot|\mathbf{u}|, \quad Y^* = |On''|\cdot|\mathbf{v}|.$$

---

[1]) В § 33 эти проекции обозначены через Om', Om'', Om'''.

[2]) Если заданы X^*, Y^*, Z^*, то этим самым заданы прямоугольные проекции вектора $\mathbf{P}$ на оси координат.

[3]) Происхождение этих терминов будет объяснено в § 68.

И в случае одного измерения, конечно, можно рассматривать ковариантную координату

$$X^* = |\mathbf{u}| \cdot P,$$

где $|\mathbf{u}|$ — длина координатного вектора, а P — алгебраическое значение вектора $\mathbf{P}$ по оси координат.

Ковариантные координаты *точки*, которые мы будем обозначать через x^*, y^*, z^*, определяются, как соответствующие ковариантные координаты радиуса-вектора этой точки относительно начала координат.

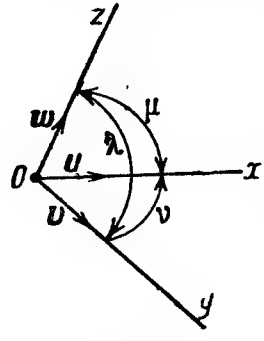
55. Зависимость между ковариантными и контравариантными координатами. Обозначим соответственно через λ, μ, ν углы между осями Oy и Oz, Oz и Ox, Ox и Oy (черт. 59).

Для упрощения письма введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}^2 = g_{11}, \quad \mathbf{v}^2 = g_{22}, \quad \mathbf{w}^2 = g_{33}, \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = g_{23}, \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = g_{31}, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = g_{12}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} g_{11} = |\mathbf{u}|^2, \quad g_{22} = |\mathbf{v}|^2, \quad g_{33} = |\mathbf{w}|^2, \\ g_{23} = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cos\lambda, \quad g_{31} = |\mathbf{w}|\cdot|\mathbf{u}|\cos\mu, \quad g_{12} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cos\nu. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$



Черт. 59.

Величины g_{11}, g_{22}, ... и т. д. суть скаляры, вполне определенные, когда заданы длины координатных векторов и углы между ними. В случае прямоугольных координат

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0,$$

и формулы (1) сводятся к „таблице скалярного умножения“ ортов осей координат (§ 42). В общем случае формула (1) дает таблицу скалярного умножения координатных векторов, если под g_{11}, g_{22} и т. д. подразумевать величины (2).

В случае двух измерений у нас будут только три величины:

$$g_{11} = |\mathbf{u}|^2, \quad g_{22} = |\mathbf{v}|^2, \quad g_{12} = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\nu. \tag{2a}$$

Возвращаясь к общему случаю, выведем зависимость между контравариантными и ковариантными координатами данного вектора $\mathbf{P}$. По определению

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z,$$

где X, Y, Z — контравариантные координаты. Отсюда для ковариантной координаты X^* получим

$$X^* = \mathbf{u}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}X + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}Y + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}Z$$

или, на основании (1),

$$\left.\begin{aligned} X^* = g_{11}X + g_{12}Y + g_{13}Z, \\ Y^* = g_{21}X + g_{22}Y + g_{23}Z, \\ Z^* = g_{31}X + g_{32}Y + g_{33}Z; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

две последние формулы написаны по аналогии с первой; руководствуясь

соображениями симметрии, мы иногда пишем g_{21} вместо g_{12} и т. д. (вообще мы условимся считать, что g_{ik} и g_{kl} обозначают, в нашем случае, одни и те же величины). Формулы (3) дают выражения ковариантных координат через контравариантные. Для получения выражений контравариантных координат через ковариантные достаточно решить систему уравнений (3) относительно X, Y, Z. Такое решение всегда возможно, так как определитель

$$G=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \end{vmatrix} \tag{4}$$

отличен от нуля. Действительно, на основании формулы (4) § 52 (упражнение 3) $G=[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]^2=V^2$, где V — объем параллелепипеда, построенного на координатных векторах (§ 26); этот объем отличен от нуля, так как, по условию, координатные векторы не компланарны.

Решая систему (3) по правилам теории определителей (см. Добавление, § 3), получим

$$\left.\begin{aligned} X&=g_{11}^*X^*+g_{12}^*Y^*+g_{13}^*Z^*,\\ Y&=g_{21}^*X^*+g_{22}^*Y^*+g_{23}^*Z^*,\\ Z&=g_{31}^*X^*+g_{32}^*Y^*+g_{33}^*Z^*, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$g_{ik}^*=\frac{G_{ik}}{G}(i,\ k=1,\ 2,\ 3), \tag{6}$$

причем G_{ik} обозначает алгебраическое дополнение [1]) элемента g_{ik} определителя G. Совершенно такие же формулы имеют, конечно, место и для координат точки.

В случае двух измерений получим аналогично

$$X^*=g_{11}X+g_{12}Y,\quad Y^*=g_{21}X+g_{22}Y; \tag{3a}$$

$$X=g_{11}^*X^*+g_{12}^*Y^*,\quad Y=g_{21}^*X^*+g_{22}^*Y^*. \tag{5a}$$

В этом случае определитель

$$G=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} |\mathbf{u}|^2 & |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\nu \\ |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\nu & |\mathbf{v}|^2 \end{vmatrix}=|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\sin^2\nu \tag{4a}$$

и, как легко подсчитать,

$$\left.\begin{aligned} g_{11}^*&=\frac{1}{|\mathbf{u}|^2\sin^2\nu},\quad g_{22}^*=\frac{1}{|\mathbf{v}|^2\sin^2\nu},\\ g_{12}^*&=g_{21}^*=-\frac{\cos\nu}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\sin^2\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

[1]) Определитель G симметричен ($g_{ik}=g_{ki}$); поэтому $G_{ik}=G_{ki}$.

Упражнения и дополнения

1. Написать формулу (3) для случая необобщенных декартовых координат.

Ответ.

$$X^* = X + Y\cos\nu + Z\cos\mu,$$
$$Y^* = X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda,$$
$$Z^* = X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z.$$

2. Найти выражения для коэфициентов g^*_{ik} формулы (5) в случае необобщенных координат.

Ответ.

$$g_{11} = \frac{\sin^2\lambda}{G}, \quad g_{22} = \frac{\sin^2\mu}{G}, \quad g_{33} = \frac{\sin^2\nu}{G},$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda}{G}, \quad g_{31} = g_{13} = \frac{\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu}{G},$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu}{G},$$

где

$$G = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

56. Выражения для скалярного произведения двух векторов, длины вектора, расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями. Пусть $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ — два вектора, заданные своими контравариантными координатами

$$(X_1, Y_1, Z_1) \quad \text{и} \quad (X_2, Y_2, Z_2).$$

Вычислим их скалярное произведение. Имеем

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = (\mathbf{u}X_1 + \mathbf{v}Y_1 + \mathbf{w}Z_1) \cdot \mathbf{P}_2,$$

откуда, вспоминая, что $\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_2 = X_2^*$ и т. д., получим

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1X_2^* + Y_1Y_2^* + Z_1Z_2^*. \tag{1}$$

Таким же образом можно получить

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1^*X_2 + Y_1^*Y_2 + Z_1^*Z_2. \tag{1a}$$

В случае прямоугольных координат $X_1^* = X_1$ и т. д., и обе предыдущие формулы обращаются в ранее выведенную.

В случае двух измерений имеем

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1X_2^* + Y_1Y_2^* = X_1^*X_2 + Y_1^*Y_2. \tag{2}$$

Для длины вектора $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ получаем, полагая в (1) или в (1a) $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}$, формулу

$$|\mathbf{P}|^2 = XX^* + YY^* + ZZ^*. \tag{3}$$

Внося сюда выражения для X^*, Y^*, Z^* из формул (3) предыду-

щего параграфа, получим выражение для $|\mathbf{P}|^2$ через обычные (контравариантные) координаты

$$|\mathbf{P}|^2 = g_{11}X^2 + g_{22}Y^2 + g_{33}Z^2 + 2g_{23}YZ + 2g_{31}ZX + 2g_{12}XY. \quad (4)$$

Мы видим, что $|\mathbf{P}|^2$ есть *квадратичная форма*[1]) трех переменных X, Y, Z, и так как, далее, $|\mathbf{P}|^2$ — величина всегда положительная, за исключением случая, когда $X = Y = Z = 0$, то эта квадратичная форма — положительная [2]), притом неособенная [т. е. дискриминант [3]) ее отличен от нуля]. Последнее следует также из того, что упомянутый дискриминант есть не что иное, как определитель формулы (4) предыдущего параграфа.

Можно показать, что, обратно, если произвольно задана неособенная положительная квадратичная форма переменных X, Y, Z, то всегда существует система декартовых координат, в которой квадрат длины вектора выражается этой формой; см. ниже, § 67,2°.

Квадрат длины вектора можно также просто выразить через ковариантные координаты. А именно, поступая совершенно так же, как при выводе формулы (4), получим

$$|\mathbf{P}|^2 = g^*_{11}X^{*2} + g^*_{22}Y^{*2} + g^*_{33}Z^{*2} + 2g^*_{23}Y^*Z^* + 2g^*_{31}Z^*X^* + 2g^*_{12}X^*Y^*. \quad (5)$$

Иногда удобно иметь выражение для $|\mathbf{P}|^2$ через X^*, Y^*, Z^*, где фигурируют величины g_{ik}, а не g^*_{ik}; для получения этого выражения достаточно в предыдущую формулу внести вместо g^*_{ik} их выражения через g_{ik}. Однако для этого проще поступить так: по формулам (3) предыдущего параграфа и по формуле (3) настоящего

$$\begin{aligned} g_{11}X + g_{12}Y + g_{13}Z &= X^*, \\ g_{21}X + g_{22}Y + g_{23}Z &= Y^*, \\ g_{31}X + g_{32}Y + g_{33}Z &= Z^*, \\ X^*X + Y^*Y + Z^*Z &= |\mathbf{P}|^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что три величины X, Y, Z удовлетворяют четырем предыдущим линейным уравнениям. А это, как известно, возможно только тогда, когда определитель, составленный из всех коэфициентов этих уравнений, равен нулю, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & X^* \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & Y^* \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & Z^* \\ X^* & Y^* & Z^* & |\mathbf{P}|^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Разлагая определитель по элементам, скажем, последней строки, получим один член вида: $G \cdot |\mathbf{P}|^2$ и члены, содержащие квадраты и произведения величин X^*, Y^*, Z^*; перенеся эти последние в правую часть и

---

[1]) Определение этого термина см. в Добавлении, § 10.
[2]) См. Добавление, § 12.
[3]) См. Добавление, § 10.

разделив обе части на G (мы знаем, что $G \neq 0$), получим искомое выражение для $|\mathbf{P}|^2$ в виде квадратичной формы переменных X^*, Y^*, Z^*.

В случае двух измерений вместо (4) и (6) получим соответственно:

$$|\mathbf{P}|^2 = g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2 = \\ = |\mathbf{u}|^2 X^2 + 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\nu XY + |\mathbf{v}|^2 Y^2 \tag{4a}$$

и

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & X^* \\ g_{21} & g_{22} & Y^* \\ X^* & Y^* & |\mathbf{P}|^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{6a}$$

откуда

$$|\mathbf{P}|^2 \sin^2\nu = \frac{X^{*2}}{|\mathbf{u}|^2} - \frac{2X^*Y^*}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\cos\nu + \frac{Y^{*2}}{|\mathbf{v}|^2}. \tag{6b}$$

Из полученных различных формул, выражающих длину вектора, непосредственно получаются выражения для расстояния между двумя точками M_1 (x_1, y_1, z_1) и M_2 (x_2, y_2, z_2); для этого в правые части надо подставить

$$X = x_2 - x_1, \quad X^* = x_2^* - x_1^* \text{ и т. д.}$$

Для угла ϑ между двумя векторами $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ имеем формулу

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{|\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2|} = \frac{X_1X_2^* + Y_1Y_2^* + Z_1Z_2^*}{|\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_2|}, \tag{7}$$

где

$$|\mathbf{P}_1| = \sqrt{X_1X_1^* + Y_1Y_1^* + Z_1Z_1^*}, \quad |\mathbf{P}_2| = \sqrt{X_2X_1^* + Y_2Y_2^* + Z_2Z_2^*}.$$

Аналогичная формула имеет место и для случая двух измерений.

Упражнения и дополнения

1. Написать формулы, выражающие скалярное произведение двух векторов и длину вектора через контравариантные координаты на плоскости, в случае необобщенных координат.

Ответ.

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\cos\nu,$$
$$|\mathbf{P}|^2 = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\nu.$$

2. То же для пространства.

Ответ.

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 + (Y_1Z_2 + Y_2Z_1)\cos\lambda + \\ + (Z_1X_2 + Z_2X_1)\cos\mu + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\cos\nu.$$

$$|\mathbf{P}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda + 2ZX\cos\mu + 2XY\cos\nu.$$

3. Написать формулы, выражающие $|\mathbf{P}|^2$ через ковариантные координаты на плоскости, в случае необобщенных координат.

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & X^* \\ \cos\nu & 1 & Y^* \\ X^* & Y^* & |\mathbf{P}|^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$|\mathbf{P}|^2 \sin^2\nu = X^{*2} + Y^{*2} - 2X^*Y^*\cos\nu.$$

4. То же для пространства.

Ответ.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & X^* \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & Y^* \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & Z^* \\ X^* & Y^* & Z^* & |\mathbf{P}|^2 \end{vmatrix} = 0.$$

57. Координаты и косинусы направления в необобщенных косоугольных координатах. Обобщим формулы и понятия, введенные в § 44 на случай косоугольных необобщенных координат (читатель легко выведет аналогичные формулы и для общего случая).

Пусть $\mathbf{e}$ обозначает орт, определяющий некоторое направление. Обозначим контравариантные координаты этого орта попрежнему через l, m, n, так что

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}l + \mathbf{v}m + \mathbf{W}n; \tag{1}$$

величины l, m, n мы будем называть *обычными*, или *контравариантными*, координатами направления [1]). Ковариантные же координаты орта $\mathbf{e}$ обозначим через l^*, m^*, n^*; эти величины мы будем называть *ковариантными координатами направления*. Ясно, что

$$l^* = \cos\alpha, \quad m^* = \cos\beta, \quad n^* = \cos\gamma, \tag{2}$$

где α, β, γ обозначают углы, составляемые ортом $\mathbf{e}$ с осями координат. Следовательно, косинусы направления суть ковариантные координаты соответствующего орта; они не совпадают (как было уже сказано в § 44), в случае косоугольных координат, с обычными (контравариантными) координатами направления (l, m, n). А именно, величины l^*, m^*, n^* связаны с величинами l, m, n теми же соотношениями (3) или (5) § 55, что и ковариантные и контравариантные координаты любого вектора.

Из соотношения $\mathbf{e}^2 = 1$ следует, на основании формулы (3) предыдущего параграфа, соотношение

$$ll^* + mm^* + nn^* = 1, \quad \text{или} \quad l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma = 1, \tag{3}$$

которое заменяет соотношение $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, или $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, имеющее место в случае прямоугольных координат.

Если мы выразим соотношение (3) при помощи только обычных координат направления, то получим, на основании формулы упражнения 2 предыдущего параграфа:

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos\lambda + 2nl\cos\mu + 2lm\cos\nu = 1; \tag{4}$$

если же выразить это соотношение только через ковариантные координаты (т. е. косинусы направления), получим, на основании формулы упражнения 4 того же параграфа:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & l^* \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & m^* \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & n^* \\ l^* & m^* & n^* & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

[1]) Когда мы в дальнейшем будем говорить просто о координатах направления, то всегда будем подразумевать обычные (контравариантные) координаты.

Ясно, что соотношение (4) является и достаточным для того, чтобы l, m, n были контравариантными координатами некоторого направления, а соотношение (5) — для того, чтобы l^*, m^*, n^* были косинусами некоторого направления (ср. конец § 44).

В случае двух измерений вместо (4) и (5) будем иметь соответственно

$$l^2 + m^2 + 2lm\cos\nu = 1, \tag{4a}$$

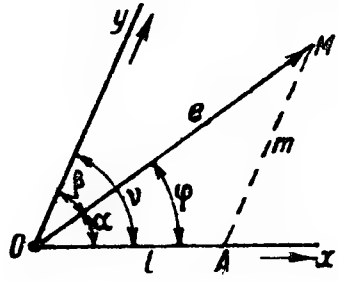
и (ср. формулу упражнения 3 предыдущего параграфа)

$$l^{*2} + m^{*2} - 2l^*m^*\cos\nu = \sin^2\nu, \tag{5a}$$

или, что все равно:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\nu = \sin^2\nu. \tag{5b}$$

В этом случае (двух измерений) можно, как было сказано в § 47, для определения направления на плоскости пользоваться одним углом φ, который данное направление составляет с осью Ox и который отсчитывается от оси Ox по правилу, принятому в упомянутом параграфе (черт. 60).



Черт. 60.

Легко видеть, что $\cos\alpha = \cos\varphi$, $\cos\beta = \cos(\nu - \varphi)$. Таким образом ковариантные координаты рассматриваемого направления будут:

$$l^* = \cos\varphi, \quad m^* = \cos(\nu - \varphi). \tag{6}$$

Легко убедиться, рассматривая треугольник OAM черт. 60 ($\overrightarrow{OM} = \mathrm{e}$), что для обычных координат направления будем иметь

$$l = \frac{\sin(\nu - \varphi)}{\sin\nu}, \quad m = \frac{\sin\varphi}{\sin\nu}; \tag{7}$$

другой вывод этих же формул см. в упражнении (1).

Упражнения и дополнения

1. Вывести формулы (7), исходя из формул (5а) и (6а) § 55 и из формул (6) настоящего параграфа.

Решение. На основании упомянутых формул имеем

$$l = \frac{1}{\sin^2\nu}[\cos\varphi - \cos(\nu - \varphi)\cos\nu],$$

$$m = \frac{1}{\sin^2\nu}[-\cos\varphi\cos\nu + \cos(\nu - \varphi)],$$

или, после разложения $\cos(\nu - \varphi)$ и некоторых упрощений:

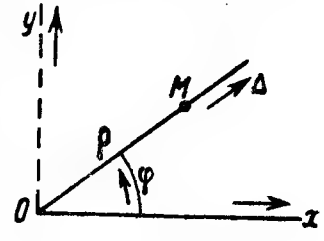
$$l = \frac{\sin(\nu - \varphi)}{\sin\nu}, \quad m = \frac{\sin\varphi}{\sin\nu}.$$

2. Вывести соотношение (5а) непосредственно из формул (6) путем элементарных тригонометрических преобразований.

V. РАЗЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Кроме декартовых координат существует еще бесчисленное множество других. Мы подробно рассмотрим только некоторые из них, а именно, — системы полярных координат на плоскости и в пространстве и систему полуполярных (или цилиндрических) координат. Относительно остальных систем мы ограничимся краткими замечаниями общего характера. При этом мы будем рассматривать только координаты точки.

58. Система полярных координат на плоскости. В этой системе основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение любой фигуры на плоскости, являются точка O, называемая *полюсом*, и ось Ox, называемая *полярною осью* (черт. 61).



Черт. 61.

Пусть M — любая точка на плоскости, не совпадающая с O. Обозначим через ρ длину радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, а через φ — угол, составляемый им с полярною осью, отсчитываемый от этой оси и снабженный определенным знаком [1]), так что, согласно нашим обозначениям,

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|, \quad \varphi = \widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}. \tag{1}$$

Очевидно, величины ρ и φ вполне определяют положение точки M на плоскости; они называются *полярными координатами точки* M. (Если точка M совпадает с полюсом O, то $\rho = 0$, а угол φ — неопределенный.)

Точку M, имеющую полярными координатами ρ и φ, мы будем обозначать так: $M(\rho, \varphi)$. Согласно общепринятой терминологии ρ называется радиусом-вектором точки M; правильнее было бы говорить „длина радиуса-вектора“, но ради краткости мы будем часто опускать слово „длина“ там, где не может возникнуть недоразумения. Угол φ мы будем называть *полярным углом* [2]).

Ясно, что для получения всех точек плоскости достаточно изменять ρ в пределах $(0, \infty)$, а углу φ придавать значения, заключенные между 0 и 2π (не включая верхнего предела); однако часто удобно вовсе не вводить последнего ограничения. Значения угла φ, соответствующие одной и той же точке, очевидно, отличаются друг от друга на кратное 2π.

59. Обобщение. Кроме только что указанной системы часто удобно пользоваться и несколько более общей, в которой ρ принимает также и отрицательные значения.

Пусть (черт. 61) Δ обозначает ось, проходящую через полюс O и точку M. Этой оси можно придать произвольное положительное направление (от 0 к M или от M к 0). Обозначим теперь через φ угол

---

[1]) Таким образом предполагается, что на плоскости выбрано определенное положительное направление вращения.

[2]) Кроме этого термина употребляются еще названия: *аномалия, амплитуда, азимут* и др.

$\widehat{Ox, \Delta}$, составляемый осью Δ с полярною осью Ox, а через ρ — алгебраическое значение $\overrightarrow{OM}$ по оси Δ. Очевидно, что, как и в предыдущем случае, величины ρ и φ вполне определяют положение точки M на плоскости.

(Если за положительное направление оси Δ выбрано такое, которое ведет от O к M, то указанные величины совпадают с величинами ρ и φ предыдущего параграфа.)

Так как одному и тому же положению точки M соответствуют два прямо противоположных направления оси Δ, то значения полярного угла

$$\varphi = \widehat{Ox, \Delta},$$

соответствующие одной и той же точке, могут отличаться на кратное π. Ясно, что если ρ и φ обозначают полярные координаты какой-либо точки M, то координаты $(-\rho)$ и $\varphi + \pi$ будут координатами той же самой точки [1]).

Указанную в этом параграфе систему координат в отличие от предыдущей мы будем называть *обобщенной системой полярных координат*.

60. Преобразование полярных координат на плоскости в декартовы. Для перехода от полярных координат к декартовым и обратно, достаточно иметь формулы, дающие возможность переходить от данной полярной системы к какой-либо одной системе декартовых координат, ибо в следующей главе будут выведены формулы, позволяющие переходить от данной системы декартовых координат к любой другой. Поэтому мы ограничимся здесь выводом формул перехода от полярных координат к прямоугольным декартовым, началом которых служит полюс O, осью Ox — полярная ось, а осью Oy — ось, перпендикулярная к Ox и так направленная, чтобы направлению Oy соответствовал полярный угол $\varphi = +\frac{\pi}{2}$.

Если через x и y мы обозначим координаты точки M относительно этой системы, то, очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \tag{1}$$

эти формулы, выражающие x и y через ρ и φ, справедливы как для случая § 58, так и для случая § 59 [2]).

Формулы для обратного перехода сразу выводятся из предыдущих. Действительно, имеем, во-первых,

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2,$$

откуда

$$\rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

и во-вторых,

$$\cos \varphi = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3}$$

[1]) Действительно, угол $\varphi + \pi$ характеризует направление, прямо противоположное тому, которое соответствует углу φ.

[2]) Формулы (1) выводятся на основании формулы (2) § 19а.

Знак перед радикалами можно выбирать по произволу, однако, один и тот же во всех формулах (2) и (3) [1]).

Если мы остановимся на системе § 58, то необходимо оставить только знак $+$, и предыдущие формулы примут вид

$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2*}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3*}$$

Как в одном, так и в другом случае будем иметь

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{4}$$

Формулы (2) и (3) или (2*) и (3*) дают возможность вычислить полярные координаты, если даны прямоугольные. Вычисления лучше всего произвести так: остановившись на определенном знаке перед радикалом, вычислить ρ и по знакам $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ определить ту четверть, в которой заключен угол φ; вычисление же по таблицам произвести по формуле (4).

Напомним, что формулы (1)—(4) относятся к тому частному случаю, когда декартова система координат — прямоугольная, а ось абсцисс направлена вдоль полярной оси.

Упражнения и дополнения

1. При предыдущих обозначениях найти прямоугольные координаты x и y точки, если дано $\rho = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Ответ. $x = 1$; $y = \sqrt{3}$.

2. Даны прямоугольные координаты $x = -5$, $y = +5$. Найти полярные координаты ρ и φ (в необобщенной системе); обозначения прежние.

Ответ. $\rho = +5\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

3. Найти расстояние между двумя точками M_1 (ρ_1, φ_1), M_2 (ρ_2, φ_2).

Решение. Имеем при очевидных обозначениях

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = (\rho_2\cos\varphi_2 - \rho_1\cos\varphi_1)^2 + (\rho_2\sin\varphi_2 - \rho_1\sin\varphi_1)^2,$$

откуда после очевидных упрощений

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1).$$

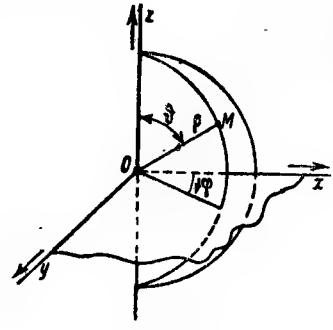
Легко также найти предыдущую формулу непосредственным рассмотрением чертежа.

61. Полярные координаты в пространстве. В этой системе основными постоянными элементами являются точка O (*полюс*), ось Oz (*полярная ось*) и полуплоскость Ozx, примыкающая к полярной оси Oz (*полярная полуплоскость*).

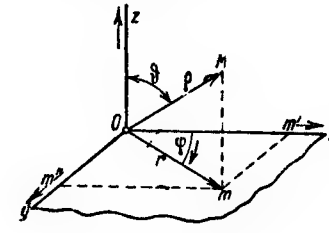
[1]) Если взять знак $(+)$, то для ρ получим положительное значение; если же взять знак $(-)$, то ρ получит отрицательное значение, но зато ось Δ примет направление, прямо противоположное тому, которое получается при знаке $(+)$ перед радикалом.

Пусть M — какая-либо точка пространства (черт. 62)[1]. Обозначим через ρ длину радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, через ϑ — угол, составляемый $\overrightarrow{OM}$ с полярною осью Oz, и наконец, через φ — угол, составляемый полуплоскостью, примыкающей к оси Oz и проходящей через точку M, с полярною полуплоскостью Oxz. Угол φ отсчитывается от полуплоскости Oxz в каком-либо определенном направлении, например по направлению движения часовой стрелки (для наблюдателя, стоящего вдоль Oz).

Ясно, что достаточно изменять ρ в пределах $(0, \infty)$, ϑ — в пределах $(0, \pi)$ и φ — в пределах $(0, 2\pi)$, чтобы получить все точки пространства.



Черт. 62.



Черт. 63.

Величины ρ, ϑ и φ называются *полярными* (или *сферическими*) координатами точки M.

Найдем теперь формулы перехода от полярных координат к декартовым прямоугольным.

Мы предполагаем (черт. 62 и 63), что ось Oz совпадает с полярною осью, Ox расположена в полярной полуплоскости, а Oy перпендикулярна к обеим предыдущим осям и притом проведена в такую сторону, чтобы угол φ для полуплоскости Oyz был равен $+\frac{\pi}{2}$.

Имеем, очевидно,

$$z = \text{пр}_z \overrightarrow{OM} = \rho \cos \vartheta.$$

Проектируя, далее, вектор $\overrightarrow{OM}$ на плоскость Oxy, мы получим вектор $\overrightarrow{Om'}$ (черт. 63) длины

$$r = |Om| = \rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \rho \sin \vartheta,$$

который составляет с осью Ox угол φ. Если спроектировать этот вектор на Ox и Oy, то получим

$$x = |Om| \cos \varphi = \rho \sin \vartheta \cos \varphi,$$
$$y = |Om| \sin \varphi = \rho \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Итак,

$$x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \vartheta. \tag{1}$$

[1]) Оси Ox и Oy на черт. 62 мы провели для большей наглядности. Плоскость Oxy перпендикулярна к оси Oz, а положительная часть оси Ox расположена на полярной полуплоскости.

Обратно, зная x, y и z, можем определить ρ, ϑ и φ. Действительно, имеем

$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2}$$

Далее. угол φ (заключенный между 0 и π) вполне определяется формулой

$$\cos\vartheta = \frac{z}{\rho}, \tag{3}$$

угол же φ (заключенный между 0 и 2π) определяется из формулы

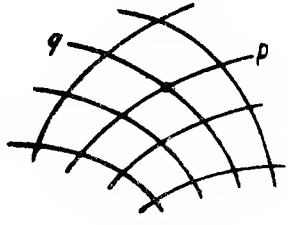
$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho\sin\vartheta}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho\sin\vartheta}. \tag{4}$$

62. Полуполярные (цилиндрические) координаты. При обозначениях предыдущего параграфа положение точки M вполне определяется заданием полярных координат (r, φ) проекции m точки M на плоскость Oxy и координаты $z = mM$. Величины r, φ, z называются *полуполярными* (*цилиндрическими*) координатами точки M.

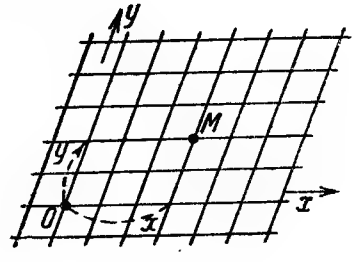
Переход от этих координат к прямоугольным декартовым дается формулами (при обозначениях предыдущего параграфа):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{1}$$

63. Общий метод координат. Системы декартовых, полярных и полуполярных координат представляют собою только частные случаи осуществления общего метода координат; чтобы дать представление об этом методе, начнем со случая координат на плоскости.



Черт. 64.



Черт. 65.

Вообразим на плоскости (черт. 64) две системы линий (кривых или прямых), обладающих тем свойством, что через каждую точку M плоскости проходит по одной и только по одной линии каждой системы и что кроме M эти две линии нигде не пересекаются. [Например, мы можем за линии первой и второй систем принять прямые, параллельные соответственно осям Ox и Oy (черт. 65).] Упомянутые линии назовем координатными линиями. Предположим, далее, что каждая линия первой системы вполне характеризуется значением некоторого числа p, так что каждому значению p соответствует вполне определенная линия первой системы; пусть, аналогично, линии второй системы характеризуются значениями некоторого числа q. (В приведенном выше примере можно принять $p = x$, $q = y$, где x — отрезок, отсекаемый прямой первой системы

ия оси Ox, а y — отрезок, отсекаемый на оси Oy прямой второй системы; оба эти отрезка мы предполагаем снабженными знаками.)

Пусть M есть какая-либо точка плоскости; через нее, по предположению, проходит по одной линии каждой системы. Числа p и q, характеризующие эти линии, очевидно, вполне определяют положение точки M на плоскости и называются *криволинейными координатами* точки M.

Если, в частности, за координатные линии мы примем прямые, параллельные двум данным осям Oy и Ox, и за p и q — числа x и y (см. выше), то получим уже известную нам систему необобщенных декартовых координат.

Чтобы притти к *полярным координатам*, рассмотрим систему окружностей с общим центром O. Каждая из этих окружностей, которые мы примем за координатные линии первой системы, характеризуется вполне своим радиусом ρ. За линии второй системы примем полупрямые (лучи), исходящие из точки O; каждая из этих полупрямых вполне определяется углом φ, составляемым ею с некоторою постоянною осью Ox на плоскости (углу φ мы, как всегда, приписываем определенный знак). Если за p и q принять соответственно ρ и φ, то мы придем, очевидно, к полярной системе § 58.

В качестве дальнейшего примера рассмотрим так называемую *биполярную* систему координат, которую можно определить следующим образом. Возьмем на плоскости две точки O и O'. Примем в качестве линий первой системы окружности с центром в O, а в качестве линий второй системы — окружности с центром в O'. Пусть координатами p и q служат радиусы ρ и ρ' окружностей первой и второй систем. Иначе говоря, примем за координаты какой-либо точки M расстояния этой точки до двух данных точек O и O'. Полученная система координат называется биполярной. Заметим, впрочем, что координатные линии этой системы не вполне удовлетворяют поставленным выше условиям; линии различных систем пересекаются, вообще говоря, в двух точках; поэтому совокупности значений ρ, ρ' соответствуют вообще не одна, а две точки. Чтобы устранить это неудобство, можно, например, ограничиться рассмотрением одной из двух частей плоскости, на которые она разбивается прямою OO'.

Заметим еще, что приведенные выше соображения применяются и к определению положения точки на любой поверхности (а не только на плоскости). Простейший пример — общеизвестные *географические координаты на сфере*. Здесь координатными линиями являются меридианы и параллели, а координатами p и q — долгота и широта.

Предыдущие соображения непосредственно обобщаются на случай пространства трех измерений.

Вообразим в пространстве три системы поверхностей, обладающих тем свойством, что через каждую точку проходит одна и только одна поверхность каждой системы и что эти три поверхности имеют только одну общую (всем трем) точку M. Пусть каждая из поверхностей первой системы характеризуется заданием значений некоторой величины p; аналогично, пусть каждая из поверхностей второй и третьей систем характеризуется заданием некоторых величин q и r. Рассматриваемые поверхности называются *координатными поверхностями*, а линии пере-

сечения этих поверхностей — *координатными линиями*. Ясно, что через каждую точку пространства проходят три координатные линии.

Если дана точка M, то этим самым будут даны координатные поверхности, проходящие через M, т. е. будут даны значения величин p, q, r, и обратно. Величины p, q, r называются *криволинейными координатами* точки M.

Декартовы координаты представляют собою частный случай криволинейных: в этом случае координатные поверхности суть плоскости, параллельные плоскостям координат; роль величин p, q, r выполняют отрезки x, y, z (снабженные знаками), отсекаемые этими плоскостями на осях координат (считая от O), или (в случае обобщенных координат) пропорциональные им величины. Координатные линии суть прямые, параллельные осям координат.

В случае пространственных полярных координат, при обозначениях § 61, координатными поверхностями будут сферы с центром в O, характеризуемые радиусом ρ, полуплоскости, примыкающие к Oz, характеризуемые углом φ с полуплоскостью Ozx, и круговые конусы, образующие которых суть лучи, выходящие из O и составляющие с Oz угол ϑ.

В случае полуполярных (цилиндрических) координат координатными поверхностями будут (при обозначениях § 61) круговые цилиндры с осью Oz, характеризуемые радиусом r поперечного сечения, полуплоскости, примыкающие к Oz, характеризуемые углом φ с полуплоскостью Ozx, и плоскости, перпендикулярные к Oz, характеризуемые алгебраическими значениями отрезка, отсекаемого на оси Oz (считая от O).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ [1])

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ. ДВИЖЕНИЯ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

I. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ

Координаты одной и той же точки (или вектора) по отношению к различным системам координат, вообще говоря, различны. Очень важно уметь вычислять координаты точки или вектора относительно одной системы по координатам той же точки или вектора относительно другой.

Приступая к решению этого вопроса, мы будем считать известным взаимное расположение основных элементов двух рассматриваемых систем координат. Под основными элементами данной системы декартовых координат мы подразумеваем начало этой системы и координатные векторы. Этими элементами определяются, конечно, и оси координат. Когда речь идет о координатах вектора (а не точки), то положения начал, конечно, безразлично.

64. Перенесение начала. Начнем с рассмотрения того простого случая, когда новая система отличается от старой только положением начала, так что координатные векторы (и, следовательно, направления осей) в обеих системах одни и те же. Оси старой системы обозначим через Ox, Oy, Oz, а оси новой — через $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Координатные векторы в обеих системах обозначим через $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Положение новой системы относительно старой, очевидно, вполне определяется координатами нового начала O' относительно старой системы. Пусть a, b, c обозначают эти координаты.

Если $\mathbf{P}$ — некоторый вектор, то, очевидно, его координаты относительно обеих систем одни и те же.

Рассмотрим зависимость между старыми и новыми координатами какой-либо точки M. Пусть x, y, z обозначают координаты M в старой системе, а x', y', z' — в новой. Очевидно, имеем (черт. 66)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{1}$$

Но, по самому определению координат точки,

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x + \mathbf{v}y + \mathbf{w}z, \quad \overrightarrow{O'M} = \mathbf{u}x' + \mathbf{v}y' + \mathbf{w}z',$$
$$\overrightarrow{OO'} = \mathbf{u}a + \mathbf{v}b + \mathbf{w}c.$$

---

[1]) При первом чтении книги можно временно опустить все параграфы этой главы, кроме § 64—66; остальные же параграфы можно прочитывать по мере встречи ссылок на них.

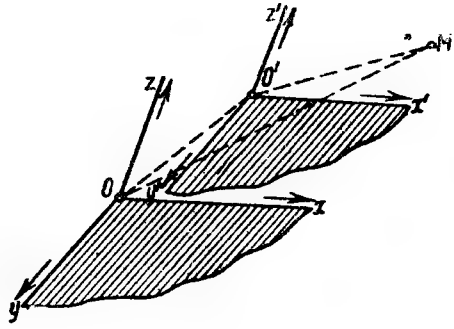
Внося эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$\mathbf{u}x + \mathbf{v}y + \mathbf{w}z = \mathbf{u}(x' + a) + \mathbf{v}(y' + b) + \mathbf{w}(z' + c),$$

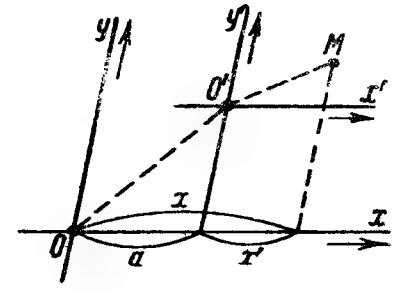
откуда следует

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'. \tag{2}$$

Формулы (2) дают возможность вычислить старые координаты, когда даны новые, и обратно.



Черт. 66.



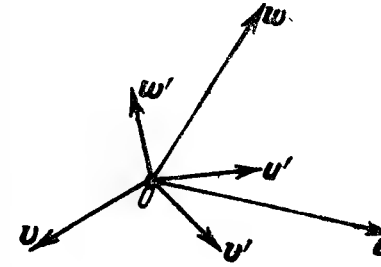
Черт. 67.

Для случая координат на плоскости будем иметь аналогично

$$x = a + x', \quad y = b + y'; \tag{3}$$

для случая необобщенных координат читатель легко проверит эти формулы также непосредственно на чертеже (черт. 67).

65. Изменение координатных векторов. Рассмотрим теперь другой частный случай, когда оси новой системы $Ox'y'z'$ составляют произвольные углы с осями старой системы $Oxyz$, начала же их совпадают; координатные векторы $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ новой системы могут отличаться от старых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ не только по направлению, но и по величине (черт. 68). Мы будем считать заданными координаты векторов $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ относительно старой системы. Пусть эти координаты суть соответственно (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3), так что



Черт. 68.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}' &= l_1\mathbf{u} + m_1\mathbf{v} + n_1\mathbf{w}, \\ \mathbf{v}' &= l_2\mathbf{u} + m_2\mathbf{v} + n_2\mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' &= l_3\mathbf{u} + m_3\mathbf{v} + n_3\mathbf{w}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{P}$ — некоторый вектор и пусть X, Y, Z и X', Y', Z' — его координаты соответственно относительно старой и новой систем.

Имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}X + \mathbf{v}Y + \mathbf{w}Z = \mathbf{u}'X' + \mathbf{v}'Y' + \mathbf{w}'Z'.$$

Виося в правую часть вместо X', Y', Z' их выражения (1) через X, Y, Z и сравнивая в обеих частях коэфициенты при $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, получим

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z', \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z'. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Таким образом задача наша решена: старые координаты выражены через новые. Если мы хотим выразить новые координаты через старые, то для этого достаточно решить систему (2) относительно X', Y', Z' или же прямо применить предыдущий результат, поменяв ролями старые и новые системы[1]).

Из того обстоятельства, что, поменяв ролями старые и новые оси, мы можем выразить X', Y', Z' через X, Y, Z, вытекает, что система (2) всегда разрешима относительно X', Y', Z', а это значит, что определитель

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix},$$

отличен от нуля. Последнее вытекает также из того, что если бы предыдущий определитель был равен нулю, то тогда векторы $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ были бы компланарны (§ 39), а это противоречит условию, принятому раз навсегда относительно координатных векторов.

Совершенно ясно, далее, что координаты любой *точки* M преобразуются по тем же формулам (2), так как координаты точки M суть не что иное, как координаты радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ этой точки. Если, следовательно, x, y, z и x', y', z' суть соответственно старые и новые координаты точки M, то

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z'. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Точно так же можно выразить новые координаты через старые.

Заметим, что величины $l_1, l_2, \ldots, n_3$ в формулах (2) или (3) суть постоянные величины, зависящие только от взаимного расположения старой и новой систем и от длин координатных векторов. но не зависящие от рассматриваемого вектора $\mathbf{P}$ (или точки M).

---

[1]) В этом последнем случае надо считать заданными координаты ортов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ старой системы относительно новой системы.

Для случая координат на плоскости будем иметь аналогично

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}' &= l_1\mathbf{u} + m_1\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= l_2\mathbf{u} + m_2\mathbf{v} \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

и

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y', \\ Y &= m_1X' + m_2Y', \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

(для вектора) и

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y', \\ y &= m_1x' + m_2y' \end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

(для точки).

Упражнения

1. Старая система координат на плоскости прямоугольна, новая ось Ox' составляет со старой осью Ox угол в 30°, а новая ось Oy' составляет с той же осью Ox угол в 60° [1]). Требуется выразить старые координаты (X, Y) некоторого вектора $\mathbf{P}$ через новые (X', Y') и обратно; координаты считаются необобщенными.

Решение. Координаты вектора (орта) $\mathbf{u}'$ относительно старой системы будут $(\cos 30°, \sin 30°)$; координаты $\mathbf{v}'$ относительно той же системы будут $(\cos 60°, \sin 60°)$. Итак,

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{u} + \frac{1}{2}\,\mathbf{v}. \quad \mathbf{v}' = \frac{1}{2}\,\mathbf{u} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{v};$$

значит,

$$l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad m_1 = \frac{1}{2}, \quad l_2 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$X = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,X' + Y'), \quad Y = \frac{1}{2}(X' + \sqrt{3}\,Y').$$

Мы выразили старые координаты через новые. Решая предыдущие уравнения относительно X', Y', получим выражения новых координат через старые:

$$X' = \sqrt{3}\,X - Y, \quad Y' = -X + \sqrt{3}\,Y.$$

2. Оси Ox', Oy', Oz' новой системы являются биссектрисами углов yOz, zOx, xOy старой системы, которая предполагается прямоугольной. Требуется выразить старые координаты X, Y, Z вектора $\mathbf{P}$ через новые X', Y', Z'; координаты — необобщенные.

Решение. Имеем [2]):

$$\mathbf{u}' = 0\cdot\mathbf{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{u} + 0\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{u} + \mathbf{w}),$$

$$\mathbf{w}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v} + 0\cdot\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

---

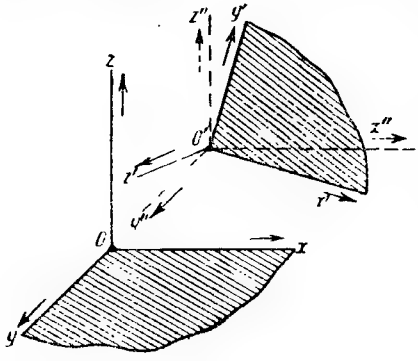
[1]) Углы отсчитываются от Ox в направлении к оси Oy.

[2]) Предполагаем для определенности, что положительные части новых осей заключаются между положительными частями старых, т. е. что, например, Ox' составляет с Oy и Oz углы в 45°.

Следовательно,

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y'+Z'),\quad Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Z'),\quad Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Y').$$

66. Общий случай. Пусть теперь новая система $O'x'y'z'$ расположена совершенно произвольно относительно старой системы $Oxyz$. Так как координаты *вектора* вовсе не зависят от положения начала координат, то, очевидно, они будут преобразовываться по тем же формулам (2) предыдущего параграфа, как если бы новое начало координат O' совпадало с O.



Черт. 69.

Для вывода же формул преобразования координат *точки* введем вспомогательную систему $O'x''y''z''$ (черт. 69), имеющую начало в O', но координатные векторы которой равны старым.

Обозначая через (x, y, z), (x', y', z') и (x'', y'', z'') координаты точки M соответственно в старой, новой и вспомогательной системах, будем иметь сперва

$$x=a+x'',\quad y=b+y'',\quad z=c+z'',$$

где a, b, c обозначают координаты нового начала O' относительно старой системы. Далее, по формулам предыдущего параграфа получим (рассматривая вспомогательную систему как старую)

$$\begin{aligned} x''&=l_1x'+l_2y'+l_3z',\\ y''&=m_1x'+m_2y'+m_3z',\\ z''&=n_1x'+n_2y'+n_3z'; \end{aligned}$$

подставляя эти значения в предыдущие формулы, получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} x&=a+l_1x'+l_2y'+l_3z',\\ y&=b+m_1x'+m_2y'+m_3z',\\ z&=c+n_1x'+n_2y'+n_3z'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В формулах (1) все коэфициенты a, b, ..., n_3 суть постоянные величины, не зависящие от положения точки M (упомянутые коэфициенты зависят только от взаимного расположения осей старой и новой систем координат и от длин координатных векторов).

Для случая координат на плоскости вместо формул (1) будем иметь более простые формулы:

$$\left.\begin{aligned} x&=a+l_1x'+l_2y',\\ y&=b+m_1x'+m_2y', \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

выводимые совершенно аналогичным способом.

Меняя ролями старые и новые системы, получим совершенно аналогичные формулы:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a' + l'_1 x + l'_2 y + l'_3 z, \\ y' &= b' + m'_1 x + m'_2 y + m'_3 z, \\ z' &= c' + n'_1 x + n'_2 y + n'_3 z \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

для пространства и

$$\left.\begin{aligned} x' &= a' + l'_1 x + l'_2 y, \\ y' &= b' + m'_1 x + m'_2 y \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

для плоскости. Эти формулы можно, конечно, получить из (1) (соответственно из (2)), решая их относительно x', y', z' (соответственно x', y').

Мы не упомянули до сих пор о преобразовании координат на прямой (оси Ox). В этом случае формулы преобразования координат точки имеют, очевидно, следующий вид

$$x = a + lx', \quad x' = a' + l'x \left(\text{где, } l' = \frac{1}{l}, \quad a' = -\frac{a}{l}\right). \qquad (3)$$

Резюмируя полученные результаты, можно высказать следующее основное предложение:

Декартовы координаты вектора относительно одной системы суть линейные однородные функции декартовых координат того же вектора относительно другой системы. Декартовы координаты точки относительно одной системы суть линейные (вообще неоднородные) *функции* [1]) *декартовых координат той же точки относительно другой системы.*

Замечание. Если переменные x, y, z выражаются через переменные x', y', z' формулами вида

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

то говорят, что x, y, z получаются из x', y', z' *линейной однородной подстановкой* (*преобразованием*) *с таблицей*

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3. \end{matrix} \qquad (A)$$

---

[1]) Напомним, что линейной функцией одной или нескольких переменных называется целая рациональная функция первой степени этих переменных. Например, линейная функция трех переменных x, y, z имеет вид

$$Ax + By + Cz + D,$$

где A, B, C, D — постоянные коэфициенты. Если постоянный член отсутствует, то линейная функция называется *однородной*; в случае трех переменных x, y, z линейная однородная функция имеет вид $Ax + By + Cz$.

Определитель этой таблицы, т. е. определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

называется *определителем подстановки*; величины $l_1, l_2, \ldots, n_3$ суть коэфициенты подстановки. Если $\Delta = 0$, то подстановка называется *особенной*, если же $\Delta \neq 0$, то подстановка — *неособенная*.

Формулы вида (1) также определяют *линейную подстановку* (линейное преобразование), вообще *неоднородную*[1]). Величины a, b, c, l_1, $l_2, \ldots, n_3$ суть коэфициенты подстановки. Однако определителем подстановки называется тот же определитель Δ, составленный из коэфициентов $l_1, \ldots, n_3$. Подстановка называется *особенной* или *неособенной* в зависимости от случаев $\Delta = 0$ или $\Delta \neq 0$. Эти определения естественно распространяются на случай любого числа переменных[2]).

При указаниой терминологии доказанное выше предложение можно высказать еще так: новые координаты *точки* получаются из старых линейной неособенной[3]) подстановкой с постоянными коэфициентами; новые координаты вектора получаются из старых линейной *однородной* неособенной подстановкой с постоянными коэфициентами. (Коэфициенты названы здесь постоянными в том смысле, что они не зависят от рассматриваемого вектора или точки, а только от взаимного положения и длин старых и новых координатных векторов и начал координат.)

67. Приложения. 1°. *Обобщение формул для площади треугольника и объема тетраэдра.* В § 49 мы вывели формулу (4), дающую площадь параллелограма, построенного на двух векторах $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, справедливую в случае прямоугольных координат. Выведем аналогичную формулу для декартовых координат общего вида. Пусть X_1, Y_1 и X_2, Y_2 — координаты векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ в данной обобщенной декартовой системе. Возьмем теперь какую-нибудь вспомогательную прямоугольную систему, такую, однако, чтобы направление положительного вращения в обеих системах было одинаковым. Тогда, сохраняя правило знаков, принятое в § 49, мы должны будем приписывать площади одинаковый знак в обеих системах. Искомая площадь дается формулой

$$S = \begin{vmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2' & Y_2' \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где X_1', Y_1', X_2', Y_2' — координаты наших векторов относительно прямоугольной системы, которую мы будем рассматривать как „старую“; так что

$$X_1' = l_1 X_1 + l_2 Y_1, \quad Y_1' = m_1 X_1 + m_2 Y_1,$$
$$X_2' = l_1 X_2 + l_2 Y_2, \quad Y_2' = m_1 X_2 + m_2 Y_2,$$

где l_1, m_1 и l_2, m_2 суть координаты (относительно прямоугольной системы) координатных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ данной системы.

---

[1]) Подстановка будет одиородной в случае, когда $a = b = c = 0$.

[2]) См. Добавление, § 8.

[3]) О том, что $\Delta \neq 0$, было уже сказано в предыдущем параграфе.

Таким образом

$$S=\begin{vmatrix} l_1X_1+l_2Y_1 & m_1X_1+m_2Y_1 \\ l_1X_2+l_2Y_2 & m_1X_2+m_2Y_2 \end{vmatrix}$$

или, пользуясь теоремой об умножении определителей,

$$S=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

откуда

$$S=S_0\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где

$$S_0=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

есть, на основании той же формулы (1), примененной к векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, площадь параллелограма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$; площадь эта положительна, на основании нашего условия относительно направления положительного вращения в обеих системах координат. Имеем, очевидно,

$$S_0=|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\sin\nu,$$

где ν — координатный угол данной системы, так что, наконец,

$$S=|\mathbf{u}\cdot,\mathbf{v}|\sin\nu\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Напомним, что формула эта приписывает площади знак согласно тому же правилу, что и в § 49. Совершенно аналогично для объема V параллелепипеда, построенного на трех векторах

$$\mathbf{P}_1=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),\quad \mathbf{P}_2=(X_2,\ Y_2,\ Z_2),\quad \mathbf{P}_3=(X_3,\ Y_3,\ Z_3),$$

получим, исходя из формулы (2) § 52 и пользуясь, подобно предыдущему, вспомогательной системой прямоугольных координат, так же ориентированной (в смысле правой или левой системы), что и данная:

$$V=V_0\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $V_0>0$ — объем параллелепипеда, построенного на координатных векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, определяемый формулой (см. § 52, упражнение 4):

$$V_0^2=|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 \end{vmatrix}; \tag{6}$$

здесь λ, μ, ν — углы между координатными векторами. Формула (5) приписывает объему определенный знак, а именно, $V > 0$, если векторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ так же ориентированы (в смысле правой или левой системы), как координатные векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$; в противном случае $V < 0$.

Совершенно так же, как в § 50 и 53, получим формулу

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \sin \nu \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

для площади треугольника, заданного координатами вершин, и

$$V = \frac{1}{6} V_0 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{8}$$

для объема тетраэдра.

2°. *О квадратичной форме, определяющей квадрат длины вектора.* В § 56 мы видели, что квадрат длины вектора $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ выражается квадратичной формой координат X, Y, Z:

$$g_{11}X^2 + g_{22}Y^2 + g_{33}Z^2 + 2g_{23}YZ + 2g_{31}ZX + 2g_{12}XY \tag{9}$$

и что эта форма неособенная и положительная. Естественно возникает вопрос: если произвольно задана неособенная положительная форма, можно ли найти такую систему декартовых координат, чтобы в ней данная форма выражала квадрат длины вектора?

Ответ очевиден в случае, когда $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$, т. е. когда наша форма имеет вид

$$X^2 + Y^2 + Z^2;$$

действительно, в этом случае всякая (необобщенная) прямоугольная система удовлетворяет условию. Легко теперь показать, что ответ будет положительным и в общем случае. Действнтельно, в теории квадратичных форм доказывается [1]), что путем подходящей линейной однородной неособенной подстановки

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z', \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z' \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

всякая неособенная положительная форма (9) трех переменных может быть приведена к виду

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2.$$

Если теперь рассматривать X', Y' Z' как координаты вектора в некоторой прямоугольной системе координат и подобрать другую декартову систему (вообще не прямоугольную), так чтобы координаты вектора

[1]) См. Добавление, § 12.

в этих двух системах были связаны соотношениями (10)[1]), то это вторая система и будет удовлетворять поставленному условию.

Замечание. Легко видеть, что задание выражения (9) для квадрата длины вектора вполне определяет длины координатных векторов и углы между ними. Действительно, на основании формул (2) § 55, имеем

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{g_{11}}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{g_{22}}, \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{g_{33}},$$

$$\cos\lambda = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \quad \cos\mu = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}, \quad \cos\nu = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Если бы величины $g_{11}, \ldots, g_{12}$ были заданы совершенно произвольно, то могло бы, например, оказаться, что для величин $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ получились бы мнимые значения или для $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ — величины, бо́льшие единицы. Даже, если бы для $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$ получились действительные значения, а для $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ — значения, меньшие 1, то все же могло бы оказаться невозможным построить трехгранный угол $Oxyz$ с плоскими углами, равными λ, μ, ν (для возможности построения такого трехгранного угла, как легко видеть, должно быть $\lambda+\mu+\nu<2\pi$). Из доказанного в этом параграфе вытекает, что этого не может случиться, если заданная форма — неособенная и положительная.

В случае двух измерений возможность построения системы координат, для которой

$$|\mathbf{P}|^2 = g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2,$$

где в правой части — произвольная неособенная положительная форма, легко может быть также доказана непосредственно, если воспользоваться следующим предложением[2]): *для того чтобы квадратичная форма* $g_{11}X^2+2g_{12}XY+g_{22}Y^2$ *была положительной и неособенной, необходимы и достаточны условия:* $g_{11}>0$, $g_{22}>0$, $g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0$. Обратно, это предложение легко может быть выведено из предыдущих рассмотрений, примененных к случаю двух измерений.

68. Преобразование ковариантных координат. В предыдущих параграфах речь шла, разумеется, об обычных (контравариантных) координатах вектора (или точки). Посмотрим теперь как изменяются ковариантные координаты вектора при переходе от одной системы к другой.

---

[1]) Для нахождения этой второй системы достаточно представить соотношения (10) в виде

$$X' = l_1'X + l_2'Y + l_3'Z,$$
$$Y' = m_1'X + m_2'Y + m_3'Z,$$
$$Z' = n_1'X + n_2'Y + n_3'Z,$$

для чего достаточно решить систему (10) относительно X', Y', Z'. Тогда система декартовых координат, определяемая относительно прямоугольной координатными векторами $\mathbf{u}=(l_1', m_1', n_1')$, $\mathbf{v}=(l_2', m_2', n_2')$, $\mathbf{w}=(l_3', m_3', n_3')$, и будет требуемой.

[2]) См. Добавление, § 12, замечание.

Имеем попрежнему

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}' &= l_1\mathbf{u} + m_1\mathbf{v} + n_1\mathbf{w}, \\ \mathbf{v}' &= l_2\mathbf{u} + m_2\mathbf{v} + n_2\mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' &= l_3\mathbf{u} + m_3\mathbf{v} + n_3\mathbf{w}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Пусть X^*, Y^*, Z^* и X'^*, Y'^*, Z'^* обозначают соответственно ковариантные координаты вектора $\mathbf{P}$ относительно старых и новых систем. По определению $X'^* = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{P}$, $Y'^* = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{P}$, $Z'^* = \mathbf{w}' \cdot \mathbf{P}$, откуда, подставляя вместо $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ выражения (1) и замечая, что $\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} = X^*$ и т. д., получим

$$\left.\begin{aligned} X'^* &= l_1X^* + m_1Y^* + n_1Z^*, \\ Y'^* &= l_2X^* + m_2Y^* + n_2Z^*, \\ Z'^* &= l_3X^* + m_3Y^* + n_3Z^*. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Решая предыдущие уравнения относительно X^*, Y^*, Z^*, найдем также выражение старых координат через новые.

Формулы преобразования *координат точки* совершенно аналогичны предыдущим, если начало координат не изменяется. Читателю предоставляется написать формулы и для случая, когда начало координат изменяет положение.

Сделаем теперь одно замечание, относящееся к формулам преобразования как обычных (контравариантных), так и ковариантных координат. Вспомним для этого формулы преобразования обычных координат (§ 65):

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z', \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для того чтобы облегчить сравнение формул (1), (2) и (3), выпишем таблицу коэфициентов, входящих в формулы (1):

$$\begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3. \end{matrix} \tag{A}$$

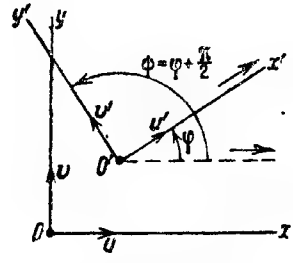
Применяя терминологию, указанную в конце § 66, содержание формул (1) можно передать, говоря, что новые координатные векторы получаются из старых при помощи линейной подстановки с таблицей (A). Обращаясь к формулам (2), видим, что при преобразовании координат величины X^*, Y^*, Z^* преобразуются точно такой же линейной подстановкой, что и координатные векторы. Следуя алгебраической терминологии, это обстоятельство можно выразить, говоря, что величины X^*, Y^*, Z^* *ковариантны* с координатными векторами (этим и объясняется название „ковариантные координаты“).

Сравнивая теперь формулы (3) с формулами (1), видим, что *старые* координаты X, Y, Z выражаются через *новые* при помощи подстановки, которая получается из подстановки, выражающей *новые* координатные векторы через *старые*, путем замены в таблице (A) строк на столбцы, следуя алгебраической терминологии, можно сказать, что обычные координаты X, Y, Z *контравариантны* с координатными векторами; этим и объясняется название „контравариантные".

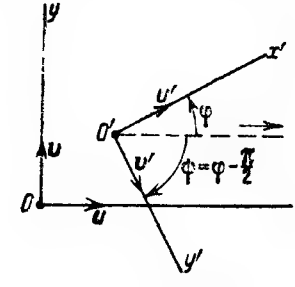
II. ВАЖНЕЙШИЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

В этом отделе мы детально разберем некоторые важнейшие случаи преобразования координат, чаще всего встречающиеся в приложениях.

69. Преобразование прямоугольных координат на плоскости. Предположим сначала, что старая и новая системы координат на плоскости — обе прямоугольные (черт. 70a, 70b).



Черт. 70a.



Черт. 70b.

Здесь следует различать два случая. В первом новая система (черт. 70a) может быть получена из старой путем простого перемещения старой системы по своей плоскости (не выходя из нее). Во втором же случае возможно, путем такого перемещения, совместить только, например, оси $O'x'$ и Ox; оси же $O'y'$ и Oy примут при этом противоположные направления (черт. 70b).

Для краткости мы будем говорить, что в первом случае две системы осей принадлежат одному классу, а во втором — различным классам.

В обоих случаях положение новой системы относительно старой можно вполне охарактеризовать заданием координат нового начала O' относительно старой системы и угла φ, который новая ось $O'x'$ составляет со старою осью Ox, приписывая углу тот или иной знак в зависимости от направления отсчета. За направление отсчета положительных углов мы примем направление, соответствующее старой системе (т. е. ведущее кратчайшим путем от Ox к Oy) [1]). Угол Φ, который ось $O'y'$ составляет с осью Ox, отсчитываемый по тому же правилу что и φ, будет равен либо $\varphi+\frac{\pi}{2}$ (если системы одного класса), либо $\varphi-\frac{\pi}{2}$ (если системы различных классов); мы не обращаем внимания на слагаемое вида $2k\pi$, не имеющее значения.

[1]) См. § 47.

В обоих рассматриваемых случаях будем, очевидно, иметь

$$l_1 = \cos\varphi, \quad m_1 = \sin\varphi, \quad l_2 = \cos\psi, \quad m_2 = \sin\psi, \tag{1}$$

и формулы (2а), § 65, дают для преобразования координат вектора

$$X = X'\cos\varphi + Y'\cos\psi, \quad Y = X'\sin\varphi + Y'\sin\psi, \tag{2}$$

или, принимая во внимание, что $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$,

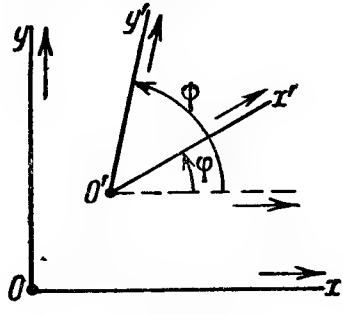
$$X = X'\cos\varphi \mp Y'\sin\varphi, \quad Y = X'\sin\varphi \pm Y'\cos\varphi, \tag{3}$$

где верхние знаки берутся в случае систем одного класса, а нижние — в противном случае.

Мы получили выражение старых координат через новые. Решая предыдущие уравнения относительно X' и Y' или применяя те же формулы, поменяв ролями старые и новые оси [1]), получим формулы

$$\left.\begin{aligned} X' &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi, \\ Y' &= \mp X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

выражающие новые координаты через старые.



Черт. 71.

Координаты *точки* преобразуются по формулам (см. § 66)

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\varphi \mp y'\sin\varphi, \\ y &= b + x'\sin\varphi \pm y'\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где, напоминаем, a и b обозначают координаты нового начала относительно старой системы. Предыдущие формулы выражают старые координаты через новые.

Замечание. Очевидно, что формулы (1), (2) останутся в силе и тогда, когда старая система попрежнему прямоугольная, новая же — необобщенная — косоугольная; только в этом случае угол ψ уже не равен $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$, а может быть любым (черт. 71).

Для преобразования координат точки будем иметь формулы

$$x = a + x'\cos\varphi + y'\cos\psi, \quad y = b + x'\sin\varphi + y'\sin\psi. \tag{6}$$

Упражнения и дополнения

1. Найти выражения новых координат точки через старые, считая координаты прямоугольными.

Решение. Искомые выражения можно получить, решая систему (5) относительно x', y'. Однако проще поступить так: рассмотрим вектор $\overrightarrow{O'M}$, где O' — новое начало, а M — рассматриваемая точка. Старые и новые координаты этого вектора будут соответственно $(x - a, y - b)$ и (x', y').

[1]) При этом, в случае систем одного класса, угол φ следует заменить на $-\varphi$; в случае систем различных классов φ надо оставить неизменным, так как направления отсчета углов в двух таких системах противоположны.

Применяя формулы (4) к вектору $\overrightarrow{O'M}$, получим сразу

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi, \\ y' &= \mp(x-a)\sin\varphi \pm (y-b)\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Верхние или нижние знаки берутся соответственно в случае систем одного или различных классов.

2. Найти, при обозначениях этого параграфа, координаты старого начала относительно новой системы (предполагая обе системы прямоугольными).

Ответ. $a' = -a\cos\varphi - b\sin\varphi$, $b' = \pm a\sin\varphi \mp b\cos\varphi$.

3. Координатные оси прямоугольной системы поворачиваются на угол в 30°, и начало переносится в точку $O'(3, -1)$. Найти новые координаты точки, если старые координаты ее были (3, 4).

Ответ. $x' = \frac{5}{2}$, $y' = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

4. Хотя при переходе от одной прямоугольной системы к другой координаты X, Y данного вектора $\mathbf{P}$ изменяются каждая в отдельности и принимают новые значения X', Y', даваемые формулами (3), но выражение $X^2 + Y^2$ остается неизменным, т. е. для всякого вектора

$$X^2 + Y^2 = X'^2 + Y'^2; \tag{8}$$

это очевидно, так как правая и левая части выражают квадрат длины одного и того же вектора.

Показать, что, и обратно, если при подстановке

$$X = l_1X' + l_2Y', \quad Y = m_1X' + m_2Y' \tag{9}$$

равенство (8) справедливо для всякого вектора, то необходимо

$$l_1 = \cos\varphi, \quad m_1 = \sin\varphi, \quad l_2 = \mp\sin\varphi, \quad m_2 = \pm\cos\varphi, \tag{10}$$

где φ — некоторый угол, так что подстановка (9) имеет вид (3).

Доказательство. Подставляя выражения (9) в левую часть (8) и раскрывая скобки, получим

$$(l_1^2 + m_1^2)X'^2 + 2(l_1l_2 + m_1m_2)X'Y' + (l_2^2 + m_2^2)Y'^2 = X'^2 + Y'^2;$$

так как это равенство должно быть соблюдено при всяких X', Y', то коэфициенты при X'^2, $X'Y'$ и Y'^2 в левой и правой частях должны быть равны, откуда следует

$$l_1^2 + m_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 = 1, \quad l_1l_2 + m_1m_2 = 0. \tag{11}$$

Первое равевство показывает, что $l_1 = \cos\varphi$, $m_1 = \sin\varphi$, где φ — некоторый угол; аналогично, из второго следует, что $l_2 = \cos\psi$, $m_2 = \sin\psi$, где ψ — некоторый угол. Наконец, из третьего равенства (11) выводим $\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = 0$, т. е. $\cos(\varphi - \psi) = 0$, откуда $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$ (мы отбросили кратное 2π, не имеющее значения). Таким образом мы получаем соотношения (10). Если заменим в (9) коэфициенты l_1, l_2, m_1, m_2 этими значениями и решим их относительно X', Y', то получим

$$X' = l_1X + m_1Y, \quad Y' = l_2X + m_2Y; \tag{9a}$$

исходя из этих формул и из (8), получим аналогично предыдущему:

$$l_1^2 + l_2^2 = 1, \quad m_1^2 + m_2^2 = 1, \quad l_1m_1 + l_2m_2 = 0, \tag{11a}$$

что вытекает также непосредственно и из формул (10).

Подстановки вида (9), удовлетворяющие условию (8), называются *ортогональными* (см. § 72). Мы видим, что коэфициенты ортогональной подстановки, в случае двух переменных, связаны соотношениями (11), следствиями которых являются (10); обратно, из (10) следуют (11) и (11а).

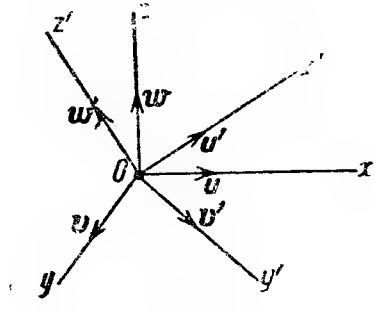
70. Преобразование прямоугольных координат в пространстве. Рассмотрим теперь случай преобразования прямоугольных координат в пространстве в прямоугольные же.

Предположим сперва для наглядности, что начало координат остается неизменным (черт. 72). В этом случае положение новой системы относительно старой определяется координатами направлений новых осей, т. е. координатами ортов $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$.

Пусть, как раньше,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}' &= l_1\mathbf{u} + m_1\mathbf{v} + n_1\mathbf{w}, \\ \mathbf{v}' &= l_2\mathbf{u} + m_2\mathbf{v} + n_2\mathbf{w}, \\ \mathbf{w}' &= l_3\mathbf{u} + m_3\mathbf{v} + n_3\mathbf{w}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Так как координаты у нас прямоугольные, то координаты направления будут в то же время косинусами направления. Расположим для наглядности эти косинусы в табличку:



Черт. 72.

	Ox	Oy	Oz
Ox'	l_1	m_1	n_1
Oy'	l_2	m_2	n_2
Oz'	l_3	m_3	n_3

(A)

В этой табличке, например, m_1 обозначает косинус угла между Ox' и Oy, а n_2 — косинус угла между Oy' и Oz.

Формулы (2) § 65 дают непосредственно

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z', \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z'; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

эти формулы выражают старые координаты через новые. Меняя же ролями старые и новые системы, получим обратные формулы:

$$\left.\begin{aligned} X' &= l_1X + m_1Y + n_1Z, \\ Y' &= l_2X + m_2Y + n_2Z, \\ Z' &= l_3X + m_3Y + n_3Z. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ввиду важности этих формул укажем еще один вывод их, несколько более простой, чем предыдущий, и независимый от него.

Так как мы имеем дело с прямоугольными координатами, то

$$X' = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{P}, \quad Y' = \mathbf{v}'\cdot\mathbf{P}, \quad Z' = \mathbf{w}'\cdot\mathbf{P};$$

внося сюда вместо $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ их выражения (1) и замечая, что $\mathbf{u}\cdot\mathbf{P} = X$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{P} = Y$, $\mathbf{w}\cdot\mathbf{P} = Z$, сразу получаем формулы (3). Из них, меняя ролями старые и новые оси, получим опять формулы (2).

Конечно, только что приведенный вывод [1]) применим и к случаю преобразования прямоугольных координат на плоскости, рассмотренный в предыдущем параграфе.

Те же формулы (2) и (3) применимы к координатам точки, так как начало координат не изменяется.

В случае, когда изменение направлений осей сопровождается перенесением начала, формулы (1) и (2) остаются в силе для координат *вектора*. Для координат *точки* будем иметь (см. § 66)

$$\left.\begin{aligned} x &= a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \\ y &= b + m_1x' + m_2y' + m_3z', \\ z &= c + n_1x' + n_2y' + n_3z', \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где a, b, c обозначают координаты нового начала относительно старой системы.

Вывод формул, выражающих новые координаты точки через старые, не представляет никаких затруднений (см. упражнение 1).

Упражнения и дополнения

1. Найти, при обозначениях этого параграфа, выражение новых координат через старые.

Ответ. (Ср. упражнение 1 предыдущего параграфа.)

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1(x-a) + m_1(y-b) + n_1(z-c), \\ y' &= l_2(x-a) + m_2(y-b) + n_2(z-c), \\ z' &= l_3(x-a) + m_3(y-b) + n_3(z-c). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

2. Новая система получается из старой путем поворота вокруг оси Oz, так что новая ось Ox', находясь в плоскости Oxy, составляет угол φ с осью Ox. Найти формулы преобразования координат (вектора или точки).

Ответ $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$, $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$, $z = z'$.

71. Соотношения между коэфициентами формул преобразования прямоугольных координат [2]). Для определения направлений осей новой системы относительно старой мы ввели в рассмотрение девять величин [косинусы направлений таблички (A) предыдущего параграфа]. Не все эти девять величин независимы между собою. Действительно, обозначая попрежнему через $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ орты новых осей, будем иметь [см. табличку (A) предыдущего параграфа]

$$\mathbf{u}' = (l_1, m_1, n_1), \quad \mathbf{v}' = (l_2, m_2, n_2), \quad \mathbf{w}' = (l_3, m_3, n_3) \qquad (1)$$

(т. е. координаты орта $\mathbf{u}'$ относительно старой системы суть l_1, m_1, n_1 и пр.).

Векторы (орты) $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ должны, очевидно, удовлетворять следующим (и только следующим) условиям: их длины должны быть равны единице, и они должны быть взаимно перпендикулярны. Эти условия выражаются так:

$$\mathbf{u}'^2 = \mathbf{v}'^2 = \mathbf{w}'^2 = 1, \quad \mathbf{v}'\cdot\mathbf{w}' = \mathbf{w}'\cdot\mathbf{u}' = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}' = 0; \qquad (2)$$

---

[1]) Вывод этот совпадает с выводом, данным в § 68 для случая преобразования ковариантных координат. Так как в нашем случае координаты прямоугольны, то разница между ковариантными и обычными координатами исчезает.

[2]) Ср. сказанное в упражнении 4 § 69.

выражая же предыдущие условия при помощи координат рассматриваемых ортов, получим [§ 44, формула (2) и § 46, формула (2)]

$$\left.\begin{aligned} l_1^2+m_1^2+n_1^2&=1,\\ l_2^2+m_2^2+n_2^2&=1,\\ l_3^2+m_3^2+n_3^2&=1;\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3&=0,\\ l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1&=0,\\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Всего мы имеем *шесть* уравнений, связывающих *девять* косинусов. Геометрическое значение этих уравнений показывает, что ни одно из них не является следствием остальных, т. е. что эти уравнения *независимы друг от друга.*

Докажем, например, что первое из них не есть следствие пяти остальных. Действительно, пять последних уравнений говорят нам только то, что векторы $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ взаимно перпендикулярны [уравнения (4)] и что $|\mathbf{v}'|=|\mathbf{w}'|=1$. Из этого, конечно, не следует, что и вектор $\mathbf{u}'$ должен иметь длину, равную единице, т. е. не следует необходимость первого уравнения. Точно так же докажем, что ни одно из уравнений (3) и (4) не есть следствие остальных.

Легко, далее, видеть, что кроме уравнений (3) и (4) не существует других, независимых от них соотношений, которым должны удовлетворять координаты $l_1, l_2, \ldots, n_3$ всяких трех взаимно перпендикулярных ортов. Последнее утверждение надо понимать в том смысле, что если нам удастся составить соотношение, которому всегда удовлетворяют величины $l_1, \ldots, n_3$, то это соотношение непременно будет следствием уже написанных соотношений (3) и (4). Действительно, если соблюдены (3) и (4), то векторы $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ непременно будут взаимно перпендикулярными ортами, и, следовательно, всякое соотношение, связывающее координаты трех любых взаимно перпендикулярных ортов, будет следствием соотношений (3) и (4).

Если поменять ролями старую и новую системы, то вместо соотношений (3) и (4) мы получим шесть следующих:

$$\left.\begin{aligned} l_1^2+l_2^2+l_3^2&=1,\\ m_1^2+m_2^2+m_3^2&=1,\\ n_1^2+n_2^2+n_3^2&=1;\end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3&=0,\\ n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3&=0,\\ l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

На основании сказанного выше эти соотношения должны быть следствиями соотношений (3), (4); и, действительно, не представляет труда вывести соотношения (3а) и (4а) из (3) и (4) путем простых алгебраических преобразований (см. след. параграф).

Так как между девятью косинусами $l_1, \ldots, n_3$ существует шесть независимых соотношений, то шесть из этих косинусов могут быть выра-

жены через три остальных. Отсюда ясно, что направления осей одной прямоугольной системы по отношению к другой характеризуются всего *тремя* величинами. Эти величины (параметры) можно выбирать различными способами. Чаще всего на практике для этой цели пользуются так называемыми углами Эйлера, рассмотренными ниже (§ 73).

В случае двух измерений вместо (3), (4), (3а), (4а) мы имеем соотношения (11), (11а) § 69; мы знаем также, что в этом случае коэфициенты l_1, m_1, l_2, m_2 выражаются через *один* угол φ. Вернемся к случаю трех измерений. Пользуясь понятием векторного произведения, можно написать еще ряд соотношений, связывающих рассматриваемые косинусы направлений.

Именно, предполагая для определенности, что старая система осей — левая, будем иметь

$$\mathbf{v}' \times \mathbf{w}' = \pm \mathbf{u}', \quad \mathbf{w}' \times \mathbf{u}' = \pm \mathbf{v}', \quad \mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \pm \mathbf{w}', \tag{5}$$

где верхний знак берется в том случае, когда новая система тоже левая, а нижний — в противном случае.

Как было уже сказано (§ 51, сноска), все формулы останутся справедливыми и в том случае, если система $Oxyz$ — правая; в этом случае надо только во всех формулировках (и, в частности, в определении векторного произведения) заменить слово „левая“ словом „правая“, и обратно.

Про две левые или две правые системы прямоугольных осей мы будем говорить, что они принадлежат одному и тому же классу; правая и левая системы принадлежат различным классам. В соответствии с этим можно теперь сказать, что в формулах (5) надо брать верхний знак, когда старая и новая системы принадлежат одному классу, а нижний знак — в противном случае.

На основании формул (4) § 51 предыдущие формулы дают девять соотношений вида

$$l_1 = \pm (m_2 n_3 - m_3 n_2), \tag{6}$$

из которых мы выписали только первое; остальные получим, переставляя в круговом порядке буквы l, m, n, а затем значки 1; 2, 3. Короче, эти соотношения показывают, что элементы определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

равны своим алгебраическим дополнениям, взятым со знаком (+), если координатные системы одного класса, и со знаком (—), если системы различных классов.

Замечая, далее, что определитель Δ представляет собою смешанное произведение (§ 52) взаимно перпендикулярных ортов $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$, т. е. что $\Delta = [\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}']$, заключаем, что

$$\Delta = \pm 1, \tag{8}$$

причем знак (+ берется, если старая и новая системы одного класса, а знак (—) в противном случае [1]).

Это же свойство можно доказать, разлагая Δ по элементам одной из строк (или одного из столбцов) и пользуясь соотношениями (6).

72. Ортогональные подстановки. Алгебраический вывод формул предыдущего параграфа. Результаты, полученные в предыдущем параграфе, естественно приводят к весьма важному алгебраическому понятию *ортогональных подстановок*. Об ортогональных подстановках мы уже сказали несколько слов в § 69 (упражнение 4); там мы имели дело с особенно простым случаем двух переменных. Здесь же мы рассмотрим более подробно случай трех переменных [2]).

Линейная однородная подстановка

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z', \\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z', \\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

называется *ортогональной*, если имеем тождественно

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2. \qquad (2)$$

Подставляя в левую часть этого равенства выражения (1) и сравнивая коэфициенты при квадратах и произведениях переменных в правой и левой частях, получим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы подстановка была ортогональной. Эти условия будут

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \\ l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 = l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 = \\ = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Мы, таким образом, получили те же условия (3) и (4) предыдущего параграфа, которым должны удовлетворять коэфициенты формул преобразования одних прямоугольных (ортогональных) координат в другие. Этим и объясняется название „ортогональная подстановка".

Пусть Δ обозначает определитель нашей подстановки.

Имеем, пользуясь теоремой умножения определителей [производя умножение построчно и применяя формулы (3)]:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда следует

$$\Delta = \pm 1. \qquad (4)$$

В случае $\Delta = +1$ мы будем говорить, что подстановка — первого класса, а во втором, что подстановка — второго класса [3]).

---

[1]) Действительно, мы знаем, что $[\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}']$ есть объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$, снабженный определенным знаком (§ 53). В нашем случае этот параллелепипед обращается в куб, ребра которого равны единице.

[2]) Мы остановились на случае трех переменных, имея в виду геометрическое значение этого случая. Все нижесказанное можно обобщить на случай любого числа переменных. См. Добавление, § 14.

[3]) Геометрически подстановка первого класса соответствует случаю, когда старая и новая системы осей — одного и того же класса, подстановка второго класса соответствует случаю, когда эти системы — различных классов.

Решая теперь систему уравнений [взятых из уравнений (3)]

$$\begin{aligned} l_1l_1 + m_1m_1 + n_1n_1 &= 1, \\ l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 &= 0, \\ l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 &= 0, \end{aligned}$$

в которых будем рассматривать первые множители (l_1, m_1, n_1) как неизвестные, а вторые — как коэфициенты, получим, по известному правилу теории определителей (см. Добавление, § 3):

$$l_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & m_1 & n_1 \\ 0 & m_2 & n_2 \\ 0 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(m_2n_3 - m_3n_2) = \pm(m_2n_3 - m_3n_2),$$

и два других равенства, получаемых путем круговой перестановки букв l, m, n. Аналогичным путем докажем еще шесть равенств, получающихся из трех предыдущих путем круговых перестановок значков 1, 2, 3. Таким образом мы получаем, что алгебраические дополнения элементов определителя (2) равны соответствующим элементам, взятым со знаком (+) в случае подстановки первого класса ($\Delta = +1$) и со знаком (—) в случае подстановки второго класса ($\Delta = -1$) (ср. предыдущий параграф).

Принимая во внимание это обстоятельство и решая уравнения (1) относительно X', Y', Z' по способу определителей, получим

$$\left.\begin{aligned} X' &= l_1X + m_1Y + n_1Z, \\ Y' &= l_2X + m_2Y + n_2Z, \\ Z' &= l_3X + m_3Y + n_3Z; \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

мы видим, что X', Y', Z' выражаются через X, Y, Z подстановкой, которая получается из первоначальной простой заменой столбцов на строки (и обратно) в таблице коэфициентов первоначальной подстановки. Полученная подстановка будет, конечно, удовлетворять, в силу условия ортогональности (2), уравнениям, аналогичным (3), которые получаются из последних путем замены в таблице коэфициентов строк столбцами, и обратно.

Таким образом мы получим соотношения (3a) и (4a) предыдущего параграфа; теперь они выведены из условий (3) чисто алгебраическим путем.

73. Углы Эйлера. Как было уже упомянуто в § 71, направления осей одной прямоугольной системы по отношению к другой системе (т. е. ориентировку одной системы по отношению к другой) можно характеризовать при помощи трех углов, называемых *углами Эйлера*: Перейдем к определению этих углов.

Так как речь идет об определении *направлений* осей, то мы можем предположить, что системы осей $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ имеют общее начало O. Предположим, далее, что обе эти системы — левые, что не нарушает общности.

Пусть Δ обозначает прямую пересечения плоскостей $Ox'y'$ и Oxy (черт. 73). Этой прямой мы припишем определенное положительное

направление, т. е. будем ее рассматривать как ось; а именно, за положительное направление Δ мы выберем такое, чтобы система трех направлений Oz, Oz' и Δ была левою.

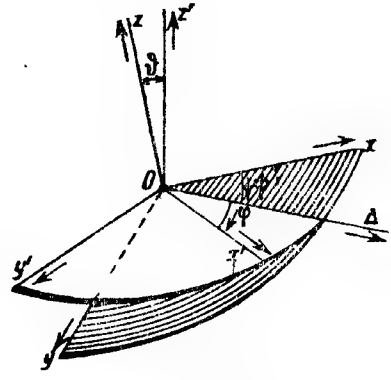
Пусть теперь

$$\psi = \widehat{Ox, \Delta}$$

обозначает угол между Ox и Δ, заключенный в пределах $(0, 2\pi)$ и отсчитываемый в плоскости Oxy в положительном направлении (т. е. по направлению от оси Ox к оси Oy).

Пусть, далее,

$$\vartheta = \widehat{Oz, Oz'}$$



Черт. 73.

обозначает угол между Oz и Oz', заключенный в пределах $(0, \pi)$, и пусть, наконец,

$$\varphi = \widehat{\Delta, Ox'}$$

обозначает угол между осями Δ и Ox', заключенный в пределах $(0, 2\pi)$ и отсчитываемый от оси Δ в положительном направлении в плоскости $Ox'y'$.

Ясно, что задание этих углов вполне определяет положение системы $Ox'y'z'$ относительно системы $Oxyz$. Именно, зная угол ψ, мы можем построить ось Δ; затем, откладывая в плоскости, перпендикулярной к Δ и проходящей через Oz, угол ϑ (по часовой стрелке от оси Oz для наблюдателя, расположенного вдоль Δ [1]); говоря о наблюдателе, расположенном вдоль оси, мы подразумеваем, что ось направлена от ног к голове), мы получим направление Oz'; далее, откладывая в плоскости, перпендикулярной к Oz' и проходящей через Δ, угол φ (от оси Δ в положительном направлении, т. е. по часовой стрелке, для наблюдателя, стоящего вдоль Oz'), мы получим ось Ox'; наконец, откладывая от Ox' (в том же направлении и в той же плоскости) угол $+\frac{\pi}{2}$, мы получим ось Oy'.

Углы ψ, ϑ и φ были введены Эйлером и поэтому называются его именем.

Выведем теперь формулы, выражающие косинусы направлений таблички (A) § 70 через эти углы. Для этого заметим, что новая система $Ox'y'z'$ может быть получена из старой следующим образом: поворачивая систему $Oxyz$ вокруг Oz на угол ψ, мы получим систему $Ox_1y_1z_1$, у которой ось Ox_1 совпадает с Δ, а ось Oz_1 с Oz (черт. 74, *а*). Повернув затем систему $Ox_1y_1z_1$ вокруг Ox_1 на угол ϑ, мы получим систему $Ox_2y_2z_2$, у которой Ox_2 совпадает с Ox_1, а ось Oz_2 составляет с Oz_1

[1]) Так как только в этом случае система осей Oz, Oz' и Δ будет левой (проверьте это на чертеже!).

угол ϑ (черт. 74, *b*) Наконец, повернув систему $Ox_2y_2z_2$ вокруг Oz_2 на угол φ, мы придем, очевидно, к требуемой системе $Ox'y'z'$, причем оси Oz' и Oz_2 совпадают, а ось Ox' составляет с осью Ox_2 угол φ (черт. 74, *c*).

Обозначим, далее, через (X, Y, Z), (X', Y', Z'), (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) координаты одного и того же вектора соответственно в старой, новой и промежуточных системах. Получим, очевидно, следующие последовательные формулы [§ 69, формула (3)]:

а) при переходе от $Oxyz$ к $Ox_1y_1z_1$ (черт. 74, *a*)

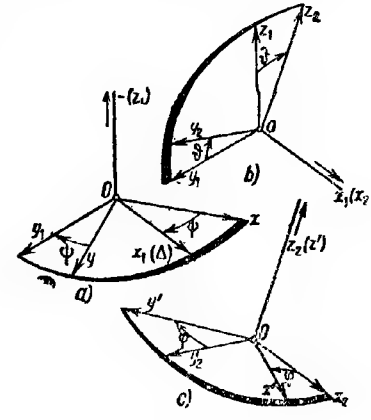
$$\left.\begin{aligned} X &= X_1\cos\psi - Y_1\sin\psi,\\ Y &= X_1\sin\psi + Y_1\cos\psi,\\ Z &= Z_1; \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

b) при переходе от $Ox_1y_1z_1$ к $Ox_2y_2z_2$ (черт. 74, *b*)

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X_2,\\ Y_1 &= Y_2\cos\vartheta - Z_2\sin\vartheta,\\ Z_1 &= Y_2\sin\vartheta + Z_2\cos\vartheta; \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

c) наконец, при переходе от $Ox_2y_2z_2$ к $Ox'y'z'$ (черт. 74, *c*)

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi,\\ Y_2 &= X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi,\\ Z_2 &= Z'. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$



Черт. 74.

Внося (b) в (a) и затем, в полученные выражения, (c), получим сперва

$$\begin{aligned} X &= X_2\cos\psi - (Y_2\cos\vartheta - Z_2\sin\vartheta)\sin\psi,\\ Y &= X_2\sin\psi + (Y_2\cos\vartheta - Z_2\sin\vartheta)\cos\psi,\\ Z &= Y_2\sin\vartheta + Z_2\cos\vartheta \end{aligned}$$

и затем

$$\begin{aligned} X &= (X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi)\cos\psi - [(X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi)\cos\vartheta - Z'\sin\vartheta]\sin\psi,\\ Y &= (X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi)\sin\psi + [(X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi)\cos\vartheta - Z'\sin\vartheta]\cos\psi,\\ Z &= (X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi)\sin\vartheta + Z'\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и сравнивая полученные формулы с формулами (§ 70)

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y' + l_3Z',\\ Y &= m_1X' + m_2Y' + m_3Z',\\ Z &= n_1X' + n_2Y' + n_3Z'. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

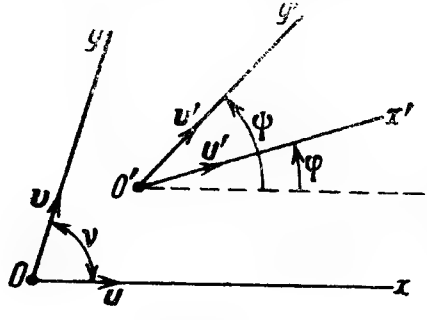
получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi,\\ m_1 &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi,\\ n_1 &= \sin\vartheta\sin\varphi,\\ l_2 &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi,\\ m_2 &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi,\\ n_2 &= \sin\vartheta\cos\varphi,\\ l_3 &= \sin\psi\sin\vartheta,\\ m_3 &= -\cos\psi\sin\vartheta,\\ n_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эти формулы, принадлежащие Эйлеру, легко также получить, пользуясь формулами сферической тригонометрии.

Замечание 1. Если новая система — правая (старая же попрежнему — левая), то углы Эйлера можно определить, например, следующим образом. Возьмем вспомогательную систему осей Ox', Oy', Oz'', в которой первые две оси совпадают с первыми двумя новыми осями Ox', Oy', а третья ось Oz'' направлена противоположно оси Oz'. Определив углы φ, ψ, ϑ для вспомогательной системы (которая будет, конечно, левой), эти же углы можно назвать углами Эйлера для данной правой системы. Легко видеть, что формулы (1) и (2) останутся в силе, если только переменить в формулах (2) знаки выражений для l_3, m_3, n_3 на обратные. Легко также видеть, как надо изменить определения углов φ, ψ, ϑ, когда старая система — правая.

Замечание 2. Формулы (2) показывают, что коэфициенты любой ортогональной подстановки (см. предыдущий параграф) над тремя переменными можно выразить через три вспомогательных параметра φ, ψ, ϑ [1]).



Черт. 75.

Этот факт можно доказать и не опираясь на геометрическое значение ортогональной подстановки.

74. Преобразование необобщенных косоугольных координат на плоскости. Закончим этот отдел рассмотрением формул преобразования необобщенных косоугольных координат в необобщенные же косоугольные на плоскости. Положение новых осей относительно старых будет определено, если даны координаты a, b нового начала относительно старой системы и углы φ и ψ, которые новые оси $O'x'$ и $O'y'$ составляют со старою осью Ox (о направлении отсчета углов см. § 47) (черт. 75).

Для ортов $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ новых осей имеем [см. § 57, формула (7)]:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu}\,\mathbf{u} + \frac{\sin\varphi}{\sin\nu}\,\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= \frac{\sin(\nu-\psi)}{\sin\nu}\,\mathbf{u} + \frac{\sin\psi}{\sin\nu}\,\mathbf{v}' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ν есть координатный угол старой системы.

Отсюда, на основании формул (1а) и (2а) § 65, имеем для координат вектора

$$X = \frac{X'\sin(\nu-\varphi) + Y'\sin(\nu-\psi)}{\sin\nu}, \quad Y = \frac{X'\sin\varphi + Y'\sin\psi}{\sin\nu}. \qquad (2)$$

Для координат точки получим аналогичные формулы, только к правым частям прибавятся соответственно величины a и b.

---

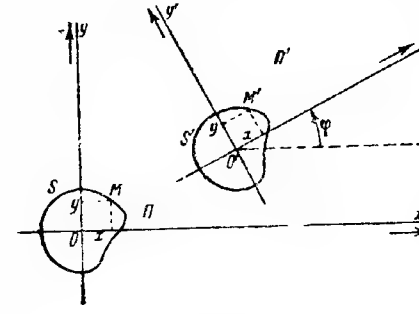
[1]) В подстановках второго класса надо в правых частях выражений для l_3, m_3, n_3 изменить знаки на обратные. В случае двух переменных коэфициенты ортогональной подстановки выражаются, как мы знаем, через один параметр φ.

III. ДВИЖЕНИЯ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Формулы предыдущих отделов дают связь между декартовыми координатами *одной и той же точки* относительно двух различных систем координат. Но эти формулы могут быть истолкованы и иным образом. А именно, их можно рассматривать как соотношения, связывающие координаты *различных* точек относительно одной и той же или также различных систем. Это истолкование приводит к новым понятиям фундаментальной важности, к изложению которых мы и переходим.

75. Движения. Для большей ясности начнем с формул, связанных с преобразованиями прямоугольных координат, и рассмотрим сперва случай двух измерений.

Пусть Oxy — какая-либо система осей прямоугольных координат на плоскости. Вообразим теперь, что мы переместили эту плоскость по самой себе, как жесткое целое, так что система Oxy заняла новое положение $O'x'y'$ (черт. 76). Подробнее надо представить себе дело так. Имеются две наложенные друг на друга плоскости Π и Π' (подобно двум листам бумаги). Первая из этих плоскостей неподвижна, а вторая может скользить по первой. На плоскостях Π и Π' взяты прямоугольные системы Oxy и $O'x'y'$, которые до перемещения плоскости Π' совпадали. После перемещения система $O'x'y'$ занимает вполне определенное положение относительно Oxy; в этом новом положении мы ее и будем рассматривать. Точка, принадлежащая Π', совпадавшая до перемещения с точкой $M(x, y)$ плоскости Π, занимает после перемещения новое положение M'. Пусть x', y' — координаты точки M' относительно той же системы Oxy. Найдем зависимость между координатами x, y старого положения точки с координатами x', y' нового. Для этого применим формулы (5) § 69 к координатам точки M' относительно осей Oxy и $O'x'y'$. Первые, по определению, суть x', y', а вторые, очевидно, равны x, y, ибо ясно, что M' имеет те же координаты относительно $O'x'y'$, какие имеет M относительно Oxy (см. черт. 76). Таким образом находим [1])



Черт. 76.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,\\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + b,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где φ обозначает угол, на который повернулась ось $O'x'$, а a, b — координаты точки O' (в новом ее положении). Мы получили, таким образом, те же формулы, что и в § 69 (только теперь вместо x, y написано x', y', и наоборот), однако смысл этих формул иной: в § 69 фигурируют

[1]) В нашем случае роль „новых" координат точки M' играют x, y, а роль „старых" координат (той же точки) играют x', y'. В формулах § 69 следует взять верхние знаки, ибо $O'x'y'$ получается из Oxy перемещением в своей плоскости.

координаты *одной и той же точки* относительно *различных* систем, а здесь — координаты *различных* точек относительно *одной и той же системы*.

Соотношения (1) приводят в соответствие каждой точке M плоскости Π вполне определенную точку M' плоскости Π', и обратно.

Когда точкам одной плоскости приводятся в соответствие точки другой, так что каждой точке одной плоскости отвечает одна определенная точка другой, и обратно, то говорят, что между этими плоскостями установлено точечное обратимо-однозначное[1]) соответствие или что мы имеем дело с *точечным*[2]) *преобразованием* одной плоскости в другую. В этом случае каждой фигуре на одной плоскости соответствует вполне определенная фигура другой, и обратно.

В нашем случае мы имеем дело с одним из простейших случаев такого соответствия (преобразования): соответствующие фигуры S и S' получаются одна из другой простым перемещением; эти фигуры *конгруэнтны* между собою, т. е. могут быть наложены друг на друга всеми соответствующими точками (черт. 76). Поэтому преобразования вида (1) называются *движениями* или *конгруэнтными преобразованиями*.

Очевидно, что два движения, произведенные одно вслед за другим, приводят опять к движению.

До сих пор мы считали, что в формулах (1) фигурируют координаты соответствующих точек относительно одной и той же системы Oxy. Предположим теперь, что x, y и x', y' обозначают координаты двух точек M и M' плоскостей Π и Π' относительно двух каких-нибудь прямоугольных систем Oxy и $O''x''y''$, причем φ обозначает некоторый угол, а a, b — некоторые числа. Легко видеть, что и в этом случае соответствие, выражаемое формулами (1), есть движение, если только Oxy и $O''x''y''$ принадлежат к одному классу (см. § 69). Действительно, если переместим, как одно целое, плоскость Π' и систему $O''x''y''$ так, чтобы система $O''x''y''$ совместилась с системой Oxy, мы вернемся к предыдущему случаю.

Наряду с преобразованиями вида (1) можно рассматривать и преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + a,\\ y' &= x\sin\varphi - y\cos\varphi + b, \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

соответствующие нижним знакам формул (5) § 69. Если считать, что точки M и M' отнесены к одной и той же системе Oxy, то, на основании сказанного в § 69 очевидно, что преобразование (1a) состоит из движения (1) и последующего зеркального отражения относительно оси Ox. Преобразования этого вида также называются движениями, но

---

[1]) „Обратимо-однозначное" обозначает, что каждой точке одной плоскости соответствует *одна* точка другой, и обратно. В дальнейшем, говоря о соответствии, мы будем часто опускать слова „обратимо-однозначное", но подразумевать их.

[2]) Мы называем преобразования точечными, когда основными объектами преобразований служат точки. Существуют и другие виды преобразований, напр. такие, в которых точкам одной плоскости соответствуют прямые другой. С некоторыми из таких преобразований мы познакомимся ниже.

в отличие от движений в собственном смысле („собственные движения") их называют *несобственными*.

Если в формулах (1a) координаты точек M и M' отнесены к двум различным прямоугольным системам одного и того же класса, то и в этом случае, как легко видеть, мы имеем опять несобственное движение. Напротив, если системы — различных классов, движение, выражаемое формулами (1a), будет собственным; читатель сам легко проверит это.

Можно считать также, что плоскости Π и Π' не наложены друг на друга и что (x, y), (x', y') обозначают координаты точек M и M' относительно двух прямоугольных систем, взятых соответственно на Π и на Π'.

И здесь мы имеем конгруэнтное соответствие, так как при помощи движения (уже в пространстве трех измерений) мы можем наложить плоскость Π' на Π, что приведет к предыдущему случаю.

При допущении движений, выводящих фигуры из их первоначальной плоскости, теряется различие между собственным и несобственным конгруэнтным соответствием плоских фигур, ибо, наложив плоскость Π' на Π той или иной стороной, мы получим тот или другой вид соответствия.

Совершенно аналогично можно рассматривать конгруэнтные соответствия или движения пространственных фигур. И здесь можно мыслить два пространства, „вложенных" одно в другое; это, конечно, необязательно (так же как и в случае плоских движений) и делается только для того, чтобы удобнее различить точки M и M' до и после преобразования.

Пространственные движения характеризуются формулами преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1x + l_2y + l_3z + a, \\ y' &= m_1x + m_2y + m_3z + b, \\ z' &= n_1x + n_2y + n_3z + c, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$\begin{matrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{matrix} \tag{3}$$

есть таблица некоторой ортогональной подстановки, а a, b, c — совершенно произвольные числа. Величины x, y, z и x', y', z' обозначают координаты двух точек M и M', отнесенных к одной и той же или двум различным прямоугольным системам.

Будем сперва считать, что точки M и M' отнесены к одной и той же системе $Oxyz$. Если определитель Δ предыдущей таблицы [1]) равен $+1$, то мы имеем собственное движение, состоящее в том, что точка O перемещается в положение $O'(a, b, c)$, а оси Ox, Oy, Oz принимают направления ортов $\mathbf{u} = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{v} = (l_2, m_2, n_2)$, $\mathbf{w} = (l_3, m_3, n_3)$. Если же $\Delta = -1$, то получается несобственное движение, состоящее из собственного движения и из зеркального отражения относительно одной из плоскостей координат.

[1]) Мы знаем (§ 71), что $\Delta = \pm 1$.

В случае, когда точки M и M' отнесены к двум различным прямоугольным системам, формулы (2) также выражают движение (собственное или несобственное), если таблица (3) есть таблица некоторой ортогональной подстановки (ср. случай двух измерений).

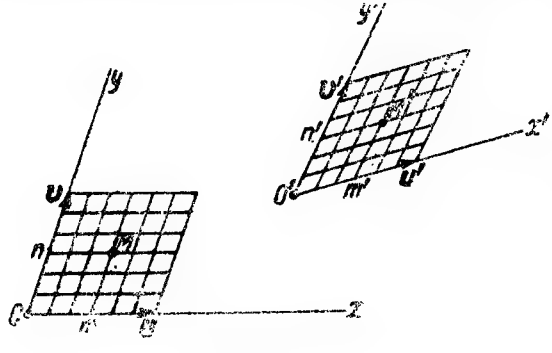
76. Аффинные преобразования. Непосредственным обобщением движений (конгруэнтных преобразований) являются аффинные преобразования. Начнем опять со случая двух измерений. Говорят, что между плоскостями Π и Π' установлено *аффинное* соответствие (или аффинное преобразование), если каждой точке M плоскости Π соответствует точка M' плоскости Π', декартовы координаты которой связаны с декартовыми координатами точки M линейными соотношениями

$$x' = l_1 x + l_2 y + a, \quad y' = m_1 x + m_2 y + b; \tag{1}$$

x, y и x', y' обозначают соответственно координаты точек M и M' относительно каких-либо систем декартовых координат на плоскостях Π и Π'. Коэфициенты l_1, l_2, m_1 m_2 могут быть выбраны совершенно произвольно. Если противное не будет оговорено особо, мы будем считать, что подстановка (1) *неособенная*, т. е. что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

отличен от нуля (при $\Delta = 0$ преобразование называется особенным или выродившимся). Условие $\Delta \neq 0$ гарантирует обратимость подстановки (1): уравнения (1) можно решить относительно x и y и получить для них также линейные выражения через x', y'. Таким образом при $\Delta \neq 0$ соответствие обратимо-однозначное.



Черт. 77.

Чтобы получить более ясное представление о геометрическом характере преобразования (1), будем считать сперва, что плоскости Π и Π' наложены друг на друга и что точки M и M' отнесены к одной и той же системе Oxy декартовых координат.

Пусть O, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — начало и координатные векторы системы Oxy, к которой мы относим точки M и M'. Построим, далее, вспомогательную систему $O'x'y'$ с началом в O' (a, b) и с координатными векторами $\mathbf{u}' = (l_1, m_1)$, $\mathbf{v}' = (l_2, m_2)$ (черт. 77); здесь a, b, l_1, m_1, l_2, m_2 обозначают, разумеется, координаты относительно системы Oxy.

Легко видеть, что точка $M'(x', y')$, получающаяся из точки $M(x, y)$ аффинным преобразованием (1), имеет относительно вспомогательной системы $O'x'y'$ такие же координаты x, y, как точка M относительно Oxy. Действительно, точка, имеющая относительно $O'x'y'$ координаты x, y, будет иметь относительно Oxy координаты x', y', даваемые фор-

мулами (1), как это следует из формул (2) § 66. На основании сказанного, рассматриваемое преобразование можно описать следующим образом: параллелограм, построенный на $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, деформируется (сперва без изменения длин сторон) так, что угол ν между $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ делается равным углу ν' между $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$; затем стороны его удлиняются (или укорачиваются) так, что длины их из $|\mathbf{u}|$ и $|\mathbf{v}|$ обращаются в $|\mathbf{u}'|$ и $|\mathbf{v}'|$; наконец, полученный таким образом параллелограм переносится в новое положение так, что его вершина O переходит в O', а стороны совмещаются с $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{v}'$. Соответствующим образом изменяется положение каждой точки M плоскости: параллелограм $OmMn$ (черт. 77) преобразуется в параллелограм $O'm'M'n'$, который получается таким же изменением угла, последующим растяжением (или укорочением) сторон (в той же пропорции, что и стороны $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) и перенесением в новое положение, тем же движением, что и рассмотренный выше параллелограм[1]). Если мы представим себе сеть прямых, параллельных Ox и Oy и образующих сеть параллелограмов, подобных параллелограму, построенному на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, то после преобразования эта сеть обратится в сеть прямых, параллельных $O'x'$ и $O'y'$, образующих сеть параллелограмов, подобных параллелограму, построенному на $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ (черт. 77).

Покажем теперь, что мы не получим преобразования более общего вида, если будем считать, что в формулах (1) величины x, y и x', y' обозначают координаты точек M и M' относительно различных систем координат на (наложенных друг на друга) плоскостях Π и Π'. Действительно, мы можем отнести точку M' к той же системе Oxy, что и точку M; координаты x'', y'' точки M' относительно этой последней системы выражаются через координаты x', y' той же точки относительно системы, к которой она была первоначально отнесена, линейной неособенной подстановкой

$$x'' = l_1'x' + l_2'y' + a', \quad y'' = m_1'x' + m_2'y' + b'; \qquad (*)$$

внося в правые части вместо x', y' их выражения (1), получим формулы такого же вида, что и (1):

$$x'' = l_1''x + l_2''y + a'', \quad y'' = m_1''x + m_2''y + b'', \qquad (**)$$

связывающие координаты точек M и M', отнесенных уже к одной и той же системе. Коэфициенты l_1'', l_2'' и т. д. последней подстановки легко выражаются через коэфициенты подстановок (1) и (*). Важно отметить, что подстановка (**) неособенная, если, как мы предполагаем, этим свойством обладает подстановка (1). Действительно, легко видеть, что определитель подстановки (**) равен произведению определителей подстановок (1) и (*); предоставляем читателю проверить это (см. также Добавление, § 9[2]).

---

[1]) В дальнейшем (§ 238) будет доказано, что любое аффинное преобразование есть результат растяжений по двум *взаимно перпендикулярным* направлениям и движения.

[2]) В указанном месте это доказано для однородных подстановок; но легко видеть, что свободные члены не влияют на коэфициенты при переменных, которые только и входят в определитель подстановки.

Таким образом, не нарушая общности, мы можем всегда считать, что в формулах (1), выражающих аффинное преобразование, координаты отнесены к одной и той же системе.

Если, наконец, считать, что точки M и M' расположены на различных плоскостях, то достаточно наложить эти плоскости друг на друга, чтобы иметь предыдущий случай.

Докажем теперь некоторые основные свойства аффинного преобразования.

1°. *Преобразование, обратное аффинному, является также аффинным.* Это следует из того, что, решая (1) относительно x, y, получаем формулы такого же вида, выражающие уже x, y через x', y'.

2°. *Два последовательных аффинных преобразования дают снова аффинное преобразование.* Действительно, если, произведя преобразование (1), мы произведем новое преобразование

$$x'' = l_1'x' + l_2'y' + a', \quad y'' = m_1'x' + m_2'y' + b',$$

то, подставляя на место x', y' их выражения (1), получим в результате преобразование вида:

$$x'' = l_1''x + l_2''y + a'', \quad y'' = m_1''x + m_2''y + b'',$$

которое — также неособенное, если два данных — неособенные (ср. сказанное выше).

3°. *При аффинном преобразовании прямые переходят в прямые; параллельные прямые остаются параллельными; отношения параллельных отрезков остаются неизменными.* Для доказательства заметим следующее. Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$—две точки плоскости Π. После преобразования они обратятся в точки $A'(x_1', y_1')$ и $B'(x_2', y_2')$ плоскости Π'. Мы будем говорить, что аффинное преобразование (1) преобразует вектор $\overrightarrow{AB}$ в вектор $\overrightarrow{A'B'}$ (из последующего будет ясно, что не только концы, но и все точки отрезка AB переходят в точки отрезка $A'B'$, но в данный момент это не важно). Координаты $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$ вектора $\mathbf{P} = \overrightarrow{AB}$ связаны с координатами $X' = x_2' - x_1'$, $Y' = y_2' - y_1'$ вектора $\mathbf{P}' = \overrightarrow{A'B'}$ соотношениями

$$X' = l_1X + l_2Y, \quad Y' = m_1X + m_2Y, \tag{1a}$$

которые непосредственно получаются из (1). Из (1a) следует, что вектор $(kX, kY) = k\mathbf{P}$ плоскости Π переходит в вектор $(kX', kY') = k\mathbf{P}'$ плоскости Π'. Таким образом, если до преобразования мы имеем векторное равенство (на плоскости Π)

$$\mathbf{Q} = k\mathbf{P},$$

то после преобразования оно переходит в равенство (на Π')

$$\mathbf{Q}' = k\mathbf{P}',$$

где $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{Q}'$ обозначают векторы, соответствующие $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$; это значит, что параллельные до преобразования векторы остаются параллельными и после него и что их отношение k остается неизменным; в частности, остается неизменным отношение $|k|$ их длин.

Пусть теперь Δ—некоторая прямая на плоскости Π и A, B—две какие-либо ее точки. Пусть после преобразования A и B переходят в точки A' и B' плоскости Π' и пусть Δ' обозначает прямую, проходящую через A', B'. Докажем, что и любая точка C прямой Δ перейдет в некоторую точку прямой Δ'. В самом деле, имеем $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, где k — некоторое число. После преобразования будем иметь $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$, т. е. точка C', соответствующая точке C, расположена на одной прямой с A' и B', а это и требовалось доказать.

Из предыдущего непосредственно вытекает, что параллельные прямые остаются параллельными (ибо остаются параллельными любые векторы, взятые на них) и что отношения параллельных отрезков остаются неизменными.

Отметим, что отношения непараллельных отрезков, вообще говоря, изменяются.

Замечание. Из предыдущего вытекает еще одно важное следствие.

Прежде всего ясно, что векторное равенство $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n$ переходит после преобразования в равенство $\mathbf{P}' = \mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_2 + \ldots + \mathbf{P}'_n$, где штрихами отмечены векторы, полученные из данных аффинным преобразованием. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть многоугольник векторов $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ с замыкающей $\mathbf{P}$; после преобразования этот многоугольник обращается в многоугольник векторов $\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2, \ldots, \mathbf{P}'_n$ с замыкающей $\mathbf{P}'$.

Из этого на основании предыдущего следует еще, что векторное равенство вида

$$\mathbf{P} = k_1\mathbf{P}_1 + \ldots + k_n\mathbf{P}_n \text{ переходит в } \mathbf{P}' = k_1\mathbf{P}'_1 + \ldots + k_n\mathbf{P}'_n, \quad (2)$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — одни и те же в обоих равенствах.

Рассмотрим, в частности, фигуру, состоящую из точки O и непараллельных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, определяющую некоторую систему декартовых координат на плоскости Π; координаты x, y любой точки M плоскости Π относительно этой системы определяются равенством

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u}x + \mathbf{v}y. \quad (3)$$

Подвергнем теперь плоскость Π какому-нибудь аффинному преобразованию. Тогда предыдущее равенство перейдет в следующее:

$$\overrightarrow{O'M'} = \mathbf{u}'x + \mathbf{v}'y,$$

показывающее, *что если подвергнуть элементы* O, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *определяющие координатную систему, тому же аффинному преобразованию, что и всю плоскость, то координаты преобразованных точек относительно преобразованной системы будут точно такими же, как координаты непреобразованных точек относительно первоначальной системы.*

Благодаря этому свойству (обобщенные) декартовы координаты и называются также *аффинными.*

4°. *Аффинное преобразование плоскости вполне определяется заданием трех неколлинеарных точек, в которые должны перейти три заданные неколлинеарные точки.* Пусть в самом деле A, B, C — три заданные неколлинеарные точки на Π и пусть A', B', C' — три заданные неколлинеарные точки, в которые должны соответственно перейти точки A, B, C. Точки A, B, C определяют на плоскости Π систему координат с началом A и координатными векторами $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Этой системе на плоскости Π' соответствует система, с началом в O' и координатными векторами $\mathbf{u}' = \overrightarrow{A'B'}$, $\mathbf{v}' = \overrightarrow{A'C'}$. Этим вполне определяется аффинное соответствие между Π и Π'; а именно, точке M с координатами x, y относительно первой из упомянутых систем соответствует точка M' с такими же координатами относительно второй из систем (см. предыдущее замечание). Таким образом, если через x, y будем вообще обозначать координаты точек плоскости Π относительно первой системы, а через x', y' — координаты точек плоскости Π' относительно второй, то для соответствующих точек этих плоскостей будем иметь

$$x' = x, \quad y' = y \tag{4}$$

(простейший вид линейной подстановки).

Отметим, наконец, следующее свойство аффинного преобразования плоскости.

5°. *Отношение площади преобразованной фигуры к площади первоначальной — одно и то же для всех фигур* (имеющих, разумеется, площадь). Достаточно доказать это предложение для случая, когда рассматриваемые фигуры — параллелограмы, ибо площадь всякой фигуры можно рассматривать как предел суммы площадей параллелограмов.

Будем считать, что плоскости Π и Π' наложены друг на друга и что точки, как до преобразования, так и после него относятся к одной и той же системе координат Oxy.

Итак, пусть S — площадь параллелограма плоскости Π, построенного на векторах $\mathbf{P} = (X_1, Y_1)$ и $\mathbf{Q} = (X_2, Y_2)$. Имеем

$$S = S_0 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

где S_0 — площадь параллелограма, построенного на координатных векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ осей Ox, Oy. После преобразования эта площадь превращается в

$$S' = S_0 \begin{vmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2' & Y_2' \end{vmatrix}.$$

Подставляя в правую часть вместо X_1', Y_1', X_2', Y_2 их значения, получаемые на основании (1а), находим

$$S' = S_0 \begin{vmatrix} l_1X_1 + l_2Y_1 & m_1X_1 + m_2Y_1 \\ l_1X_2 + l_2Y_2 & m_1X_2 + m_2Y_2 \end{vmatrix} = S_0 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix},$$

откуда следует

$$S' = S \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

т. е. отношение $\frac{S'}{S}$ не зависит от выбора параллелограмма, а это и требовалось доказать.

Совершенно аналогично определяется аффинное преобразование в пространстве трех измерений: в этом случае вместо (1) имеем формулы

$$\left.\begin{aligned} x' &= l_1x + l_2y + l_3z + a, \\ y' &= m_1x + m_2y + m_3z + b, \\ z' &= n_1x + n_2y + n_3z + c. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если предыдущая подстановка неособенная, то и аффинное преобразование называется неособенным; в противном случае оно будет особенным или выродившимся. В дальнейшем, если противное не оговорено, мы будем считать преобразование неособенным.

Все свойства 1°—3°, перечисленные для случая двух измерений, остаются в силе и здесь. Доказательства — буквально те же. Кроме свойства 3°, мы имеем теперь еще следующее: при аффинном преобразовании *плоскости переходят в плоскости, и параллельные плоскости остаются параллельными*. Это непосредственное следствие свойства 3°. Далее, вместо свойства 4° имеем теперь: *аффинное преобразование пространства вполне определяется заданием четырех некомпланарных точек*, в которые должны перейти четыре заданные некомпланарные точки.

Наконец, вместо свойства 5° мы имеем теперь следующее: отношение объема преобразованной фигуры к объему первоначальной одно и то же для всех фигур (имеющих объем), а именно, имеет место равенство:

$$V' = V \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству свойства 5°. Само *свойство* 5°, как легко видеть, *остается в силе для фигур, расположенных в одной и той же плоскости или в параллельных плоскостях*.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что если между точками плоскостей Π и Π' установлено обратимо-однозначное соответствие такое, что каждому вектору $\mathbf{P}$ соответствует вектор $\mathbf{P}'$ и каждому векторному равенству $\mathbf{P} = k_1\mathbf{P}_1 + k_2\mathbf{P}_2$ — равенство $\mathbf{P}' = k_1\mathbf{P}_1' + k_2\mathbf{P}_2'$, то соответствие между Π и Π' — аффинное.

Доказательство. Если на Π взять систему координат с началом O и координатными векторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, а на Π' — систему с началом в O' и координатными векторами $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, где штрихами отмечены элементы, соответствующие элементам без штрихов, то координаты соответствующих точек M и M' будут связаны простейшими линейными соотношениями

$$x' = x, \quad y' = y;$$

следовательно, преобразование аффинное.

2. Доказать, что если фигуру S, расположенную на плоскости Π, спроектировать на другую плоскость Π' параллельно некоторой прямой (не параллельной

ни II, ни II'), то полученная фигура S' связана с S аффинным преобразованием.

Доказательство непосредственно вытекает из предыдущего упражнения.

3. Нетрудно доказать, что если плоские фигуры S и S' получены одна из другой аффинным преобразованием, то (изменив в случае надобности одну из фигур подобно самой себе) эти фигуры можно расположить в пространстве так, чтобы одна из них была параллельной проекцией другой.

4. Можно доказать, что если мы имеем преобразование плоскости, удовлетворяющее следующим условиям:

1° каждой точке M соответствует определенная точка M', и обратно;

2° точкам на конечном расстоянии соответствуют точки на конечном расстоянии;

3° каждой прямой соответствует прямая,

то тогда преобразование аффинное. Это предложение остается справедливым и для пространства. В этом случае последнее требование можно заменить требованием, что каждой плоскости соответствует плоскость.

77. Подобные преобразования и движения как частные случаи аффинного преобразования. Движения, рассмотренные в § 75, представляют собою, очевидно, частный случай аффинных преобразований; они характеризуются тем, что в прямоугольной системе координат, таблица коэфициентов при переменных в формулах (6) предыдущего параграфа

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{matrix}$$

есть таблица ортогональной подстановки (аналогично для случая двух измерений).

Другим важным частным случаем аффинных преобразований являются *подобные преобразования*, о которых мы скажем несколько слов. Начнем с некоторых понятий, относящихся, в сущности, к области элементарной геометрии.

Две фигуры S и S' (на плоскости или в пространстве) называются *гомотетичными* относительно точки C, если каждой точке M фигуры S можно привести в соответствие некоторую точку M' фигуры S', и обратно, каждой точке M' фигуры S' — некоторую точку M фигуры S так, чтобы имело место соотношение

$$\overrightarrow{CM'} = k\overrightarrow{CM}, \qquad (1)$$

Черт. 78.

где k — постоянное число, называемое „отношением подобия“. Точка C называется *центром гомотетии* или *центром подобия* (черт. 78).

Гомотетия называется *прямой*, если $k > 0$, *обратной*, если $k < 0$. Две фигуры называются *подобными*, если путем надлежащего движения одной из них [1]) их можно сделать гомотетичными [2]). Подобие будет прямым или обратным в зависимости от знака k.

[1]) Или обеих, что сводится к тому же.

[2]) Движения допускаются как собственные, так и несобственные.

Гомотетичные фигуры называются также *подобными и подобно расположенными*, если $k > 0$, или подобными и обратно расположенными, если $k < 0$.

Заметим, что иногда точки двух гомотетичных фигур могут быть приведены в соответствие различным образом, так что может одновременно существовать несколько центров подобия; далее, две данные фигуры в данном положении могут быть одновременно гомотетичными прямым и обратным образом.

Если известно, что две данные фигуры гомотетичны, и если даны две точки M_1, M_2 одной фигуры, соответствующие двум данным точкам M_1' и M_2' другой фигуры, то для построения центра гомотетии достаточно соединить прямыми соответствующие точки. Пересечение прямых M_1M_1' и M_2M_2' и будет искомым центром гомотетии.

В частном случае, когда $k = 1$, фигуры S и S' попросту совпадают, как это следует из формулы (1). В этом случае центром подобия может, очевидно, служить любая точка пространства, а не только O.

Условимся теперь в некоторых терминах. Пусть какая-либо точка перемещена из положения M в положение M'; вектор $\overrightarrow{MM'}$ мы будем называть *вектором смещения*. Если каждую точку какой-нибудь фигуры переместить так, чтобы векторы смещения различных точек были равны между собою, то получим, очевидно, фигуру, конгруэнтную первоначальной, но в другом положении. Про второе положение говорят, что оно получено из первоначального путем *поступательного смещения*.

Если одна из двух фигур S, S' получена из другой путем поступательного смещения, то говорят, что эти конгруэнтные фигуры *подобно расположены*. Прямые, соединяющие соответствующие точки этих фигур, очевидно, параллельны, т. е. пересекаются в бесконечно удаленной точке, как принято говорить. Поэтому конгруэнтные и подобно расположенные фигуры можно рассматривать как гомотетичные, с бесконечно удаленным центром гомотетии.

Вернемся к общему случаю произвольного k и докажем, что если одну из двух гомотетичных фигур поступательно сместить, то и при новом положении наши фигуры будут гомотетичны, причем друг другу будут соответствовать те же точки фигур (в новом положении); центр гомотетии, однако, переместится вполне определенным образом.

Действительно, пусть фигура S' получила поступательное смещение и пусть $\mathbf{U}$ есть вектор смещения каждой из ее точек. Новое положение M_1' точки фигуры S', занимавшей первоначально положение M', определится формулой

$$\overrightarrow{CM_1'} = \overrightarrow{CM'} + \mathbf{U},$$

откуда

$$\overrightarrow{CM_1'} = \overrightarrow{CM'} - \mathbf{U}.$$

Подставляя это значение $\overrightarrow{CM'}$ в (1), получим

$$\overrightarrow{CM_1'} = k\overrightarrow{CM} + \mathbf{U}. \qquad (2)$$

Покажем, что это соотношение между точками M и M_1' может быть представлено в виде

$$\overrightarrow{C'M'} = k\overrightarrow{C'M}, \tag{3}$$

где C'—некоторая точка (новый центр гомотетии). Действительно, пусть C'—некоторая точка. Тогда имеем

$$\overrightarrow{CM_1'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M_1'}, \quad \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M};$$

подставляя эти выражения в (2), получим

$$\overrightarrow{C'M_1'} = k\overrightarrow{C'M} + (k-1)\overrightarrow{CC'} + \mathbf{U}.$$

Чтобы это соотношение совпало с (3), необходимо и достаточно подобрать C' согласно условию

$$(k-1)\overrightarrow{CC'} + \mathbf{U} = 0. \tag{4}$$

Если $k \neq 1$, получим

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\mathbf{U}}{1-k}; \tag{5}$$

эта формула определяет положение C'. Если $k = 1$, то условию (4) нельзя удовлетворить. Это и понятно, так как при $k = 1$ фигуры S и S' в первоначальном положении совпадают. При поступательном смещении одной из них они делаются конгруэнтными и подобно расположенными. Выше мы условились говорить, что в этом случае центр подобия удален в бесконечность. Естественность этого способа выражения очевидна также на основании формулы (5), которая показывает, что при k, стремящемся к 1, точка C' уходит в бесконечность.

Из сказанного следует также, что если две фигуры подобны, то их всегда можно поместить таким образом, чтобы центром гомотетии служила любая точка O', занимающая любое, наперед заданное положение относительно одной из них. Действительно, из самого определения подобия вытекает, что данные фигуры могут быть расположены так, чтобы они были гомотетичны относительно некоторого центра O. Если O' — какая-либо другая заданная точка, то, подобрав вектор $\mathbf{U}$ согласно формуле (5), т. е. положив

$$\mathbf{U} = (1-k)\overrightarrow{CC'} \tag{6}$$

и поступательно переместив фигуру S', сообщив каждой точке ее смещение, характеризуемое вектором $\mathbf{U}$, получим требуемое положение фигур [1]).

Преобразование (1), при помощи которого из данной фигуры получается фигура, ей гомотетичная, называется гомотетическим преобразованием или *гомотетией*. Покажем, что это — частный случай аффинного преобразования. Действительно, взяв какую-либо систему декарто-

---

[1]) В случае конгруэнтных фигур достаточно их попросту наложить друг на друга. Тогда всякая точка C' будет центром гомотетии.

вых координат и обозначив через (a, b, c), (x, y, z), (x', y', z') координаты точек C, M, M', будем иметь на основании (1)

$$\left.\begin{aligned} x' - a &= k(x - a), \quad y' - b = k(y - b), \\ z' - c &= k(z - c), \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

или

$$x' = kx + a_0, \quad y' = ky + b_0, \quad z' = kz + c_0 \tag{1b}$$

(a_0, b_0, c_0 — постоянные), что представляет собою частный случай аффинного преобразования. Если присоединить к гомотетии произвольное движение (собственное или несобственное), мы получим опять частный вид аффинного преобразования, называемый *подобным преобразованием*, ибо при этом каждая фигура преобразуется в подобную.

В прямоугольных координатах движения и подобные преобразования можно еще характеризовать следующим образом: аффинное преобразование (мы пишем формулы преобразования для векторов)[1])

$$\left.\begin{aligned} X' &= l_1X + l_2Y + l_3Z, \\ Y' &= m_1X + m_2Y + m_3Z, \\ Z' &= n_1X + n_2Y + n_3Z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

есть движение, если для всякого вектора

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \tag{8}$$

Преобразование (7) — подобное, если для всякого вектора

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = k^2(X^2 + Y^2 + Z^2), \tag{9}$$

где k — постоянное отношение подобия (при $k^2 = 1$ имеем, как частный случай, движение).

Первое очевидно, так как условие (8) характеризует, как мы знаем, ортогональную подстановку и, значит, при условии (8), преобразование (7) есть движение.

Второе следует из того, что всякое подобное преобразование есть результат гомотетии и движения. При гомотетии имеем, на основании (1b), следующие формулы преобразования для координат вектора

$$X' = kX, \quad Y' = kY, \quad Z' = kZ,$$

откуда следует (9); так как, далее, при движении выражение $X'^2 + Y'^2 + Z'^2$ остается неизменным, то (9) остается в силе. Легко видеть, что и обратно, из условия (9) следует, что соответствующее преобразование — подобное. Мы предоставляем доказать это читателю.

78. О группах точечных преобразований. О классификации геометрических дисциплин. Рассмотренные в предыдущих параграфах преобразования представляют собою частные случаи *точечных преобразований* общего вида, состоящих в том, что каждой точке $M(x, y, z)$ пространства приводится в соответствие вполне определенная точка

[1]) Из этих формул получаются формулы преобразования для точек, если к правым частям прибавить свободные члены.

$M'(x', y' z')$, так что x', y', z' являются вполне определенными функциями от x, y, z:

$$x' = \varphi_1(x, y, z), \quad y' = \varphi_2(x, y, z), \quad z' = \varphi_3(x, y, z). \tag{1}$$

Если, в частности, φ_1, φ_2, φ_3 — линейные функции от x, y, z, то мы получаем рассмотренное выше аффинное преобразование.

Во всем дальнейшем мы будем считать, что соотношения (1) однозначно-обратимы, т. е. что их можно решить однозначным образом относительно x, y, z:

$$x = \psi_1(x', y', z'), \quad y = \psi_2(x', y', z'), \quad z = \psi_3(x', y', z'). \tag{1a}$$

Преобразование (1а) называется обратным преобразованию (1).

Фундаментальную роль в современной геометрии играет понятие *группы преобразований*. Пусть дана некоторая совокупность преобразований[1]) (содержащая конечное или бесчисленное множество преобразований). Говорят, что эта совокупность преобразований составляет *группу*, если:

1° последовательность двух преобразований, принадлежащих совокупности, дает преобразование, также принадлежащее этой совокупности;

2° преобразования, обратные преобразованиям, входящим в эту совокупность, также входят в нее.

Если некоторая часть преобразований, принадлежащих данной группе, также в свою очередь составляет группу, то эта последняя называется *подгруппой* предыдущей.

Например, совокупность всех *аффинных преобразований* пространства составляет группу, ибо последовательность двух аффинных преобразований есть опять аффинное преобразование, и обратное аффинному — также аффинное.

Совокупность всех *подобных преобразований* составляет, очевидно, также группу, которая является подгруппой группы аффинных преобразований.

Далее, совокупность всех *движений* представляет группу, являющуюся подгруппой подобных преобразований.

Из группы движений можно выделить, например, еще подгруппу собственных движений.

Наоборот, совокупность несобственных движений не есть уже группа, так как последовательность двух несобственных движений приводит к собственному движению.

Аффинные преобразования составляют, в свою очередь, подгруппу группы *проективных преобразований*, с которой мы познакомимся в главе VI.

Ф. Клейну принадлежит чрезвычайно плодотворная идея, изложенная им в его знаменитой „Эрлангенской программе“ (1872), положить понятие группы преобразований в основу классификации геометрических дисциплин; мы ограничимся здесь самыми элементарными сведениями,

---

[1]) Мы пока ограничиваемся точечными преобразованиями.

касающимися этого круга вопросов[1]). Оставаясь в области понятий элементарной геометрии, можно сказать, что геометрия изучает те свойства фигур, которые не зависят от их положения в пространстве и от их абсолютных размеров. В соответствии с этим под „геометрическими свойствами" фигур и под „геометрическими величинами" понимают такие свойства и величины, которые остаются неизменными при всех возможных движениях и гомотетических преобразованиях. Совокупность таких преобразований составляет группу подобных преобразований, которую Клейн называет *основной*, или *метрической*. Совокупность свойств, остающихся неизменными (или *инвариантными*) при преобразованиях основной группы, и составляет, по Клейну, предмет элементарной (или *метрической*) геометрии. К числу свойств или величин, остающихся неизменными при преобразованиях основной группы, относятся, например, свойство линии быть прямой, параллельность двух прямых, отношение длин двух отрезков (произвольно расположенных), угол между двумя прямыми и пр. Эти свойства и величины рассматриваются поэтому как „геометрические" с точки зрения элементарной (или *метрической*) геометрии.

Но есть ряд свойств, которые остаются неизменными (инвариантными) и при более общих преобразованиях. Например, свойство линии быть прямой, параллельность двух прямых, отношение двух параллельных отрезков, середина данного отрезка и т. д. остаются неизменными при аффинных преобразованиях общего вида. Совокупность таких свойств может быть выделена как отдельная геометрическая дисциплина — *аффинная геометрия*.

Аналогичным образом может быть выделена дисциплина, называемая *проективной геометрией* (совокупность свойств, остающихся неизменными при проективных преобразованиях, о которых будет сказано в главе VI).

Вообще всякой группе преобразований пространства соответствует определенная геометрическая дисциплина (совокупность свойств, инвариантных по отношению к преобразованиям данной группы).

Одной из самых общих геометрических дисциплин является *топология*, изучающая совокупность свойств, остающихся неизменными при всевозможных непрерывных преобразованиях (к топологическим свойствам принадлежит, например, свойство линии быть замкнутой; с точки зрения топологии нет никакой разницы, например, между окружностью и любой другой замкнутой кривой, которую можно получить из окружности непрерывной деформацией).

Возвращаясь к аффинным преобразованиям, заметим, что уже в предыдущей главе мы выделили в особый отдел (отдел II) формулы, относящиеся к аффинным свойствам, т. е. таким, которые остаются неизменными при преобразованиях аффинной группы. Теперь понятно, почему такие формулы не изменяют своего вида при переходе от прямоугольных координат к любым декартовым. Действительно, пусть данная формула выражает некоторое аффинное свойство фигуры в какой-

[1]) Более подробное изложение см., например, в книге Ф. Клейна, Элементарная математика с точки зрения высшей, том второй, перев. под ред. Д. А. Крыжановского, М.-Л. 1934.

либо, произвольно выбранной, системе прямоугольных координат. Формула эта, по условию, не изменит своего вида, если произвести аффинное преобразование, т. е. произвести над координатами точек фигуры произвольную (неособенную) линейную подстановку. Значит, она не изменит своего вида и при переходе от прямоугольной системы к любой системе декартовых координат, ибо формулы перехода к новой системе выражаются линейными подстановками такого же вида.

Формулы, которые в предыдущей главе выделены под названием „метрических“ (отделы III и IV предыдущей главы), относятся к метрическим свойствам в узком смысле слова, т. е. к свойствам, инвариантным по отношению к движению (без гомотетии); некоторые же из упомянутых формул остаются неизменными только по отношению к собственным движениям (например, формула для объема параллелепипеда в случае, если объему приписывать знак).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ОБ УРАВНЕНИИ ПЛОСКОЙ ЛИНИИ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

В этой главе мы ограничимся рассмотрением линий, расположенных на одной и той же плоскости (плоских линий). Одним из основных вопросов аналитической геометрии (на плоскости) является вопрос об аналитическом представлении линий при помощи уравнений, связывающих их координаты. Несмотря на то, что вопросы, касающиеся *кривых* линий, отнесены к дальнейшим главам курса, изучению прямых линий, мы предпосылаем изложение основных понятий об уравнении линий вообще (§ 79—87). Ознакомление с этими понятиями необходимо для отчетливого усвоения дальнейшего.

I. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

79. Уравнение линии. В элементарной геометрии обычно изучается только одна кривая линия — окружность.

Нам предстоит теперь дать общее определение понятия линии.

Пусть

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

есть некоторое уравнение, связывающее две переменные величины x и y. Это уравнение определяет, вообще говоря, одну из этих величин (например y) как функцию другой (например x); иными словами, разрешая уравнение (1) относительно y, получим

$$y = f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ обозначает некоторую функцию от x; функция эта, конечно, может быть многозначной и однозначной. Мы будем предполагать в дальнейшем, что все значения этой функции непрерывно изменяются с изменением x.

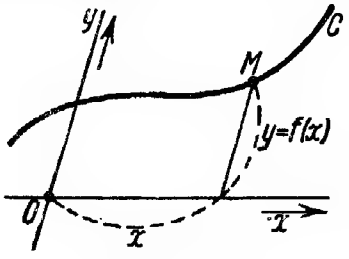
Начнем с рассмотрения случая, когда $f(x)$ — однозначная функция по крайней мере в некотором промежутке изменения x.

Возьмем какую-нибудь систему декартовых координат Oxy и будем рассматривать переменные x и y как координаты некоторой точки M на плоскости Oxy. Каждому значению x (в рассматриваемом промежутке) уравнение (2) приводит в соответствие одно вполне определенное значение y (черт. 79)[1]).

[1]) Здесь и в дальнейшем на чертежах, относящихся к системам декартовых координат, буквы, поставленные против отрезков, параллельных осям, обозначают отношения их длин или алгебраических значений к длинам соответствующих координатных векторов; в случае необобщенных координат эти буквы обозначают длины или алгебраические значения соответствующих отрезков.

Следовательно, каждому значению x соответствует одна вполне определенная точка M на плоскости, имеющая координатами x и $y=f(x)$.

Если теперь x станет пробегать непрерывный ряд значений, то соответствующая точка M станет непрерывно перемещаться по плоскости Oxy, описывая некоторое геометрическое место C; это геометрическое место называется *линией*.



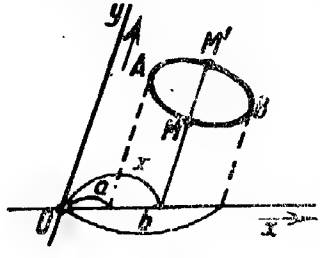
Черт. 79.

Мы предположили $f(x)$ однозначной; но это ограничение несущественно; действительно, если $f(x)$ многозначна, то каждому значению x будет соответствовать не одно, а несколько значений $y=f(x)$, т. е. несколько точек M, M', M'', ... на плоскости. При изменении x каждая из этих точек опишет некоторое геометрическое место; каждое из этих геометрических мест (а также их совокупность) представляет собою то, что мы называем линией (см. черт. 80; на этом чертеже каждому значению x в промежутке $a<x<b$ соответствуют две точки; когда x изменяется в указанном промежутке, эти точки описывают соответственно дуги AMB и $AM'B$; совокупность их представляет замкнутую линию. Значениям x вне указанного промежутка не соответствуют никакие точки).

Замечание. Точки M, M', M'', ..., соответствующие одному и тому же значению x, могут описать и несвязанные между собою линии; совокупность этих линий все-таки называется линией, представляемой уравнением (2).

Резюмируем теперь сказанное.

Линия (на плоскости), по нашему определению, *представляет собою геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению с двумя переменными вида* (2) *или, что все равно, вида* (1).



Черт. 80.

Уравнение (1), или (2), определяющее линию, называется *уравнением* этой *линии*.

По самому определению линии уравнение (2), или, что все равно, уравнение (1), удовлетворяется тогда и только тогда, когда x и y представляют собою координаты некоторой точки данной линии. Итак, *уравнением данной линии* (*на плоскости*) *называется уравнение с двумя переменными вида* (1), *которое удовлетворяется тогда и только тогда, если на место переменных x и y подставить координаты какой-либо точки этой линии.*

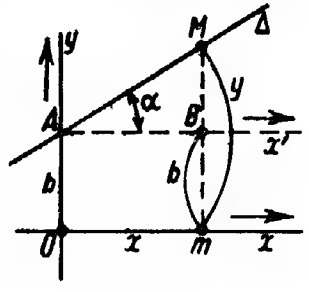
Короче, *уравнение данной линии есть соотношение, связывающее координаты точек, расположенных на данной линии* (*и только этих точек*).

Для сокращения речи мы будем в дальнейшем часто называть линию, представляемую уравнением $\Phi(x, y)=0$, просто „линией $\Phi(x, y)=0$“.

Замечание. Необходимо отметить, что данное нами определение линии — слишком общее. Оно охватывает и такие геометрические образы, которые очень разнятся от того, что мы привыкли называть линией.

Для того чтобы приблизить (более или менее) данное выше определение линии к тому интуитивному представлению о ней, которое у нас имеется, следует наложить на функции $\Phi(x, y)$ или $f(x)$ в уравнениях (1) или (2) некоторые ограничения (непрерывность, дифференцируемость до известного порядка и пр.). См. об этом в курсах дифференциальной геометрии и анализа.

80. Примеры: уравнения прямой линии и окружности. Для пояснения сказанного в предыдущем параграфе, а также для подготовки к общим предложениям, изложенным в дальнейшем, мы составим уравнения двух простейших линий — прямой и окружности [1]). Читателю усиленно рекомендуется внимательно проделать все упражнения, приведенные в конце этого параграфа, не смущаясь их чрезвычайной простотой; эти примеры очень облегчат усвоение общих предложений, выводимых в дальнейшем.



Черт. 81.

Во всем этом параграфе *координаты* для простоты *предполагаются прямоугольными*.

1. *Уравнение прямой* [2]). Пусть Δ есть прямая на плоскости Oxy, не параллельная оси Oy (черт. 81). Положение прямой будет вполне определено, если известны ордината [3]) $b = OA$ точки пересечения прямой с осью Oy и угол α, который прямая составляет с осью Ox. Этот угол отсчитывается от Ox в положительном направлении, или, что все равно, от вспомогательной оси Ax', одинаково направленной с осью Ox.

Пусть $M(x, y)$ есть любая точка прямой Δ. Имеем, очевидно, $BM = AB \cdot \operatorname{tg}\alpha$ (обозначения указаны на чертеже). Здесь под BM и AB мы подразумеваем алгебраические значения векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно по направлениям осей Oy и Ox. Читатель легко убедится, что предыдущая формула справедлива и в смысле знаков.

Имеем, далее, $BM = y - b$, $AB = x$. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, получим

$$y - b = \operatorname{tg}\alpha \cdot x,$$

или

$$y = ax + b, \qquad (1)$$

[1]) Этим самым будет показано, что прямая и окружность подходят под общее определение линий, данное в предыдущем параграфе.

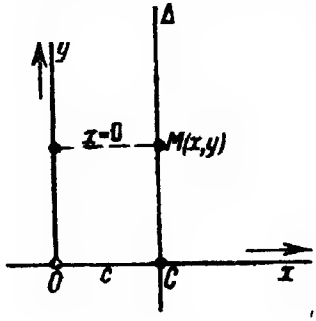
[2]) Уравнение прямой будет выведено в дальнейшем еще иным путем; здесь это уравнение выводится в качестве примера для пояснения сказанного в предыдущем параграфе.

[3]) Под OA надо, конечно, подразумевать алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{OA}$ по оси Oy.

где для краткости введено обозначение

$$\operatorname{tg}\alpha = a. \tag{2}$$

Уравнению (1) удовлетворяют координаты всякой точки нашей прямой, и легко убедиться, что, обратно, всякая точка, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, непременно находится на нашей прямой. Следовательно, (1) есть уравнение прямой Δ. Напомним, что в этом уравнении a и b обозначают постоянные величины ($a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = OA$).



Черт. 82.

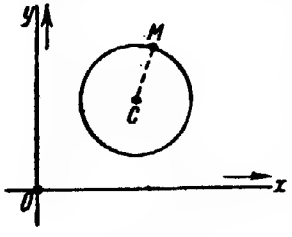
Величина a называется *угловым коэффициентом*, так как она зависит от угла прямой Δ с осью Ox, а величина b — *начальной ординатой* (т. е. ординатой, соответствующей нулевому значению абсциссы).

Рассмотрим теперь исключенный нами выше частный случай, когда прямая Δ параллельна оси Oy (черт. 82). В этом случае положение прямой вполне определяется абсциссой $c = OC$ — точки пересечения прямой с осью Ox. Ясно, что координаты всех точек — $M(x, y)$ прямой (и только этих точек) удовлетворяют соотношению

$$x = c. \tag{3}$$

Это соотношение и представляет собою уравнение прямой Δ; то обстоятельство, что вторая координата (y) не входит в это уравнение, никакого значения не имеет.

Возвращаясь теперь к общему случаю, заметим, что если дано уравнение прямой, то ее очень легко построить. Для этого достаточно найти две какие-либо ее точки. Чтобы найти две такие точки, достаточно придать переменной x в уравнении (1) два различных частных значения x_1, x_2 и вычислить по формуле (1) соответствующие значения переменной y; пусть эти значения будут y_1, y_2. Тогда точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будут точками, расположенными на нашей прямой (см. упражнения в конце параграфа).



Черт. 83.

2. *Уравнение окружности.* Составим теперь уравнение окружности в предположении, что дан центр $C(a, b)$ ее и радиус r (черт. 83).

Наша окружность, по определению, есть геометрическое место точек, расстояние которых до точки $C(a, b)$ равно постоянной величине r.

Пусть $M(x, y)$ — любая точка на плоскости. Расстояние ее до C равно

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2};$$

для того чтобы точка M находилась на окружности, необходимо и достаточно условие

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r,$$

или, по уничтожении радикала

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{4}$$

Это уравнение и представляет уравнение данной окружности. Действительно, из самого вывода ясно, что оно удовлетворяется тогда и только тогда, когда x и y представляют собою координаты какой-либо точки на окружности.

Уравнение окружности с центром в начале координат имеет более простой вид:

$$x^2+y^2=r^2. \tag{5}$$

Замечание. Уравнение вида

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0, \tag{6}$$

где A и B — постоянные, можно переписать так:

$$(x+A)^2+(y+B)^2=A^2+B^2-C.$$

Если $A^2+B^2-C>0$, то можно положить $A^2+B^2-C=r^2$; тогда, очевидно, что (6) представляет собою уравнение окружности с центром в точке $(-A,-B)$ и с радиусом $r=\sqrt{A^2+B^2-C}$.

Итак, уравнение вида (6) при соблюдении неравенства

$$A^2+B^2-C>0$$

представляет уравнение окружности (в прямоугольных координатах). Ясно, что и, обратно, уравнение любой окружности, т. е. уравнение (4), по раскрытии скобок и перенесении r^2 в левую часть, принимает вид (6).

Уравнение несколько более общего вида, чем (6):

$$A_0(x^2+y^2)+2Ax+2By+C=0, \tag{6a}$$

где $A_0\neq 0$, всегда можно привести к виду (6), разделив обе части на A_0. Поэтому и уравнение (6а) представляет окружность, если соблюдено некоторое неравенство, написать которое предоставляем читателю.

Упражнения

1. Дано уравнение прямой $y=2x-3$. Найти точки M_1, M_2, M_3, M_4 этой прямой, абсциссы которых равны соответственно $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=2$.

Ответ. Ординаты этих точек будут соответственно:

$$y_1=-3,\quad y_2=-1,\quad y_3=-5,\quad y_4=1.$$

2. Построить (пользуясь, например, миллиметровой бумагой) точки M_1, M_2, M_3, M_4 предыдущего упражнения и проверить, наложив линейку, что эти точки расположены на одной прямой.

3. Построить прямую, уравнение которой есть $y=-2x+4$.

Решение. Полагая, например, $x=0$, получим $y=4$, полагая $x=1$, получим $y=2$. Чтобы произвести построение, достаточно построить точки $(0,4)$ и $(1,2)$ и соединить их прямой.

4. Написать уравнение прямой, параллельной оси Oy и пересекающей ось Ox в точке, абсцисса которой равна -2.

Ответ. $x=-2$.

5. Написать уравнения осей Ox и Oy.

Ответ. Уравнение оси Oy есть $x=0$. Уравнение оси Ox есть $y=0$.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и делящей пополам угол между положительными направлениями осей Ox и Oy.

Ответ. $x=y$, или $x-y=0$.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(0, 3)$ и составляющей с осью Ox угол в 60°.

Ответ. $y=x\sqrt{3}+3$.

8. Уравнение прямой есть $y=3x-1$. Найти угол α, который она составляет с осью Ox.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha=3$.

9. Уравнение прямой есть $y=-3x+6$. Найти точку ее пересечения с осью Ox.

Решение. Координаты $(x, 0)$ искомой точки должны удовлетворять предыдущему уравнению. Следовательно, абсцисса ее должна удовлетворять уравнению:

$$0=-3x+6,$$

откуда

$$x=2.$$

Проверить полученный результат, построив рассматриваемую прямую на миллиметровой бумаге.

10. Написать уравнение окружности с центром в точке $(-1, 2)$ и радиусом, равным 5.

Ответ. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, или $x^2+y^2+2x-4y=20$.

11. Показать, что уравнение $x^2+y^2+2x+2y=14$ есть уравнение окружности; найти центр и радиус окружности.

Решение. Предыдущее уравнение можно переписать, очевидно, так:

$$(x+1)^2+(y+1)^2=16.$$

Следовательно, центр находится в точке $(-1, -1)$, а радиус равен 4.

12. Найти точку M пересечения прямых, уравнения которых таковы:

$$y=2x-1 \quad \text{и} \quad y=3x-2.$$

Решение. Координаты (x, y) точки пересечения должны удовлетворять обоим предыдущим уравнениям, так как точка M находится как на одной, так и на другой прямой. Поэтому мы получим искомую точку, решив систему уравнений:

$$y=2x-1,$$
$$y=3x-2.$$

Это решение дает $x=1$, $y=1$. Значит, точка пересечения есть точка $M(1, 1)$.

Проверить полученный результат графически, построив на миллиметровой бумаге рассматриваемые прямые.

13. Найти точки пересечения окружности, уравнение которой есть $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, и прямой, уравнение которой есть $y=2x$.

Решение. Координаты искомых точек удовлетворяют обоим предыдущим уравнениям (ср. предыдущее упражнение). Решая совместно эти два уравнения, найдем два решения:

$$x_1=\frac{5+2\sqrt{5}}{5}, \quad y_1=\frac{10+4\sqrt{5}}{5}$$

и

$$x_2=\frac{5-2\sqrt{5}}{5}, \quad y_2=\frac{10-4\sqrt{5}}{5}.$$

Точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) будут искомыми точками пересечения.

81. Параметрическое представление линии. Вместо того чтобы для аналитического представления линии пользоваться уравнением вида

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{1}$$

часто бывает удобно выражать переменные координаты точек линии при помощи третьей вспомогательной переменной или *параметра* t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются обыкновенно непрерывными функциями t.

Исключение t из двух последних уравнений приводит к одному уравнению вида (1), т. е. к обычному виду уравнения линии.

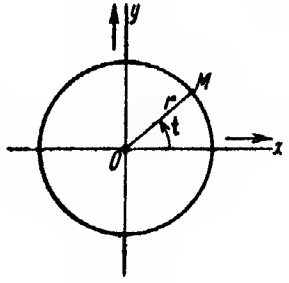
Приведенный выше метод представления кривой при помощи уравнения

$$y = f(x)$$

есть частный случай параметрического представления; действительно, стоит только положить $x = t$, чтобы последнее уравнение свелось к совокупности двух уравнений:

$$x = t, \quad y = f(t),$$

т. е. к уравнениям вида (2).



Черт. 84.

Параметрическое представление линии напрашивается само собой, если ее рассматривать как путь, описываемый точкой, движущейся по определенному закону. Если в этом случае мы обозначим через t время, протекшее от произвольно выбранного начального момента, то x и y (координаты движущейся точки) будут определенными непрерывными функциями t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

ибо раз закон движения известен, каждому моменту времени t соответствует вполне определенное положение точки, или, что все равно, вполне определенные значения координат x и y.

Возьмем для примера окружность [1]) радиуса r с центром в начале координат O. Пусть $M(x, y)$ — любая точка окружности. Будем считать координаты прямоугольными.

Обозначим через t угол, составляемый радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, предполагая, что этот угол отсчитывается от Ox в положительном направлении. Легко видеть, что (черт. 84)

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

Это и есть искомое параметрическое представление окружности.

Для того чтобы перейти от параметрического представления к уравнению окружности, достаточно исключить t из предыдущих уравнений. Возводя их с этой целью в квадрат и складывая, получим

$$x^2 + y^2 = r^2$$

[1]) Параметрическое представление прямой будет выведено ниже.

(так как $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$); мы получили, как и следовало ожидать, уравнение (5) предыдущего параграфа.

82. Уравнения линии в различных системах координат. Вид уравнения линии зависит, конечно, не только от вида самой линии, но и от выбора системы координат. Если вместо одной системы координат взять другую, то уравнение данной линии изменится определенным образом.

Пусть

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

есть уравнение данной линии, отнесенной к определенной системе Oxy декартовых координат. Пусть, далее, взята какая-либо другая система $O'x'y'$ декартовых координат. Координаты (x, y), (x', y') одной и той же точки относительно этих двух систем связаны соотношениями вида (§ 66):

$$x = a + l_1 x' + l_2 y', \quad y = b + m_1 x' + m_2 y'; \tag{2}$$

подставляя эти выражения в (1), получим уравнение вида

$$\Phi_1(x', y') = 0, \tag{3}$$

где для краткости введено обозначение

$$\Phi(a + l_1 x' + l_2 y', \quad b + m_1 x' + m_2 y') = \Phi_1(x', y'). \tag{4}$$

Уравнение (2) представляет собою уравнение данной линии, отнесенной к новой системе осей $O'x'y'$.

До сих пор для аналитического представления линий мы пользовались системой декартовых координат. Однако с таким же успехом можно было бы воспользоваться любой другой системой. Какую бы систему мы ни положили в основу, всегда возможно составить уравнение данной линии, т. е. уравнение с двумя переменными, которое удовлетворяется тогда и только тогда, если на место переменных подставить координаты какой-либо точки данной линии.

Если (1) есть уравнение данной линии относительно системы декартовых координат, то, чтобы перейти от этого уравнения к уравнению той же линии относительно любой другой системы, достаточно на место x и y подставить их выражения через новые координаты.

Пусть, например, уравнение

$$\Phi(x, y) = 0$$

есть уравнение данной линии относительно декартовой, прямоугольной системы координат.

Полагая (см. § 60)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

мы преобразуем предыдущее уравнение в следующее:

$$\Phi_1(\rho, \varphi) = 0, \tag{5}$$

где для краткости введено обозначение

$$\Phi_1(\rho, \varphi) = \Phi(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Уравнение (5) представляет собою уравнение данной линии относительно полярной системы координат, связанной с первоначальной системой, как указано в § 60.

83. Основные вопросы, связанные с аналитическим представлением линии. Аналитическое представление линии при помощи уравнения дает нам возможность изучить вид и свойства ее средствами, представляемыми нам математическим анализом.

Прежде всего можно составить себе представление о виде линии, уравнение которой задано, определив положение на плоскости ряда достаточно близких точек ее. Это можно сделать следующим образом.

Пусть

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1}$$

есть уравнение рассматриваемой линии относительно какой-либо системы координат. Решив его относительно y[1]), получим уравнение вида

$$y = f(x). \tag{2}$$

Придавая переменной x ряд достаточно близких значений x_1, x_2, x_3 и т. д., мы сможем, пользуясь соотношением (2), вычислить соответствующие значения переменной y; пусть эти значения суть $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ и т. д. Нанося на бумаге точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) и т. д., получим ряд точек, принадлежащих данной линии, а соединяя эти точки плавной чертой, получим приблизительное представление об ее форме.

(Если мы имеем дело с прямоугольной декартовой системой, то удобнее всего для нанесения точек пользоваться миллиметровой бумагой.)

Если линия представлена параметрически

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

то для нанесения ряда ее точек достаточно придать параметру ряд достаточно близких значений t_1, t_2, t_3 и т. д. и вычислить при помощи предыдущих уравнений координаты соответствующих точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) и т. д., принадлежащих нашей линии.

Указанный способ изучения формы линии (при помощи построения отдельных точек) есть, так сказать, механический способ. Такой способ очень часто дает вполне достаточные для практических целей результаты, но часто также может оказаться недостаточным, так как он, в большинстве случаев, не дает возможности с полной уверенностью судить об общих свойствах линии, не дает нам общей точки зрения. Очень многие качественные свойства кривой могут ускользнуть от нас при таком механическом изучении.

Для более точного качественного и количественного изучения линии требуется изучение ее уравнения методами анализа.

В простейших случаях (и для изучения простейших свойств) можно обходиться средствами элементарной математики; в более же сложных

[1]) Мы предполагаем здесь, что это возможно сделать и что y есть однозначная функция x по крайней мере в некотором промежутке изменения переменной x. Если y — многозначная функция, то каждому значению x будет соответствовать несколько значений y, что не меняет по существу рассуждений, приведенных в тексте (см. § 79).

случаях приходится прибегать к средствам дифференциального и интегрального исчислений. Эти последние случаи относятся уже к области дифференциальной геометрии.

Иногда уравнение изучаемой линии не дается непосредственно, и линия задается как *геометрическое место точек*, удовлетворяющих некоторым условиям. Тогда для изучения этой линии методами аналитической геометрии надо прежде всего составить ее уравнение (или представить ее параметрически). Укажем в общих чертах как это делается. Вспомним прежде всего, что надо подразумевать под словами „геометрическое место". Геометрическим местом точек (на плоскости) называется совокупность точек плоскости, положение которых не произвольно, а удовлетворяет некоторым заданным условиям. Задать геометрическое место — это значит задать условия, которым должны удовлетворять точки геометрического места.

Предположим теперь, что задано какое-либо геометрическое место. Нас в данный момент интересуют следующие вопросы: 1) узнать, представляет ли собою заданное геометрическое место линию; 2) в случае положительного ответа составить уравнение этой линии.

Эти два вопроса решаются одновременно следующим образом. Возьмем какую-либо систему координат; пусть x, y обозначают координаты произвольной точки M рассматриваемого геометрического места. Положение точки M подчиняется определенным условиям, характеризующим это геометрическое место. Но, так как положение точки M вполне характеризуется ее координатами x, y, то условия, которым должно удовлетворять положение M, сводятся к некоторым условиям, связывающим величины x и y. Эти последние условия могут свестись к одному единственному уравнению вида

$$\Phi(x, y) = 0; \tag{1}$$

если это имеет место, то рассматриваемое геометрическое место есть линия, выражаемая уравнением (1), и наша задача решена.

Может, однако, случиться, что упомянутые условия не могут быть выражены одним уравнением вида (1). Тогда рассматриваемое геометрическое место не есть линия.

В некоторых случаях из самого определения геометрического места непосредственно вытекает, что положение точек этого геометрического места вполне характеризуется значениями некоторой переменной величины (параметра) t. Это значит, что координаты x и y являются функциями этой величины, т. е. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Значит, в этом случае рассматриваемое геометрическое место есть линия; параметрическое представление ее будет найдено, если будут найдены функции φ и ψ.

До сих пор мы говорили об изучении свойств линий при помощи изучения функциональной зависимости между координатами ее точек.

Но уравнение линии можно использовать и с обратной целью, т. е. с целью изучения данной функциональной зависимости при помощи линии, представляемой этой зависимостью. Именно, если дана функциональная зависимость, связывающая две переменные x и y, т. е. дано соотношение

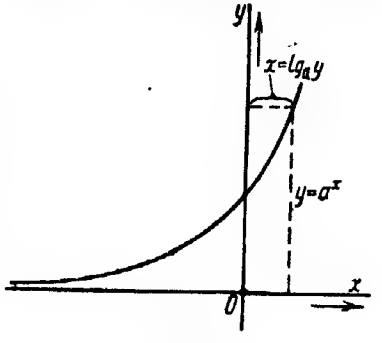
$$y = f(x).$$

где $f(x)$ — данная функция, то можно, взяв какую-либо определенную систему координат, построить линию, уравнением которой служит предыдущее уравнение. Линия эта даст нам ясное представление о характере изменения зависимой переменной y при изменении независимой переменной x. Если мы начертим эту линию на бумаге, то получим *графическое изображение* (или график) данной функции.

Таким графиком можно часто с успехом заменить таблицы, дающие значения y. Например, построив график функциональной зависимости $y = 10^x$ или $x = \lg y$, можно этим графиком (там, где не требуется большой точности) заменить таблицы логарифмов (см. следующий параграф, пример 1).

84. Примеры различных линий. В этом параграфе мы приводим несколько примеров для иллюстрации сказанного, в дополнение к примерам § 80, где были рассмотрены уравнения прямой и окружности [1]).

В приводимых примерах мы, смотря по удобству, пользуемся той или иной системой координат. Надо заметить, что, хотя, теоретически говоря, безразлично, какую координатную систему брать для аналитического представления линии и графического изображения функции, на практике целесообразный выбор системы координат имеет громадное значение. Неудачный выбор может даже в простейших случаях привести к весьма громоздким формулам.



Черт. 85.

1. *Показательная, или логарифмическая, кривая.* Рассмотрим уравнение

$$y = a^x, \tag{1}$$

где a — положительное постоянное число. Если рассматривать x и y как прямоугольные декартовы координаты точки, то линия, представляемая предыдущим уравнением, называется *показательной* (или *логарифмической*) кривой.

Предположим для определенности, что $a > 1$, и исследуем форму нашей кривой.

При $x = 0$, $y = a^0 = 1$; когда x возрастает, то возрастает и a^x; когда x стремится к ∞, то и $y = a^x$ стремится к ∞. При убывании x, a^x, оставаясь все время положительной величиной, стремится к нулю, когда x стремится к $-\infty$.

Кривая имеет вид, изображенный на черт. 85.

Мы видели, что при x, стремящемся к $-\infty$, y беспредельно убывает; это значит, что при x, стремящемся к $-\infty$, точки кривой беспредельно приближаются к оси Ox, никогда на нее не попадая [2]).

---

[1]) Рекомендуем читателю просмотреть также вывод уравнений эллипса, гиперболы и параболы, помещенный в главе VII.

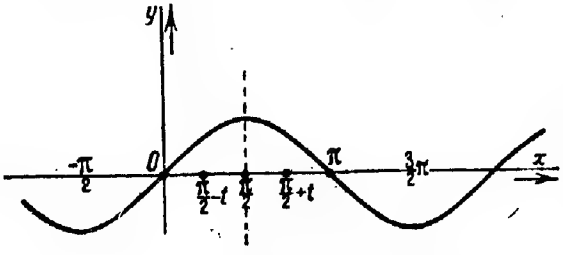
[2]) Мы видим здесь пример того случая, когда „механическое" построение кривой при помощи нанесения на бумагу ряда точек может ввести нас в заблу-

Если существует прямая, обладающая тем свойством, что при неограниченном продолжении в одну или другую сторону она беспредельно приближается к точкам данной кривой, эта прямая называется *асимптотой* данной кривой. Мы видим, что ось Ox является в нашем случае асимптотой.

Если наша кривая вычерчена с достаточной точностью и в достаточно большом масштабе, то ею можно пользоваться для приближенного вычисления a^x, если дано значение x (черт. 85). Этой же кривой можно пользоваться для вычисления x, если дано значение y. Из уравнения (1) следует, что

$$x = \lg_a y; \qquad (2)$$

следовательно, наш график дает возможность вычислять логарифмы по основанию a. Если мы построим кривую для случая $a = 10$, то получим график, который может заменить (если не требуется большой точности) таблицу десятичных логарифмов.



Черт. 86.

2. *Синусоида.* Так называется линия, представляемая в декартовой прямоугольной системе координат уравнением

$$y = \sin x. \qquad (3)$$

Постараемся составить себе представление о форме этой кривой (черт. 86).

При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, кривая проходит через начало координат. Когда x возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $y = \sin x$ возрастает от 0 до максимального значения $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. При дальнейшем возрастании x, y начинает убывать. Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, то кривая симметрична относительно прямой, параллельной оси Oy и пересекающей ось Ox в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$ (черт. 86, пунктирная прямая). При $x = \pi$, y снова обращается в 0, и так как $\sin(\pi + t) = -\sin(\pi - t)$, то часть кривой для промежутка $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ представляет собою часть для промежутка $0 \leqslant x \leqslant \pi$, но только зеркально отраженную от оси Ox и сдвинутую по этой оси на расстояние π.

Далее, часть кривой для промежутка $2\pi \leqslant x \leqslant 4\pi$ будет иметь в точности ту же форму, что и рассмотренная уже часть для промежутка

ждение. Если, например, $a = 10$ и за единицу длины принят сантиметр, то уже, например, для $x = -3$ мы бы получили $y = 10^{-3} = 0{,}001$ *см* $= 0{,}01$ *мм* Но одна сотая миллиметра уже практически неотличима на чертеже от нуля, так что все точки кривой, начиная с $x = -3$ (и даже раньше), попали бы на ось Ox, и мы получили бы ложное представление, что часть нашей кривой сливается с осью Ox.

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, так как $\sin x$ есть периодическая функция с периодом 2π; то же относится к промежутку $4\pi \leqslant x \leqslant 6\pi$ и т. д.

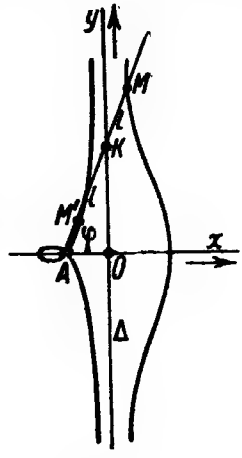
Наконец, для отрицательных значений x получим такую же картину. Кривая будет покрывать сама себя, если ее сдвигать вправо или влево по оси Ox на расстояние, равное 2π.

Предоставляем читателю показать, что кривая, изображаемая уравнением

$$y = \cos x, \tag{4}$$

представляет собою ту же синусоиду, сдвинутую по оси Ox на расстояние, равное $\frac{\pi}{2}$.

3. *Конхоида* есть кривая, определяемая следующим образом. Из некоторой неподвижной точки A проводятся прямые AK и на этих прямых от точки их пересечения K с некоторой неподвижной прямой Δ откладываются (в ту и другую стороны) отрезки KM и KM', равные данной постоянной величине l. Совокупность полученных таким образом точек M и M' называется *конхоидой Никомеда*. Из самого определения ясно, что конхоида состоит из двух ветвей, расположенных по ту и другую стороны прямой Δ. Легко также видеть, что прямая Δ будет асимптотой для обеих ветвей (черт. 87). Возьмем ось Oy прямоугольной системы на прямой Δ и примем за ось Ox ось, перпендикулярную к прямой Δ, направленную от A к точке пересечения O с этой прямой; точка O будет началом координат. Пусть $|\overrightarrow{OA}| = a$. Найдем сперва параметрическое представление конхоиды, приняв за параметр угол φ, составляемый вектором $\overrightarrow{AK}$ с осью Ox и отсчитываемый от оси Ox.



Черт. 87.

Угол φ может изменяться в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Для координат точки M, откладываемой на продолжении вектора $\overrightarrow{AK}$, будем, очевидно, иметь [1])

$$x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM} = \text{пр}_x \overrightarrow{OK} + \text{пр}_x \overrightarrow{KM} = l\cos\varphi,$$
$$y = \text{пр}_y \overrightarrow{OM} = \text{пр}_y \overrightarrow{OK} + \text{пр}_y \overrightarrow{KM} = a\,\text{tg}\,\varphi + l\sin\varphi.$$

Для точек M', откладываемых в противоположную сторону, получим, очевидно, такие же формулы, только вместо l надо взять $-l$.

Итак, параметрическое представление нашей кривой будет

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm l\cos\varphi, \\ y &= a\,\text{tg}\,\varphi \pm l\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

[1]) Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M не изображен на чертеже.

где одновременно берутся либо верхние (для правой ветви), либо нижние (для левой ветви) знаки [1]).

Чтобы от параметрического представления конхоиды перейти к уравнению ее, достаточно исключить φ из предыдущих уравнений. Первое из них дает

$$\cos\varphi = \pm\frac{x}{l};$$

второе дает

$$y = \left(\frac{a}{\cos\varphi} \pm l\right)\sin\varphi,$$

или, подставляя вместо $\cos\varphi$ найденное выше значение,

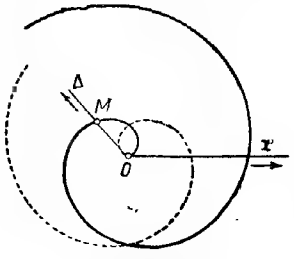
$$y = \pm\left(\frac{al}{x} + l\right)\sin\varphi = \pm\frac{l(x+a)}{x}\sin\varphi,$$

откуда

$$\sin\varphi = \pm\frac{xy}{l(x+a)}.$$

Пользуясь теперь соотношением $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ и подставляя в него найденные значения $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, получим

$$\frac{x^2y^2}{l^2(x+a)^2} + \frac{x^2}{l^2} = 1,$$



Черт. 88.

или, после очевидных упрощений,

$$(x+a)^2(x^2 - l^2) + x^2y^2 = 0. \qquad (6)$$

Это и есть уравнение конхоиды относительно взятой нами прямоугольной системы координат.

4. *Спираль Архимеда.* Пусть ось Δ вращается вокруг неподвижной точки O и пусть по оси Δ движется точка M так, что алгебраическое значение ρ вектора $\overrightarrow{OM}$ (по оси Δ) пропорционально углу поворота φ [2]) этой оси, отсчитываемому от некоторой неподвижной оси Ox (черт. 88). Путь, описываемый точкой, называется *спиралью Архимеда.* По самому определению, имеем

$$\rho = a\varphi, \qquad (7)$$

где a — некоторая постоянная (коэфициент пропорциональности).

Это и есть уравнение спирали Архимеда в полярных координатах, если принять O за полюс, а Ox — за полярную ось.

Будем считать a положительной величиной. Тогда часть спирали, соответствующая положительным значениям φ, имеет вид, изображенный на чертеже сплошной чертой (конечно, спираль делает бесчисленное

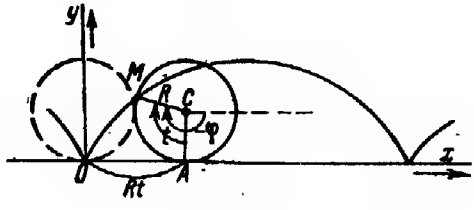
[1]) Читателю предоставляется доказать, что можно ограничиться, например, одним верхним знаком, если придавать углу φ значения не только из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, но и из промежутка $(-\pi, +\pi)$, или (что все равно) из промежутка $(0, 2\pi)$.

[2]) Угол φ мы будем измерять в радианах.

множество завитков при возрастании φ от 0 до ∞); за положительное направление отсчета φ мы приняли направление, противоположное направлению вращения часовой стрелки.

Часть кривой, соответствующая отрицательным значениям φ, изображена пунктиром.

5. *Циклоидой* называется путь, описываемый одной из точек M окружности, катящейся без скольжения по неподвижной прямой. Пусть R обозначает радиус катящейся окружности. Примем за ось Ox прямоугольной системы прямую, по которой катится окружность, а за начало координат — одну из тех точек этой оси, где точка M катящегося круга попадает на ось Ox; ось Oy направим так, как указано на черт. 89.



Черт. 89.

Рассмотрим какое-либо положение катящейся окружности, и пусть A есть точка касания ее с осью Ox, а C — центр ее. Обозначим через t угол ACM, отсчитываемый от направления $\overrightarrow{CA}$ в направлении, указанном на чертеже стрелкой. Ясно, что задание угла t (который мы будем измерять в радианах) вполне определяет положение катящейся окружности и, следовательно, положение точки M. Поэтому величину t можно выбрать за параметр для представления циклоиды. Так как качение происходит без скольжения, то отрезок OA равен длине дуги окружности $AM = Rt$.

Выразим теперь координаты x, y точки M через t.

Если $\overrightarrow{OM}$ есть радиус-вектор точки M (этот радиус-вектор на чертеже не изображен), то

$$x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM} = \text{пр}_x \overrightarrow{OA} + \text{пр}_x \overrightarrow{AC} + \text{пр}_x \overrightarrow{CM},$$
$$y = \text{пр}_y \overrightarrow{OM} = \text{пр}_y \overrightarrow{OA} + \text{пр}_y \overrightarrow{AC} + \text{пр}_y \overrightarrow{CM}.$$

Но, очевидно,

$$\text{пр}_x \overrightarrow{OA} = OA = Rt, \quad \text{пр}_x \overrightarrow{AC} = 0, \quad \text{пр}_x \overrightarrow{CM} = -R\sin t\,^{1}),$$
$$\text{пр}_y \overrightarrow{OA} = 0, \quad \text{пр}_y \overrightarrow{AC} = R, \quad \text{пр}_y \overrightarrow{CM} = -R\cos t\,^{1}).$$

Подставляя эти значения в предыдущие формулы, получим параметрическое представление циклоиды:

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t). \tag{8}$$

---

1) Заметим, что угол φ, который вектор $\overrightarrow{CM}$ составляет с осью Ox и который считается (при нашем выборе системы осей Ox, Oy) положительным при отсчете против движения часовой стрелки, связан с углом t (который считается положительным при отсчете по часовой стрелке) формулой:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - t + 2k\pi \quad (\text{где } k \text{ — целое число})$$

(см. чертеж). Следовательно, $\text{пр}_x \overrightarrow{CM} = R\cos\varphi = -R\sin t$, $\text{пр}_y \overrightarrow{CM} = R\sin\varphi = -R\cos t$.

85. Классификация плоских линий. Исходя из представления линий при помощи уравнений относительно *декартовых* координат, можно установить определенную классификацию плоских линий.

Линия называется *алгебраической*, когда ее уравнению можно придать вид

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $F(x, y)$ обозначает полином, т. е. целую рациональную функцию переменных x и y, иначе говоря, представляет собою сумму членов вида

$$Ax^k y^l, \tag{2}$$

где k и l — целые неотрицательные числа, а A — постоянный коэфициент. В этом случае координата y, определяемая уравнением (1) как неявная функция от x, будет *алгебраической* функцией.

Все неалгебраические линии называются *трансцендентными* кривыми.

Алгебраические линии разбиваются, в свою очередь, на линии различных *порядков*. Именно, линия, изображаемая уравнением (1), называется линией порядка n, если n обозначает степень полинома $F(x, y)$ [1]).

Например, прямая есть алгебраическая линия первого порядка, так как она изображается уравнением первой степени

$$y - ax - b = 0$$

или

$$x - c = 0$$

(см. § 80). Окружность есть алгебраическая линия второго порядка, так как она изображается уравнением второй степени (§ 80).

Линия, уравнение которой

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

есть линия третьего порядка. Конхоида, рассмотренная нами в предыдущем параграфе, есть алгебраическая линия четвертого порядка. (Все другие линии, рассмотренные в предыдущем параграфе, — трансцендентные линии; см. еще § 87, замечание.)

Наша классификация алгебраических линий не имела бы смысла, если бы порядок линии зависел от выбора (декартовой) системы координат. Мы покажем сейчас, что порядок данной линии не зависит от этого выбора.

Действительно, пусть в данной системе декартовых координат уравнение алгебраической линии имеет вид

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — целая рациональная функция переменных x, y.

Взяв какую-нибудь другую декартову систему и подставляя на место x и y их выражения через новые координаты

$$x = a + l_1 x' + l_2 y', \quad y = b + m_1 x' + m_2 y'$$

---

[1]) Степенью одночлена $Ax^k y^l$ называется сумма показателей степеней k и l, т. е. $k + l$. Степенью всего полинома $F(x, y)$ называется наивысшая из степеней слагаемых одночленов.

(см. § 82), мы получим уравнение той же линии относительно новой системы

$$F'(x', y') = 0,$$

где полином $F'(x', y')$ есть результат подстановки в $F(x, y)$ выражений (3). Легко показать, что степени полиномов F и F' одинаковы. Покажем сперва, что степень F' не превосходит степени F. В самом деле, $F(x, y)$ есть сумма членов вида Ax^py^q. Если произвести указанную подстановку, то вместо этого члена получим выражение: $A(a + l_1x' + l_2y')^p(b + m_1x' + m_2y')^q$. Если на самом деле произвести перемножение (т. е. если A умножить p раз на $a + l_1x' + l_2y'$ и q раз на $b + m_1x' + m_2y'$), то, очевидно, получится сумма членов вида $Bx'^ry'^s$, причем ни в одном члене $r + s$ не будет превосходить $p + q$.

Меняя ролями системы Oxy и $O'x'y'$, убедимся тем же способом, что степень F не превосходит степени F'; следовательно, степени F и F' равны между собою.

Итак, мы можем говорить о порядке алгебраической линии, не указывая системы декартовых координат, к которым относится уравнение линии.

Еще один пункт требует разъяснения. Может случиться, что данное уравнение $F(x, y) = 0$ алгебраической линии, где $F(x, y)$ полином, эквивалентно [1]) другому уравнению $F_0(x, y) = 0$, где $F_0(x, y)$ также полином, но степени низшей, чем $F(x, y)$. Например, уравнение $(x - y)^2 = 0$, очевидно, эквивалентно уравнению $x - y = 0$.

Пусть $F_0(x, y) = 0$ — уравнение, эквивалентное данному, но такое, что его уже нельзя заменить эквивалентным уравнением еще более низкой степени. Естественно тогда под порядком рассматриваемой алгебраической линии подразумевать не степень полинома F, а степень полинома F_0. Однако часто целесообразно поступать и иначе. Об этом будет сказано подробно ниже, в § 174.

Замечание. Не надо забывать, что установленная нами классификация линий (разделение на алгебраические и трансцендентные линии) основана на представлении линий уравнениями относительно *декартовых координат*. Например, спираль Архимеда, уравнение которой есть

$$\rho = a\varphi,$$

где ρ и φ обозначают полярные координаты, а a — некоторую постоянную, есть трансцендентная линия, несмотря на то, что ее уравнение не только алгебраическое, но и линейное относительно полярных координат. Действительно, переходя от полярных координат к декартовым по формулам § 60, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

— уравнение явно трансцендентное.

---

[1]) Уравнения $F(x, y) = 0$ и $F_0(x, y) = 0$ называются *эквивалентными*, если всякая пара чисел x, y, удовлетворяющая одному, удовлетворяет и другому.

86. Распадающиеся и нераспадающиеся алгебраические линии [1]. Если левая часть уравнения алгебраической кривой

$$F(x,\ y)=0, \tag{1}$$

представляющая собою полином, может быть разложена на два множителя, которые также суть полиномы, т. е. если имеем тождество

$$F(x,\ y)=F_1(x,\ y)\cdot F_2(x,\ y),$$

где $F_1(x,\ y)$ и $F_2(x,\ y)$ представляют собою полиномы (иначе говоря, целые рациональные функции от переменных x и y), то тогда уравнение (1) принимает вид

$$F_1(x,\ y)\cdot F_2(x,\ y)=0. \tag{2}$$

Переменные x и y, удовлетворяющие этому уравнению, должны, конечно, удовлетворять одному из двух уравнений

$$F_1(x,\ y)=0 \quad \text{или} \quad F_2(x,\ y)=0; \tag{3}$$

обратно: переменные, удовлетворяющие одному из этих уравнений, удовлетворяют и уравнению (2). Каждое из двух предыдущих уравнений есть уравнение некоторой алгебраической кривой. Из сказанного ясно, что точки кривой, представляемой уравнением (2), принадлежат одной из кривых, представляемых уравнениями $F_1(x,\ y)=0$ или $F_2(x,\ y)=0$, и обратно.

Иными словами, кривая, представляемая уравнением (2), состоит из совокупности двух кривых, представляемых уравнениями (3).

В этом случае говорят, что кривая, представляемая уравнением (1),— *приводимая* или *распадающаяся*, так как она распадается на две алгебраические линии (3). Каждая из последних может быть, в свою очередь, распадающейся, так что распадающаяся кривая может распадаться не только на две, но и на большее число алгебраических кривых.

Например, линия, представляемая уравнением

$$x^2-y^2=0 \quad \text{или} \quad (x-y)(x+y)=0,$$

распадается на две прямые линии, представляемые уравнениями

$$x-y=0 \quad \text{и} \quad x+y=0.$$

Если полином $F(x,\ y)$ не может быть разложен на два множителя, представляющих собою полиномы, то кривая, представляемая уравнением (1), называется *нераспадающейся* или *неприводимой*.

Из сказанного ясно, что изучение приводимой кривой всегда можно свести к изучению неприводимых кривых, из которых она состоит.

Замечание. Не надо думать, что алгебраическая кривая, состоящая из двух раздельных ветвей (например гипербола, с которой мы познакомимся в главе VII, или конхоида, рассмотренная в § 84), всегда представляет собою приводимую кривую. Решающее значение имеет не раздельность ветвей, а возможность разложить левую часть уравнения кривой, приведенного к виду $F(x,\ y)=0$, на несколько множителей, представляющих собою полиномы.

---

[1]) Об этом будет подробнее сказано ниже (в § 174).

Например, нетрудно показать, что левая часть уравнения конхоиды (§ 84)

$$(x+a)^2(x^2-l^2)+x^2y^2=0$$

(при $a\neq 0$, $l\neq 0$) не может быть разложена на два таких множителя, а потому конхоида есть неприводимая кривая: обе ветви ее с алгебраической точки зрения представляют собою одно целое (то же касается гиперболы, с которой познакомимся в главе VII).

87. О пересечении двух линий. Для дальнейшего важно уметь решать следующую задачу: даны две линии уравнениями

$$\Phi(x,\ y)=0, \tag{1}$$

и

$$\Psi(x,\ y)=0; \tag{2}$$

требуется найти точки пересечения этих линий. Координаты искомых точек (если они существуют) должны одновременно удовлетворять уравнениям (1) и (2), так как искомые точки должны одновременно находиться на линиях, представляемых этими уравнениями. Следовательно, чтобы найти координаты точек пересечения, надо решить систему двух уравнений

$$\begin{cases}\Phi(x,\ y)=0,\\ \Psi(x,\ y)=0\end{cases}$$

с двумя неизвестными [1]). Сколько будет решений, столько и будет точек пересечения; если предыдущая система не имеет решений, то данные линии нигде не пересекаются.

Число точек пересечения алгебраических линий порядков m и n не превосходит произведения mn; исключение может представить только тот случай, когда одна линия целиком входит в состав другой, или когда линии — распадающиеся, имеющие общие части [2]). Ниже (в § 100) будет приведено доказательство этого утверждения для случая, когда одна из рассматриваемых линий — прямая. Доказательство для общего случая можно найти в любом курсе высшей алгебры.

Заметим здесь же (подробнее об этом см. ниже, § 174), что если определенным образом условиться о счете „кратных" точек пересечения и учитывать также „мнимые" и „бесконечно удаленные" точки, то можно утверждать, что число точек пересечения *всегда* равно $m\cdot n$, за исключением случая, когда линии имеют общие части. В частности, число точек пересечения алгебраической кривой n-го порядка с прямою, не входящей в ее состав, всегда равно n (если принять вышеупомянутую обобщенную точку зрения). Таким образом порядок данной алгебраической кривой можно определить как число точек ее пересечения с произвольной прямой, не входящей в ее состав.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что задача о пересечении двух линий принимает особенно простой вид, если одна из линий задана параметрически.

---

[1]) См. упражнения 12 и 13 § 80.

[2]) Под „частью" мы понимаем любую из тех алгебраических ливий, на которую распадается данная линия.

Пусть требуется найти точки пересечения линии, заданной параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

с линией, заданной уравнением $\Phi(x, y) = 0$. Подставляя выражения (3) в это уравнение, получим уравнение с одним неизвестным t:

$$\Phi[\varphi(t), \psi(t)] = 0. \tag{4}$$

Найдя корни этого уравнения и подставляя их в (3) на место t, получим значения координат искомых точек.

Замечание. Из сказанного выше о числе точек пересечения алгебраических кривых вытекает, в частности, что если данная линия пересекается с какой-либо прямой в бесчисленном количестве точек (не содержа, однако, эту прямую в качестве составной части), то линия эта непременно трансцендентна.

Этот признак сразу позволяет нам заключить, например, что синусоида, циклоида и спираль Архимеда суть трансцендентные кривые.

Однако обратного заключения сделать нельзя. Например, показательная кривая есть линия трансцендентная, несмотря на то, что любая прямая пересекает ее не больше чем в двух точках[1]), как это легко доказать, и что почти очевидно на основании чертежа (черт. 85).

Упражнение

Найти точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{и} \quad (x-1)^2 + y^2 = 3.$$

Ответ. $(1, \sqrt{3})$ и $(1, -\sqrt{3})$.

Мы видим, что число (действительных) точек пересечения равно 2. Если бы мы ввели в рассмотрение мнимые и бесконечно удаленные точки, то могли бы показать, что кроме найденных двух точек пересечения существуют еще две точки пересечения (одновременно мнимые и бесконечно удаленные).

II. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

В этом отделе мы более детально изучим вопрос о представлении прямой на плоскости при помощи уравнения.

88. Уравнение в коэфициентах направления. Параметрическое представление. В § 80 мы вывели уравнение прямой, считая координаты прямоугольными. Легко тем же способом вывести уравнение прямой в любой системе декартовых координат. Мы предпочитаем, однако, вывести здесь уравнение прямой иным путем.

Пусть (черт. 90) Δ есть заданная прямая. Положение ее вполне определяется заданием одной из ее точек $M_0(x_0, y_0)$ и какого-либо вектора $\mathbf{P} = (X, Y)$, не равного нулю и параллельного ей.

Итак, будем считать заданными координаты x_0, y_0 точки M и координаты X, Y вектора $\mathbf{P}$. Вектор $\mathbf{P}$ мы будем называть *вектором направления* данной прямой.

---

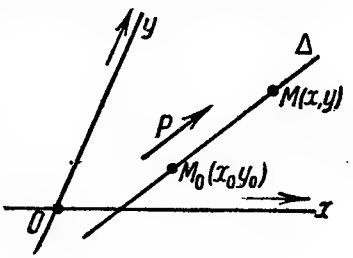
[1]) Конечно, здесь идет речь только о действительных точках; мнимых точек мы пока в рассмотрение не вводим.

Для того чтобы точка $M(x, y)$ находилась на прямой Δ, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overrightarrow{MM_0} = (x - x_0, y - y_0)$ был параллелен вектору $\mathbf{P} = (X, Y)$. Вспоминая же условие параллельности двух векторов (§ 37), видим, что предыдущее условие сводится к следующему:

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}. \tag{1}$$

Так как предыдущее уравнение выражает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка (x, y) находилась на Δ, то оно и представляет уравнение этой прямой.

Коэфициенты X и Y, входящие в него, называются *коэфициентами направления*, так как они вполне определяют вектор направления $\mathbf{P}$, а следовательно, и направление прямой. Поэтому предыдущее уравнение называется *уравнением в коэфициентах направления.*



Черт. 90.

Очевидно, что, обратно, всякое уравнение вида (1) есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельной вектору $\mathbf{P}$.

Заметим теперь, что вместо вектора $\mathbf{P}$ можно взять любой другой, параллельный ему (направленный в ту же или противоположную сторону). Иными словами, коэфициенты X и Y в уравнении (1) можно заменить любыми пропорциональными им величинами kX и kY, где k — произвольное число, отличное от нуля. Это, конечно, очевидно и непосредственно, так как, разделив обе части уравнения (1) на произвольное число k (отличное от нуля), получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{kX} = \frac{y - y_0}{kY}, \tag{1a}$$

равносильное предыдущему.

Из сказанного следует, что направление прямой Δ, определяемой уравнением (1), зависит не от самих величин X и Y, а от их отношения, например, от отношения

$$a = \frac{Y}{X}; \tag{2}$$

это отношение называется *угловым коэфициентом* данной прямой, так как оно определяет направление ее, а следовательно, и угол, составляемый ею с осью Ox (см. еще следующий параграф).

Возвращаясь к уравнению (1), заметим, что из него можно получить очень простое параметрическое представление нашей прямой. Действительно, обозначив через t общее значение отношений (1), т. е. положив

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = t,$$

получим

$$x = x_0 + Xt, \quad y = y_0 + Yt; \tag{3}$$

это и есть параметрическое представление прямой; параметр t имеет очень простое геометрическое значение. Именно, из самого определения следует, что t есть отношение (см. стр. 58) параллельных векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{P}$.

Вместо вектора $\mathbf{P}$ произвольной длины мы, конечно, можем взять орт, который обозначим через $\mathbf{e}$; координаты этого орта обозначим через l и m, т. е. положим

$$\mathbf{e} = (l,\ m).$$

Величины l и m мы будем называть (§ 44, замечание) *координатами направления* данной прямой[1]). Уравнение ее в этом случае напишется так:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}; \tag{4}$$

это уравнение мы будем называть *уравнением в координатах направления*.

В случае применения орта $\mathbf{e}$ (вместо вектора $\mathbf{P}$ произвольной длины) параметрическое представление (3) примет вид

$$x = x_0 + lt,\quad y = y_0 + mt; \tag{5}$$

в этом случае параметр t представляет собою, попросту, алгебраическую величину вектора $\overrightarrow{M_0M}$ по направлению $\mathbf{e}$, т. е. расстояние переменной точки M до постоянной точки M_0, снабженное определенным знаком.

Замечание. Если прямая Δ параллельна одной из осей координат, то один из коэфициентов X, Y равен нулю, так как вектор $\mathbf{P}$ должен тоже быть параллелен одной из осей. Если, например, Δ параллельна оси Oy, то $X = 0$, и уравнение (1) примет вид:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{Y};$$

это последнее уравнение надо, на основании сказанного в замечании § 37, понимать как равносильное уравнению $x - x_0 = 0$, причем $y - y_0$ остается произвольным.

Итак, уравнение прямой, параллельной оси Oy, имеет вид:

$$x - c = 0, \tag{6}$$

где $c = x_0$ обозначает абсциссу точки пересечения прямой с осью Ox (этот результат мы уже получили и раньше в § 80; там мы считали координаты прямоугольными, что, конечно, в данном случае несущественно).

Аналогичное уравнение получим для прямой, параллельной оси Ox.

Упражнения

1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (0, 3) и параллельной вектору (2, 5).

Ответ. $\frac{x}{2} = \frac{y - 3}{5}$.

---

[1]) Так как орт $\mathbf{e}$ можно заменить ортом $-\mathbf{e} = (-l,\ -m)$, то, если l, m суть координаты направления прямой, то и $(-l,\ -m)$ будут координатами направления той же прямой.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (3, —1) и параллельной вектору (5, 0).

Ответ. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{0}$, т. е. (см. выше, замечание) $y+1=0$.

89. Приведенное уравнение прямой. Предположим теперь, что прямая Δ не параллельна оси Oy, т. е. что в уравнении (1) предыдущего параграфа $X\neq 0$. Тогда это уравнение, умножив на Y, можно переписать так:

$$y-y_0=a(x-x_0), \tag{1}$$

где для краткости введено обозначение

$$a=\frac{Y}{X}. \tag{2}$$

Уравнение (1) можно переписать еще так:

$$y=ax+b, \tag{3}$$

где $b=y_0-ax_0$ есть постоянная.

Предыдущее уравнение называется *приведенным*, или *простейшим*, уравнением прямой [1]).

Весьма важно уяснить себе и хорошо запомнить геометрическое значение коэфициентов a и b этого уравнения. Если $x=0$, то, как показывает уравнение (3), $y=b$. Следовательно, b есть ордината точки пересечения нашей прямой с осью Oy или, как говорят, *начальная ордината* (мы ввели уже это понятие в § 80).

Что касается коэфициента a, то, как мы уже сказали в предыдущем параграфе, он определяет направление нашей прямой и называется *угловым коэфициентом.*

В случае прямоугольных координат, как было уже показано в § 80, имеем

$$a=\operatorname{tg}\alpha, \tag{4}$$

где α обозначает угол прямой Δ с осью Ox. Выведем еще раз это важное соотношение, исходя из формулы (2), и вместе с тем несколько подробнее остановимся на вопросе об отсчете угла α. Угол этот мы будем отсчитывать от оси Ox, приписывая ему знак в зависимости от направления отсчета [2]).

Если φ обозначает угол, составляемый вектором $\mathbf{P}$ с осью Ox, то ясно, что в качестве угла α мы можем взять и угол φ, и угол $\varphi+\pi$ (или вообще угол $\varphi+k\pi$, где k — целое число), так как прямая (в противоположность оси или вектору) не имеет определенного положительного направления, благодаря чему замена φ на $\varphi+\pi$ приводит к направлению той же прямой (черт. 91).

Вернемся теперь к выражению $a=\frac{Y}{X}$. Так как X и Y суть коор-

---

[1]) Оно было уже нами получено в § 80, где, однако, мы предполагали координаты прямоугольными.

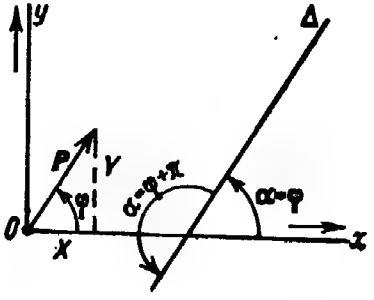
[2]) Направление отсчета положительных углов есть, по нашему всегдашнему соглашению, то, которое ведет кратчайшим путем от оси Ox к оси Oy.

динаты вектора P, то, как мы знаем из § 47 (и как это видно из черт. 91),

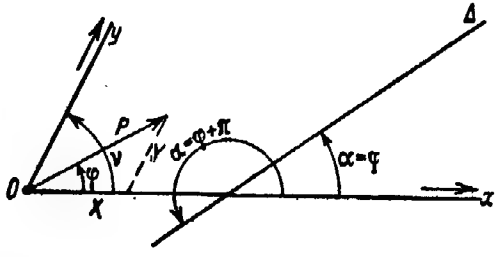
$$a = \frac{Y}{X} = \operatorname{tg}\varphi;$$

но так как φ и α могут отличаться на кратное π, а функция $\operatorname{tg}\varphi$ имеет как раз период π, то $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$, и мы получаем требуемую формулу (4).

Итак, если дан угловой коэфициент a, то угол α можно вычислить по формуле (4); эта формула дает нам не одно значение α, но бесчисленное множество значений, отличающихся друг от друга слагаемыми вида $k\pi$, которые не оказывают никакого влияния на направление Δ; поэтому мы можем всегда ограничиться вычислением любого из этих значений, например того, которое заключено между 0 и π.



Черт. 91.



Черт. 92.

В случае декартовых координат общего вида для углового коэфициента будем иметь формулу

$$a = \frac{|\mathrm{v}|}{|\mathrm{u}|} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\nu - \alpha)}, \tag{5}$$

где, как и выше, α обозначает угол прямой Δ с осью Ox, отсчитываемый от этой последней, ν — координатный угол, $|\mathrm{u}|$ и $|\mathrm{v}|$ — длины координатных векторов осей Ox и Oy. Предоставляем доказать эту формулу читателю; см. черт. 92, на котором буквами X и Y обозначены отрезки, алгебраические значения которых суть $|\mathrm{u}|X$ и $|\mathrm{v}|Y$.

Если дано приведенное уравнение $y = ax + b$, то ему всегда можно придать вид уравнения в коэфициентах направления. Для этого достаточно написать его в виде

$$x = \frac{y - b}{a},$$

или

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - b}{a}; \tag{6}$$

мы видим, что наше уравнение действительно привелось к уравнению в коэфициентах направления; коэфициентами направления служат в данном случае $X = 1$ и $Y = a$.

Замечание. Выводя приведенное уравнение, мы предполагали, что прямая не параллельна оси Oy, т. е. $X \neq 0$. Если $X = 0$, то, ко-

нечно, уравнению прямой нельзя придать вида $y = ax + b$, так как в этом случае ее уравнение будет $x = c$ (см. предыдущий параграф). Выражение $a = \frac{Y}{X}$ теряет смысл (обращается в бесконечность). Однако и в этом случае иногда удобно говорить об угловом коэфициенте a, равном бесконечности.

90. Общее уравнение прямой. Мы видели, что уравнение всякой прямой можно представить в виде

$$y - ax - b = 0,$$

если она не параллельна оси Oy, и в виде

$$x - c = 0,$$

если она параллельна оси Oy. Оба эти уравнения представляют собою частные виды уравнения

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

представляющего собою общий вид уравнения первой степени.

Легко видеть, что, обратно, всякое уравнение вида (1), т. е. всякое уравнение первой степени, есть уравнение некоторой прямой.

Мы предполагаем, конечно, что коэфициенты A и B не равны одновременно нулю, иначе уравнение (1) не содержало бы переменных x и y и не выражало бы никакой зависимости между ними.

Рассмотрим два возможных здесь случая.

1. Предположим сперва, что $B \neq 0$. Тогда уравнение (1) можно решить относительно y, что дает

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

или

$$y = ax + b, \tag{2}$$

где положено

$$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Таким образом наше уравнение (1) есть уравнение прямой с начальной ординатой b и угловым коэфициентом a.

2. Предположим, что $B = 0$. Тогда уравнение примет вид $Ax + C = 0$, или, так как $A \neq 0$,

$$x = c, \tag{3}$$

где положено $c = -\frac{C}{A}$.

Ясно, что предыдущее уравнение выражает прямую, параллельную оси Oy и пересекающую ось Ox в точке с абсциссой, равной c.

Итак, мы доказали, что всякая прямая изображается уравнением первой степени и, обратно, всякое уравнение первой степени изображает прямую.

Уравнение вида (1) называется *уравнением прямой в общем виде*. Из предыдущего ясно как приводить общее уравнение прямой к простейшему (приведенному) виду. Для этого достаточно решить его относительно y, если $B \neq 0$. Если $B = 0$, то уравнение приводится к виду (3).

От приведенного вида можно, в свою очередь, всегда перейти к уравнению в коэфициентах направления, как это указано в конце предыдущего параграфа.

Замечание. Мы исключили из рассмотрения случай, когда $A = B = 0$; если это имеет место, то уравнение (1) сводится к следующему:

$$C = 0.$$

При C, отличном от нуля, это уравнение не может быть удовлетворено никакими конечными значениями x и y, т. е. не выражает никакого геометрического места (с точки зрения элементарной геометрии). Однако в этом случае говорят, что предыдущее уравнение выражает *бесконечно удаленную* или *несобственную* прямую (см главу VI).

Такая „несобственная прямая" считается „параллельной" всякой другой прямой на данной плоскости. Во всем дальнейшем, если противное не оговорено особо, мы будем считать, что в уравнении прямой по крайней мере один из коэфициентов A, B отличен от нуля.

Иногда имеет смысл рассматривать и случай $A = B = C = 0$; в этом случае говорят, что уравнение представляет „неопределенную" прямую.

Упражнения

1. Привести уравнение прямой $2x + 2y - 5 = 0$ к простейшему виду.

Ответ. $y = -x + \frac{5}{2}$.

2. Привести уравнение $3x - 5y + 1 = 0$ к простейшему виду, а затем к виду в коэфициентах направления.

Ответ. Приведенное (простейшее) уравнение будет

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}.$$

Один из видов уравнения в коэфициентах направления будет

$$\frac{y - \frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{x - 0}{1},$$

или, еще, умножая знаменатели на 5,

$$\frac{x - 0}{5} = \frac{y - \frac{1}{5}}{3}.$$

3. Предполагая координаты прямоугольными, найти угол α, составляемый прямою упражнения 1 с осью Ox.

Ответ. $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, или, что сводится к тому же, $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$; более обще $\alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

91. Частные случаи общего уравнения прямой. Если в общем уравнении прямой

$$Ax + By + C = 0$$

один из коэфициентов равен нулю, то это характеризует некоторые особенности в положении прямой, которые мы и отметим.

1. Если в общем уравнении $C=0$, то уравнение принимает вид

$$Ax+By=0.$$

Соответствующая прямая проходит через начало координат, так как предыдущее уравнение удовлетворяется значениями $x=0$, $y=0$.

2. Если в общем уравнении $B=0$, то оно приводится к виду

$$x=-\frac{C}{A},$$

т. е. соответствующая прямая параллельна оси Oy, как было уже сказано в предыдущем параграфе.

3. Если в общем уравнении $A=0$, то оно приводится к виду

$$y=-\frac{C}{B},$$

и соответствующая прямая параллельна оси Ox.

Отметим еще, что уравнение самой оси Ox есть

$$y=0,$$

а уравнение оси Oy

$$x=0.$$

92. Знак трехчлена $Ax+By+C$. Трехчлен

$$Ax+By+C \tag{1}$$

обращается в нуль тогда, когда точка (x, y) лежит на прямой Δ, представляемой уравнением

$$Ax+By+C=0; \tag{2}$$

для точек же, не лежащих на Δ,

$$Ax+By+C\neq 0;$$

это следует из самого понятия уравнения прямой. Представляет интерес исследовать, какой знак принимает трехчлен (1) для различных точек $M(x, y)$ плоскости.

Прямая Δ разбивает всю плоскость на две части. Пока точка $M(x, y)$ находится в одной из этих частей, трехчлен (1) сохраняет постоянный знак, так как переменить свой знак на обратный он может только предварительно обратившись в нуль, а это может случиться только тогда, когда точка $M(x, y)$ попадает на прямую Δ. Покажем теперь, что по разные стороны прямой трехчлен имеет противоположные знаки. Действительно, предположим для определенности, что $B>0$. Возьмем какую-либо прямую, параллельную оси Oy, которая непременно пересечет данную прямую [1]) в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$, и на проведенной прямой возьмем еще две точки $M'(x_0, y')$ и $M''(x_0, y'')$, причем так,

[1]) Так как при B, не равном нулю, прямая Δ не параллельна оси Oy.

чтобы $y' > y_0$ и $y'' < y_0$ (черт. 93). Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой Δ, ее координаты должны обращать в нуль трехчлен (1); иначе говоря,

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Если в предыдущем равенстве заменить y_0 большею величиною y', очевидно, равенство нарушится, и мы будем иметь (так как $B > 0$),

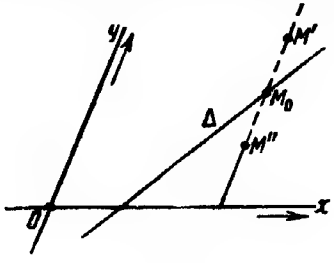
$$Ax_0 + By' + C > 0;$$

точно так же

$$Ax_0 + By'' + C < 0;$$

а это и доказывает, что по разные стороны от Δ трехчлен (1) принимает противоположные знаки.

Мы предположили, что $B > 0$; если $B < 0$, то в двух последних неравенствах знаки неравенств надо заменить на обратные, и полученный результат останется в силе. Наконец, если $B = 0$, то тогда, наверное, A не равно нулю, и наши рассуждения останутся в силе, если помеиять ролями оси Ox и Oy.



Черт. 93.

Пусть, например, дана прямая

$$2x + y - 3 = 0. \qquad (3)$$

Если в трехчлен

$$2x + y - 3 \qquad (4)$$

подставить координаты начала (т. е. $x = 0$, $y = 0$), получим для него отрицательное значение (-3). Следовательно, для всякой точки, находящейся по ту же сторону от прямой, что и начало,

$$2x + y - 3 < 0;$$

для точек же, находящихся по другую сторону,

$$2x + y - 3 > 0.$$

Например, так как координаты точки M (5, 3) обращают трехчлен (4) в положительную величину

$$2 \cdot 5 + 3 - 3 = 10,$$

то точка M и начало координат расположены по разные стороны прямой Δ.

Вообще сказанное в этом параграфе позволяет, очевидно, сразу решить, расположены ли данные две точки по разные стороны данной прямой или по одну и ту же сторону.

Упражнения

1. Показать, что точки (5, -1) и (2, 3) расположены по одну сторону прямой $x + 3y - 1 = 0$, а точка (1, -5) — по другую.

2. Показать, что прямая $y = 2x + 1$ пересекает прямую, соединяющую точки $A(-2, 2)$ и $B(4, 1)$, *между* точками A и B.

Построить при помощи клетчатой бумаги указанные точки и прямые (предполагая координаты прямоугольными) и проверить результат на чертеже.

93. Уравнение в отрезках на осях. Следует заметить еще один вид уравнения прямой, к которому можно привести общее уравнение:

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

в случае, когда $C\neq 0$.

Именно, разделив обе его части на C, изменяя знаки и вводя обозначения

$$-\frac{A}{C}=\frac{1}{p}, \quad -\frac{B}{C}=\frac{1}{q}, \tag{2}$$

можем переписать уравнение (1) в виде

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1. \tag{3}$$

В этом очень симметричном уравнении величины p и q имеют весьма простое геометрическое значение: именно, p есть отрезок, отсекаемый рассматриваемой прямой на оси Ox и измеренный единицей $|\mathbf{u}|$ (длиной координатного вектора оси Ox); q — отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy и измеренный единицей $|\mathbf{v}|$ (длиной координатного вектора оси Oy); предполагается, что оба эти отрезка снабжены знаками [1]).

Действительно, найдем точку пересечения прямой, изображаемой уравнением (3), с осью Ox, иначе говоря, найдем точку прямой (3) с ординатой y, равной нулю. Полагая в предыдущем уравнении $y=0$, получим

$$\frac{x}{p}=1,$$

т. е. $x=p$, как было сказано; точно так же докажем наше утверждение относительно q.

Принимая во внимание только что указанное геометрическое значение коэфициентов p и q, уравнение (3) называют *уравнением прямой в отрезках на осях координат.*

Замечание. Если коэфициент A в общем уравнении равен нулю, то на основании (2) $\frac{1}{p}=0$ (т. е. $p=\infty$); уравнение (3) примет вид

$$\frac{y}{q}=1;$$

это уравнение, как и следовало ожидать, изображает прямую, параллельную оси Ox и отсекающую на оси Oy отрезок q (измеренный единицей $|\mathbf{v}|$); можно и в этом случае сказать, что прямая отсекает на осях координат отрезки $p=\infty$ и q.

Аналогичное замечание относится и к случаю $B=0$.

94. Построение прямой по заданному уравнению. Прямую, изображаемую уравнением (3) предыдущего параграфа, просто построить. Для этого достаточно отложить от начала координат по соответствующим осям отрезки, алгебраические значения которых равны $|\mathbf{u}|p$ и $|\mathbf{v}|q$, и соединить их концы прямою.

---

[1]) Алгебраические значения этих отрезков равны $|\mathbf{u}|p$ и $|\mathbf{v}|q$. В необобщенных координатах они равны просто p и q.

Если прямая задана уравнением в общем виде, в котором ни один из коэфициентов не равен нулю, достаточно это уравнение привести к предыдущему виду, чтобы указанное построение сделалось применимым.

Рассмотрим, например, прямую, заданную в необобщенных координатах уравнением

$$x - 3y - 6 = 0;$$

деля обе части на 6 и перенося единицу в правую часть уравнения, получим

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1;$$

следовательно, прямая отсекает на оси Ox отрезок 6, а на оси Oy — отрезок (-2).

Если один из коэфициентов A, B общего уравнения равен нулю, то прямая параллельна одной из осей координат, и потому ее также легко построить.

Если, наконец, $C = 0$, то прямая проходит через начало координат; чтобы ее построить, достаточно построить еще какую-нибудь одну ее точку; для этого можно произвольным образом задать абсциссу этой точки и вычислить соответствующую ординату. Напрнмер, если дано уравнение прямой

$$3x - 4y = 0,$$

то, взяв, например, $x = 4$, получим $y = 3$. Поэтому прямая проходит через начало координат и через точку (4, 3).

Вообще для построения прямой, заданной уравнением, достаточно найти две какие-либо ее точки, как было отмечено уже в § 80.

95. Геометрическое значение коэфициентов A и B в общем уравнении. Вернемся к уравнению прямой в общем виде

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

и укажем чрезвычайно простое геометрическое значение коэфициентов A и B, которое очень облегчит решение многих задач. Именно, считая временно $B \neq 0$ и решив предыдущее уравнение относительно y, получим приведенное уравнение

$$y = ax + b, \tag{2}$$

где угловой коэфициент $a = -\frac{A}{B}$. С другой стороны, мы знаем (§ 89), что $a = \frac{Y}{X}$, где X, Y обозначают координаты вектора направления нашей прямой. Следовательно,

$$-\frac{A}{B} = \frac{Y}{X} \quad \text{или} \quad \frac{X}{B} = \frac{Y}{-A}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь вектор, имеющий координатами B и $-A$, т. е. вектор $(B, -A)$. Как показывает вторая из формул (3), этот вектор параллелен вектору направления данной прямой, а следовательно, и самой этой прямой.

Итак, имеем предложение: *вектор* $(B, -A)$ *параллелен прямой, представляемой уравнением* (1).

Так как в качестве вектора направления прямой может быть взят любой вектор, параллельный ей, то мы всегда можем считать, что вектор

$$\mathbf{P} = (B, -A) \tag{4}$$

есть вектор направления прямой, представляемой уравнением (1). Ясно, что с таким же правом мы можем взять вектор $-\mathbf{P} = (-B, A)$.

Мы считали $B \neq 0$, но очевидно, что и в случае $B = 0$ результат остается справедливым [1]).

Можно указать еще другое геометрическое значение коэфициентов A, B, которое, в противоположность предыдущему, *имеет место только в случае прямоугольных координат*. Именно, легко видеть, что в этом случае вектор $\mathbf{Q}$, имеющий координатами A и B, т. е. вектор

$$\mathbf{Q} = (A, B), \tag{5}$$

перпендикулярен к прямой, представляемой уравнением (1).

Действительно, имеем $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = B \cdot A + (-A) \cdot B = 0$, т. е. вектор $\mathbf{Q}$ перпендикулярен к $\mathbf{P}$, а это и требовалось доказать.

Предыдущий результат останется справедливым и в случае обобщенных декартовых координат, если его формулировать так: вектор $\mathbf{Q}$, ковариантные координаты которого суть A и B, перпендикулярен к прямой (1).

Для доказательства вспомним формулу для скалярного произведения векторов в обобщенных координатах (§ 56), из которой опять следует, что $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$. Под $\mathbf{P} = (B, -A)$ мы, как и выше, подразумеваем вектор, обычные (контравариантные) координаты которого суть B и $-A$.

96. Нормальное уравнение прямой. Считая координаты прямоугольными и пользуясь указанным выше свойством вектора $\mathbf{Q} = (A, B)$, мы можем придать уравнению прямой

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

вид, на который следует обратить внимание. Именно, умножая уравнение (1) на некоторый множитель λ (отличный от нуля), т. е. переписав его в виде

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0; \tag{2}$$

можно всегда добиться того, чтобы вектор $\mathbf{V} = (\lambda A, \lambda B)$, который на основании сказанного в предыдущем параграфе перпендикулярен данной прямой, был ортом. Для этого достаточно выбрать λ так, чтобы

$$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1,$$

т. е.

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3}$$

Чтобы остановиться на каком-нибудь определенном знаке перед радикалом, условимся подбирать его так, чтобы произведение λC было отрицательной величиной (геометрическое значение этого условия будет указано ниже); в случае же, когда $C = 0$, будем выбирать знак перед радикалом по произволу.

---

[1]) Действительно, в этом случае вектор $\mathbf{P} = (0, -A)$ параллелен оси Oy, так же как и данная прямая $Ax + C = 0$.

Обозначая через ψ угол, составляемый ортом $\mathbf{V}=(\lambda A, \lambda B)$ с осью Ox (и отсчитываемый от этой оси), а через $-p$ произведение λC, будем иметь

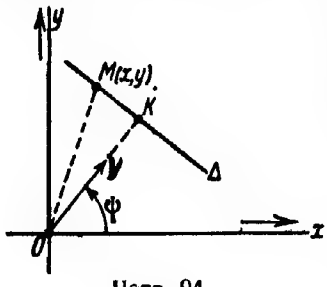
$$\lambda A=\cos\psi, \quad \lambda B=\sin\psi, \quad \lambda C=-p, \tag{4}$$

и уравнение (2) примет вид

$$x\cos\psi+y\sin\psi-p=0. \tag{5}$$

Последнее уравнение носит название уравнения прямой в нормальном виде (нормальный вид Hesse).

Мы знаем, что вектор $\mathbf{V}=(\cos\psi, \sin\psi)$ перпендикулярен к нашей прямой Δ. Покажем, что при нашем условии относительно знака λ (при $C\neq 0$) вектор $\mathbf{V}$, если его приложить к началу координат, будет обращен в сторону Δ и что $p=|\overrightarrow{OK}|$ есть длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на Δ (черт. 94); K обозначает основание этого перпендикуляра.



Черт. 94.

Действительно, если $M(x, y)$ есть некоторая точка на Δ, то, обозначая через OK алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{OK}$ по направлению $\mathbf{V}$, будем иметь $OK=\mathbf{V}\cdot\overrightarrow{OM}$ [1]). Но $\mathbf{V}=(\cos\psi, \sin\psi)$, $\overrightarrow{OM}=(x, y)$. Следовательно, $OK=x\cos\psi+y\sin\psi$, откуда, на основании (5), $OK=p$. Так как по условию $p>0$, то вектор $\overrightarrow{OK}$ должен иметь направление $\mathbf{V}$, и его длина равна p; это и доказывает наше утверждение.

Добавим, что когда $C=0$, то $p=0$, а положительное направление $\mathbf{V}$ может быть выбрано по произволу, как было уже сказано.

Запомним, что для приведения уравнения (1) к нормальному виду достаточно умножить его на множитель λ, данный формулой (3), подобрав знак так, чтобы $\lambda C\leqslant 0$. Множитель λ называется *нормирующим множителем.*

В случае косоугольной необобщенной системы координат вектор $\mathbf{V}$ с ковариантными координатами λA, λB перпендикулярен к Δ (см. предыдущий параграф). Чтобы этот вектор был ортом, надо подобрать λ так, чтобы (§ 57)

$$(\lambda A)^2+(\lambda B)^2-2(\lambda A)(\lambda B)\cos\nu=\sin^2\nu,$$

откуда

$$\lambda=\frac{\sin\nu}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}}. \tag{6}$$

Выбрав знак перед радикалом так, чтобы $\lambda C\leqslant 0$, обозначая через α, β углы орта $\mathbf{V}$ с осями Ox, Oy, а через $-p$ произведение λC, будем иметь [2])

$$\lambda A=\cos\alpha, \quad \lambda B=\cos\beta, \quad \lambda C=-p, \tag{7}$$

---

[1]) Действительно, OK есть алгебраическое значение прямоугольной проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на направленне, характеризуемое ортом $\mathbf{V}$.

[2]) Вместо двух углов α и β можно ввести один угол ψ с осью Ox, который отсчитывается от Ox, с учетом направления отсчета. Тогда

$$\cos\alpha=\cos\psi, \quad \cos\beta=\cos(\nu-\psi).$$

и уравнение (2) примет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0, \tag{8}$$

называемый нормальным видом.

Так же, как и выше, легко показать (достаточно буквально повторить предыдущие рассуждения), что орт V, будучи приложен к O, будет обращен в сторону прямой Δ и что p есть длина перпендикуляра, опущенного из O на Δ.

Множитель λ, определяемый формулой (6) и условием $\lambda C \leqslant 0$, по умножении на который уравнение (1) обращается в нормальное, и здесь называется нормирующим множителем.

Упражнения

1. Привести к нормальному виду уравнения (в прямоугольных координатах):

a) $x - y + 1 = 0$; b) $x + y = 0$; c) $2x + 3y - 1 = 0$; d) $x + 4 = 0$.

Ответ. a) $\frac{x}{-\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ или $x\cos\frac{3\pi}{4} + y\sin\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$;

b) $\frac{x}{\pm\sqrt{2}} + \frac{y}{\pm\sqrt{2}} = 0$ или $\pm x\cos\frac{\pi}{4} \pm y\sin\frac{\pi}{4} = 0$;

c) $\frac{2x}{\sqrt{13}} + \frac{3y}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$ или $x\cos\psi + y\sin\psi - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$,

где

$$\cos\psi = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin\psi = \frac{3}{\sqrt{13}};$$

d) $-x - 4 = 0$ или $x\cos\pi - 4 = 0$.

2. Найти длины перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, рассматриваемые в предыдущем упражнении.

Ответ. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) 0; c) $\frac{1}{\sqrt{13}}$; d) 4.

III. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ

В предыдущем отделе мы подробно ознакомились с вопросом представления прямых при помощи уравнений. Мы увидели, что прямые изображаются уравнениями первой степени. Таким образом все геометрические вопросы, касающиеся прямых, сводятся к рассмотрению этих уравнений.

Мы решим теперь ряд таких вопросов, наиболее простых и основных, и начнем с решения задач, касающихся прямых, уравнения которых даны. Затем мы решим несколько задач, которые требуют нахождения уравнений прямых по тем или иным геометрическим условиям.

Во всем дальнейшем под словами „дана прямая“, „найти прямую“, и т. д. мы подразумеваем „дано уравнение прямой“, „найти уравнение прямой“ и т. д.

В зависимости от удобства, а также имея в виду приложения, мы будем задаваться тем или иным видом уравнения прямой.

Добавим еще, что в предыдущих параграфах содержатся все элементы, требуемые для решения приводимых ниже задач, так что читатель,

усвоивший содержание предыдущих параграфов, а также некоторые простые общие предложения, приводимые ниже (§ 106 и 111), может без всякого труда решить эти задачи самостоятельно. Мы могли бы поэтому смело отнести эти задачи к категории „упражнений", и если этого не делаем, то только потому, что результаты решения имеют важное общее значение, которое следует подчеркнуть.

97. Задача 1. Найти условия параллельности и совпадения двух заданных прямых. Пусть прямые заданы уравнениями в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{1}$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{2}$$

Для параллельности их, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы векторы их направлений (см. § 95) $\mathbf{P}_1 = (B_1, -A_1)$ и $\mathbf{P}_2 = (B_2, -A_2)$ были параллельны. Вспоминая же условие параллельности векторов, получим

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{-A_2}{-A_1},$$

или

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}, \tag{3}$$

или еще

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0. \tag{3a}$$

Итак, *для параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями, необходимо и достаточно, чтобы коэфициенты при переменных x, y одного уравнения были пропорциональны соответствующим коэфициентам другого.*

Предыдущее условие (3) можно записать еще так:

$$A_2 = kA_1, \quad B_2 = kB_1, \tag{4}$$

где k — некоторое постоянное число [общее значение отношений (3)].

Для того чтобы две прямые совпадали (совпадение есть частный случай параллельности), к условию (3) или (4) надо присоединить еще одно, которое выводится так. Пусть (x, y) обозначает любую точку, принадлежащую данным прямым. Тогда x и y одновременно удовлетворяют уравнениям (1) и (2). Умножая (2) на k и вычитая из (1), получим, принимая во внимание (4):

$$C_2 - kC_1 = 0, \quad \text{или} \quad C_2 = kC_1.$$

Итак, в случае совпадения мы должны иметь

$$A_2 = kA_1, \quad B_2 = kB_1, \quad C_2 = kC_1, \tag{5}$$

или, что сводится к тому же:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}. \tag{6}$$

Очевидно, что условие (5) также и достаточно, так как при этом условии уравнение (1) получается из (2) умножением на постоянное число и, следовательно, эквивалентно ему.

Итак, *для совпадения двух прямых, заданных уравнениями общего вида, необходимо и достаточно, чтобы все три коэфициента одного уравнения были пропорциональны соответствующим коэфициентам другого.*

Из равенств (5) следует, что имеем *тождество*

$$A_2x+B_2y+C_2=k(A_1x+B_1y+C_1), \tag{5a}$$

т. е. равенство, справедливое при всех значениях x, y. Обратно, если (5а) есть тождество, то из него следует [1]) равенство (5).

Поэтому можно сказать, что для совпадения прямых, данных уравнениями (1) и (2), необходимо и достаточно существование такого постоянного числа k, при котором (5а) есть тождество.

Если прямые заданы приведенными уравнениями

$$y=a_1x+b_1, \quad y=a_2x+b_2, \tag{7}$$

то, очевидно, условие параллельности сводится к равенству угловых коэфициентов, т. е.

$$a_2=a_1, \tag{8}$$

а условия совпадения — к равенствам:

$$a_2=a_1, \quad b_2=b_1. \tag{9}$$

Эти условия непосредственно вытекают из вышеприведенных условий (3) (для параллельности) и (6) (для совпадения), если уравнения (7) написать так: $a_1x-y-b_1=0$, $a_2x-y-b_2=0$.

Впрочем условия (8) и (9) совершенно очевидны непосредственно, если вспомнить геометрические значения коэфициентов приведенного уравнения.

Полученные в этом параграфе результаты непосредственно следуют из элементов теории линейных уравнений, как это станет ясным при решении следующей задачи.

98. Задача 2. Найти точку пересечения двух прямых. Если прямые заданы уравнениями (1) и (2) предыдущего параграфа, то точку их пересечения найдем, решая систему уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Действительно, координаты (x, y) искомой точки должны удовлетворять как уравнению первой прямой, так и уравнению второй.

Из элементов теории определителей известно, что [2])

1°. Если определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2-A_2B_1 \tag{2}$$

---

[1]) Легко видеть, что из тождества вида $Ax+By+C=A'x+B'y+C'$ (*) следует $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$. Действительно, так как, по условию, (*) справедливо при всех значениях x, y, то ово останется справедливым, если положить $x=y=0$, а это даст $C=C'$. Полагая затем в (*) $x=1$, $y=0$, получим $A=A'$; аналогично получим $B=B'$.

[2]) См. Добавление, § 7.

отличен от нуля, то система (1) имеет одно и только одно решение. Следовательно, в этом случае имеется одна точка пересечения.

2°. Если определитель (2) равен нулю [1]), то имеем тождественно (т. е. для всех x, y):

$$A_2x + B_2y = k(A_1x + B_1y). \tag{3}$$

т. е.

$$A_2 = kA_1,\ B_2 = kB_1,$$

где k — некоторое число. Если при этом $C_2 \neq kC_1$, то система (1) не имеет решений. Значит, прямые параллельны, но не совпадают.

3°. Если, наконец, $A_2 = kA_1$, $B_2 = kB_1$, $C_2 = kC_1$, т. е. тождественно

$$A_2x + B_2y + C_2 = k(A_1x + B_1y + C_1), \tag{4}$$

то уравнения (2) эквивалентны между собою, и прямые совпадают. Обратно, если уравнения (2) эквивалентны, то необходимо имеет место (4).

Мы, таким образом, вновь получили результаты предыдущего параграфа.

В рассматриваемом простом случае мы, конечно, легко могли бы обойтись без теории определителей.

Замечание. Если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то, как мы видели, точка пересечения существует. Если теперь, оставляя неподвижной одну из прямых, вращать другую (вокруг одной из ее точек, отличных от точки пересечения) так, чтобы она стремилась стать параллельной первой прямой, то точка пересечения будет беспредельно удаляться. Поэтому-то часто говорят, что параллельные прямые пересекаются, но точка их пересечения находится в бесконечности („несобственная“ или „бесконечно удаленная точка“).

Упражнения и дополнения

1. Найти точку пересечения прямых

$$3x + 2y - 1 = 0,\quad 2x + y + 5 = 0.$$

Ответ. Точка $(-11, 17)$.

2. Найти точку пересечения прямых

$$5x - 2y = 5 \quad \text{и} \quad 10x - 4y = 1.$$

Ответ. Точка пересечения в бесконечности (прямые параллельны).

3. Найти точку пересечения прямой, заданной параметрически:

$$x = 2t,\quad y = 1 - 3t,$$

с прямой $2x - 6y - 5 = 0$.

Ответ. $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$.

99. Задача 3. Найти формулы перехода к новой декартовой системе, оси которой заданы уравнениями. Иногда требуется перейти от данной системы декартовых координат к другой, оси которой $O'y'$,

[1]) Ранг этого определителя равен тогда единице: нулю он равен быть не может, ибо мы считаем, что A_1 и B_1 не могут быть равны одновременно нулю, так же как и A_2, B_2.

$O'x'$ расположены на пересекающихся прямых, заданных соответственно уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad (1)$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0, \quad (2)$$

причем выбор положительных направлений этих осей и длин координатных векторов зависит от нашего произвола. Эту задачу проще всего решить следующим образом.

Имеем (§ 66)

$$x'=l'_1x+l'_2y+a', \quad y'=m'_1x+m'_2y+b'.$$

Точки новой оси $O'y'$ удовлетворяют уравнению $x'=0$, т. е.

$$l'_1x+l'_2y+a'=0;$$

так как это уравнение должно быть эквивалентно уравнению (1), то на основании сказанного в предыдущем параграфе

$$l'_1x+l'_2y+a'=k_1(A_1x+B_1y+C_1),$$

где k_1 — некоторая постоянная. Точно так же

$$m'_1x+m'_2y+b'=k_2(A_2x+B_2y+C_2).$$

Итак, будем иметь следующие формулы перехода

$$x'=k_1(A_1x+B_1y+C_1), \quad y'=k_2(A_2x+B_2y+C_2), \quad (3)$$

где k_1, k_2 — некоторые постоянные (конечно, отличные от нуля). От величин и знаков k_1 и k_2 зависят, очевидно, величины и положительные направления новых координатных векторов. Если эти величины и положительные направления нам безразличны, то мы можем придать k_1, k_2 произвольно выбранные значения. Проще всего будет положить $k_1=k_2=1$, т. е.

$$x'=A_1x+B_1y+C_1, \quad y'=A_2x+B_2y+C_2. \quad (3a)$$

Решая (3) или (3а) относительно x, y, получим выражения x, y через x', y'. Это решение всегда возможно, ибо, по заданию, прямые (1), (2) — пересекающиеся, т. е.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

100. Задача 4. Найти точки пересечения данной прямой с данной кривой. Задача эта, так же как задача 2, представляет собой частный случай задачи пересечения двух линий, о которой говорилось в § 87.

Пусть

$$\Phi(x, y)=0 \quad (1)$$

есть уравнение данной кривой. Представим данную прямую параметрически (§ 88):

$$x=x_0+Xt, \quad y=y_0+Yt \quad (2)$$

(где x_0, y_0, X, Y — постоянные); значения параметра t, соответствующие искомым точкам пересечения, должны удовлетворять уравнению (ср. § 87):

$$\Phi(x_0+Xt, y_0+Yt)=0. \quad (3)$$

Корни t_1, t_2 и т. д. этого уравнения, будучи подставлены в (2), дадут нам значения координат искомых точек. Число корней уравнения (3) может быть и бесконечно большим.

Остановимся более подробно на случае, когда кривая (1) — алгебраическая, n-го порядка, т. е. $\Phi(x, y)$ есть полином вида [1])

$$\Phi(x, y) = \sum_{k,l} a_{k,l} x^k y^l \quad (k + l \leqslant n). \tag{4}$$

Тогда, очевидно, степень уравнения (3) относительно t будет n (в общем случае) или меньше n, если произойдут сокращения.

Может также случиться, что уравнение (3) обратится в тождество; в этом случае все точки прямой (2) принадлежат кривой (1), т. е. прямая (1) есть составная часть кривой (2). Если исключить этот случай, то для определения t будем иметь уравнение степени $\leqslant n$, так что точек пересечения будет не больше n. Число корней будет всегда равно n, если ввести в рассмотрение „мнимые“ и „бесконечно удаленные“ точки, а также „совпадающие“ точки. См. об этом главу VI, § 174.

Из сказанного, в частности, выводим следующее заключение: если прямая имеет с линией n-го порядка более n общих точек, то прямая целиком принадлежит этой линии.

Предложение это можно доказать и так. Рассмотрим сперва случай, когда наша прямая есть ось Ox, т. е. ее уравнение есть $y = 0$. Подставив в (1) значение $y = 0$, получим на основании (4) уравнение

$$a_{n,0} x^n + a_{n-1,0} x^{n-1} + \ldots + a_{00} = 0$$

не выше n-й степени. Если оно имеет больше n корней, то все его коэфициенты равны нулю, т. е.

$$a_{n,0} = a_{n-1,0} = \ldots = a_{10} = a_{00} = 0.$$

Значит, все коэфициенты членов полинома (4), не содержащих y, равны нулю и поэтому y входит во все члены полинома $\Phi(x, y)$.

Взяв y за скобки, будем иметь тождественно

$$\Phi(x, y) = y\,\Phi_1(x, y),$$

где $\Phi_1(x, y)$ есть некоторый полином $(n-1)$-й степени. Уравнение кривой (1) принимает поэтому вид:

$$y \cdot \Phi_1(x, y) = 0, \tag{5}$$

и наша линия распадается на две: $y = 0$ и $\Phi_1(x, y) = 0$.

Если наша прямая задана уравнением общего вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

то возьмем эту прямую за новую ось $O'x'$, а за новую ось $O'y'$ — произвольную другую прямую (пересекающуюся с предыдущей)

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

---

[1]) Коэфициенты при $x^k y^l$ мы обозначили буквой с двумя значками k и l, чтобы наглядно показать, к какому члену относится коэфициент.

т. е. положим (см. предыдущий параграф)

$$y' = Ax + By + C, \quad x' = A'x + B'y + C'. \tag{7}$$

В новых переменных уравнение (1) напишется так

$$\Psi(x', y') = 0, \tag{8}$$

где $\Psi(x', y') = \Phi(x, y)$, если вместо x', y' внести их выражения (7).

На основании предыдущего, если прямая (6) пересекает линию (1) больше чем в n точках [и, значит, прямая $y' = 0$ пересекает линию (8) больше чем в n точках], мы будем иметь тождество

$$\Psi(x', y') = y'\Psi_1(x', y'),$$

где $\Psi_1(x', y')$ — полином $(n-1)$-й степени. Выражая x', y' снова через x, y, получим тождество

$$\Phi(x, y) = (Ax + By + C)\,\Phi_1(x, y), \tag{9}$$

где $\Phi_1(x, y)$ — полином, получаемый из $\Psi_1(x', y')$ подстановкой (7).

Итак, если прямая (6) имеет с линией n-го порядка (1) более n общих точек, то левая часть уравнения (1) разлагается на два множителя, согласно формуле (9), и, следовательно, кривая (1) распадается на прямую (6) и некоторую линию $(n-1)$-го порядка $\Phi_1(x, y) = 0$.

Упражнения и приложения

1. Найти точки пересечения прямой $x = 1 + t$, $y = 1 - t$ и кривой [1])

$$(x-1)^2 + y^2 = 16.$$

Ответ. $\left(\frac{3+\sqrt{31}}{2}, \frac{1-\sqrt{31}}{2}\right)$ и $\left(\frac{3-\sqrt{31}}{2}, \frac{1+\sqrt{31}}{2}\right)$.

2. *Степень точки относительно окружности.* Дана окружность уравнением (координаты — прямоугольные):

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \tag{*}$$

и прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, представленная параметрически:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \tag{**}$$

где l, m — координаты направления. [Мы знаем, что в этом случае t представляет собою расстояние точки (x, y) до точки (x_0, y_0), снабженное знаком; см. § 88.]

Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения нашей прямой с окружностью. Доказать, что произведение расстояний M_0M_1 и M_0M_2 не зависит от l и m, т. е. от направления секущей, проведенной из точки M_0 [2]). Это произведение, снабженное знаком [оно считается положительным, когда $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ одинаково направлены, отрицательным — в противном случае [3])] называется *степенью точки* M_0 *относительно данной окружности*. Найти выражение для этой степени.

Решение. Подставляя значения (**) в уравнение (*), получим

$$(x_0 + lt)^2 + (y_0 + mt)^2 + 2A(x_0 + lt) + 2B(y_0 + mt) + C = 0,$$

---

[1]) Эта кривая есть окружность, если координаты прямоугольные.

[2]) Эта теорема должна быть известна читателю и из элементарной геометрии.

[3]) То-есть произведение будет положительным, если M_0 находится вне окружности, и отрицательным, если M_0 находится внутри (если M_0 находится на самой окружности, то произведение равно нулю).

откуда, принимая во внимание, что $l^2 + m^2 = 1$:

$$t^2 + 2(lx_0 + my_0 + Al + Bm)\,t + x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C = 0.$$

Но мы знаем из элементарной алгебры, что произведение корней t_1, t_2 этого квадратного уравнения равно свободному члену, т. е.

$$t_1 t_2 = x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C.$$

Но ведь $t_1 = M_0M_1$, $t_2 = M_0M_2$, где M_1 и M_2 суть точки пересечения, соответствующие корням t_1 и t_2. Следовательно, для степени k точки $M_0(x_0, y_0)$ относительно данной окружности имеем выражение

$$k = x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C; \qquad (***)$$

так как это выражение не зависит от l и m, то наше утверждение доказано.

Вместе с тем мы видим, что для получения степени k данной точки относительно окружности достаточно в левую часть ее уравнения, приведенного к виду (*), подставить на место x и y координаты данной точки.

3. Доказать, что геометрическое место точек, степени (см. предыдущее упражнение) которых относительно двух данных окружностей равны между собою, есть прямая. (Эта прямая называется *радикальною осью* данных окружностей.)

Доказательство. Пусть уравнения данных окружностей суть

$$x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$$

и

$$x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0.$$

Если (x_0, y_0) есть одна из точек искомого геометрического места, то согласно условию [см. предыдущее упражнение, формула (***)]

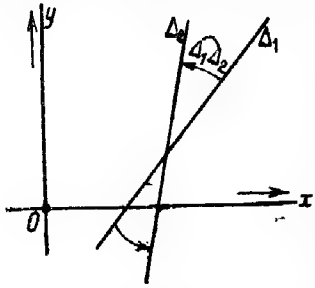
$$x_0^2 + y_0^2 + 2A_1x_0 + 2B_1y_0 + C_1 = x_0^2 + y_0^2 + 2A_2x_0 + 2B_2y_0 + C_2,$$

или после упрощений

$$2(A_1 - A_2)\,x_0 + 2(B_1 - B_2)\,y_0 + C_1 - C_2 = 0.$$

Следовательно, координаты (x_0, y_0) точек нашего геометрического места удовлетворяют уравнению первой степени относительно этих координат; значит, наше геометрическое место есть прямая.

Если данные окружности пересекаются, то радикальная ось есть прямая, проходящая через точки пересечения. Действительно, точки пересечения имеют одинаковые степени относительно обеих окружностей (равные нулю).



Черт. 95.

101. Задача 5. Найти угол между двумя данными прямыми. Под углом между прямыми Δ_1 и Δ_2, *рассматриваемыми в указанном порядке*, мы будем подразумевать угол, на который надо повернуть прямую Δ_1 (в положительном направлении вращения) для того, чтобы привести ее в совпадение с прямой Δ_2 (черт. 95); этот угол мы будем обозначать через $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$. Таким образом порядок, в котором мы рассматриваем данные прямые, имеет значение. Если $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ обозначают векторы направлений данных прямых, то, очевидно,

$$\widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2} + k\pi,$$

где k — целое число, а $\widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}$ обозначает угол, определенный так, как

в § 48. Действительно, при повороте прямой на угол π она снова совмещается сама с собой [1]).

Поэтому будем иметь

$$\operatorname{tg} \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \operatorname{tg} \widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}; \tag{1}$$

обратно: из предыдущей формулы следует, что $\widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2} + k\pi$.

Если прямые Δ_1 и Δ_2 заданы уравнениями в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{2}$$

то можем взять

$$\mathbf{P}_1 = (B_1, -A_1), \quad \mathbf{P}_2 = (B_2, -A_2). \tag{3}$$

Считая теперь координаты прямоугольными, можем применить формулу (3) § 48, куда надо подставить

$$\varphi = \widehat{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}, \quad X_1 = B_1, \quad Y_1 = -A_1, \quad X_2 = B_2, \quad Y_2 = -A_2.$$

Таким образом получим требуемую формулу:

$$\operatorname{tg} \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{4}$$

Если прямые заданы приведенными уравнениями

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2, \tag{5}$$

то предыдущая формула дает (в ней надо положить $A_1 = a_1$, $B_1 = -1$, $A_2 = a_2$, $B_2 = -1$):

$$\operatorname{tg} \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2}. \tag{6}$$

Эту формулу необходимо хорошо помнить; не надо также забывать, что порядок букв имеет значение: в числителе вычитается угловой коэфициент той прямой, от которой отсчитывается угол.

Упражнения

(координаты предполагаются прямоугольными)

1. Найти угол между прямыми Δ_1 и Δ_2, данными уравнениями

$$x - y - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x + 3y + 2 = 0.$$

Ответ. $\operatorname{tg} \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = -5$.

2. Найти угол между прямыми

$$2x - 5y + 5 = 0, \quad 5x + 2y + 12 = 0.$$

Ответ. $\operatorname{tg} \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \infty$, т. е. прямые взаимно перпендикулярны.

3. Найти угол между прямыми Δ_1 и Δ_2, данными уравнениями

$$x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x + 2y + 5 = 0.$$

Ответ. $\operatorname{tg} \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = 1$, $\widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

102. Задача 6. Найти условие перпендикулярности двух прямых. Будем считать координаты прямоугольными. Если прямые Δ_1 и Δ_2 взаимно перпендикулярны, то

$$\operatorname{tg} \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \infty, \tag{1}$$

[1]) Ср. § 89.

откуда согласно формуле (4) предыдущего параграфа

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \qquad (2)$$

это и есть условие перпендикулярности прямых Δ_1 и Δ_2.

Если прямые заданы приведеннымн уравнениями

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2,$$

то условие перпендикулярности получит вид

$$a_1a_2 + 1 = 0, \qquad (3)$$

или

$$a_1 = -\frac{1}{a_2}. \qquad (4)$$

Последнее условие надо хорошо помнить. Словами его можно выразить так: *угловые коэфициенты взаимно перпендикулярных прямых противоположны по величине и по знаку.*

Заметим, что формула (2) непосредственно вытекает из условия перпендикулярности векторов направления $\mathbf{P}_1 = (B_1, -A_1)$ и $\mathbf{P}_2 = (B_2, -A_2)$. Действительно, имеем $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = B_1B_2 + A_1A_2$. Но для перпендикулярности векторов $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = 0$, откуда и вытекает формула (2).

Напомним, что формулы этого и предыдущего параграфов относятся к случаю прямоугольных координат, тогда как условие параллельности было получено нами для общего случая (§ 97).

Нетрудно вывести условие перпендикулярности и для случая общих декартовых координат, пользуясь формулами § 56 (упражнения) для скалярного произведения двух векторов. Предоставляем читателю написать соответствующие формулы.

Упражнения и дополнения

(координаты считаются прямоугольными)

1. Найти угловой коэфицнент a прямой, перпендикулярной к прямой $y = -3x + 1$.

Ответ. $a = +\frac{1}{3}$.

2. Показать, что прямые $x - 5y + 1 = 0$ и $5x + y - 8 = 0$ взаимно перпендикулярны.

3. Выразить условие перпендикулярности прямых

$$Ax + By + C = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}.$$

Ответ. $\frac{A}{X} = \frac{B}{Y}$.

4. Выразить условие перпендикуляриости прямых:

$$\frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{X_2} = \frac{y - y_2}{Y_2}.$$

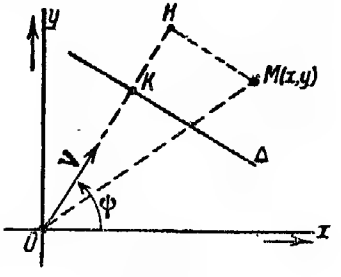
Ответ. $X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0$.

103. Задача 7. Найтн расстояние данной точки до данной прямой. Предположим сперва координаты прямоугольными; пусть рассматриваемая прямая Δ дана нормальным уравнением (§ 96):

$$x\cos\psi + y\sin\psi - p = 0. \qquad (1)$$

Если $M(x_1, y_1)$ есть данная точка (черт. 96), то ее расстояние до прямой Δ будет, очевидно, равно длине отрезка KH, где K есть основание перпендикуляра, опущенного из O на Δ, а H есть прямоугольная проекция точки M на этот перпендикуляр (или на его продолжение). Будем приписывать этому расстоянию определенный знак; именно, под расстоянием h точки M до прямой Δ будем понимать алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{KH}$ по направлению орта $\mathbf{V}$ (мы применяем обозначения § 96).

Это значит, что расстояние h мы будем считать положительным, когда точка M и начало координат находятся по разные стороны Δ; в противном случае h будет отрицательным. Этот критерий отпадает, если Δ проходит через O; однако, очевидно, во всех случаях точкам, находящимся по одну и ту же сторону Δ, соответствуют значения h, имеющие один и тот же знак, а точкам, расположенным по разные стороны, — значения, имеющие различные знаки.



Черт. 96.

Имеем, очевидно, $OH = \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{V}$, где OH обозначает алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{OH}$ по направлению $\mathbf{V}$; кроме того, $OK = p$. Поэтому $h = \overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{V} - p$. Но ведь $\overrightarrow{OM} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{V} = (\cos\psi, \sin\psi)$. Следовательно, $\overrightarrow{OM} \cdot \mathbf{V} = x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi$, откуда, наконец,

$$h = x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi - p. \tag{2}$$

Итак, имеем правило: *для того чтобы найти расстояние точки до прямой, надо в левую часть нормального уравнения данной прямой на место текущих координат*[1]) *подставить координаты данной точки.*

Если уравнение прямой дано в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

то для решения задачи достаточно привести это уравнение к нормальному виду, умножая обе части на нормирующий множитель

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{4}$$

где знак перед радикалом должен быть выбран в соответствии со сказанным в § 96.

Итак, имеем формулу

$$h = \lambda(Ax_1 + By_1 + C), \tag{5}$$

где λ — множитель, не зависящий от координат точки $M(x_1, y_1)$. *Эта формула остается в силе и для декартовых координат общего вида,*

[1]) Координаты x и y, фигурирующие в уравнении какой-либо линии $(x, y) = 0$, часто называются *текущими* координатами.

только в этом случае постоянный множитель λ уже не дается формулой (4), а более сложной.

Действительно, пусть (3) есть уравнение прямой в любой декартовой системе. Взяв произвольно прямоугольную систему, обозначим через x', y' координаты в новой системе. Пусть при переходе к новой системе $Ax+By+C$ обращается в $A'x'+B'y'+C'$. Тогда в новой системе $h=\lambda(A'x'_1+B'y'_1+C)$, где $\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}$, а x'_1, y'_1 — новые координаты точки M. Возвращаясь к старым координатам, получим снова (5).

Упражнения

1. Найти расстояние начала координат до прямой $x+2y-1=0$ (в прямоугольных координатах).

Ответ. $\frac{0+2\cdot 0-1}{\sqrt{1^2+2^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Найти расстояние точки (3, 5) до прямой $2x+y+2=0$ (в прямоугольных координатах).

Ответ. $\frac{2\cdot 3+5+2}{-\sqrt{2^2+1^2}}=-\frac{13}{\sqrt{5}}$.

3. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$2x+3y+6=0,\ 2x+3y-1=0$$

(в прямоугольных координатах).

(Указание. Возьмите какую-либо точку на одной из прямых и найдите ее расстояние h до другой.)

Ответ. $h=\frac{7}{\sqrt{13}}$.

4. Доказать, что в необобщенных косоугольных координатах

$$\lambda=\frac{\sin\nu}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}},$$

где ν — координатный угол.

104. Задача 8. Найти отношение, в котором данная прямая делит отрезок, соединяющий две данные точки. Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ — данные точки и M — точка пересечения прямой M_1M_2 с данной прямой Δ (составьте чертеж!). Очевидно, искомое отношение

$$k=\frac{M_1M}{MM_2},$$

которому мы будем приписывать знак, как в § 41, равно по величине и знаку выражению $-\frac{h_1}{h_2}$, где h_1 и h_2 обозначают соответственно расстояния точек M_1 и M_2 до прямой Δ, снабженные знаками согласно правилу предыдущего параграфа. Знак $(-)$ перед последней дробью взят потому, что если точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны прямой Δ, величины h_1 и h_2 будут противоположного знака (согласно сказанному в предыдущем параграфе), тогда как отношение k в этом случае должно быть положительным (§ 41); наоборот, если M_1 и M_2 лежат

по одну сторону от Δ, то h_1 и h_2 одного знака, тогда как отношение k должно быть отрицательным.

Но мы имеем (см. предыдущий параграф) $h_1 = \lambda(Ax_1 + By_1 + C)$, $h_2 = \lambda(Ax_2 + By_2 + C)$, где $Ax + By + C$ есть левая часть уравнения прямой Δ, а λ — постоянный множитель. Следовательно, будем иметь окончательно

$$k = \frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}. \quad (1)$$

105. Число независимых постоянных в уравнении прямой. Прежде чем приступить к решению задач, в которых требуется определить уравнение прямой по тем или иным условиям, сделаем следующее замечание общего характера.

Приведенное уравнение прямой

$$y = ax + b$$

содержит в себе две постоянные a и b, которые вполне определяют положение прямой. В соответствии с этим говорят, что положение прямой на плоскости определяется двумя независимыми постоянными. Ясно поэтому, что задача нахождения прямой будет вполне определенной только тогда, когда даны *два* условия [1]) (позволяющие определить две неизвестных постоянных a и b).

Этому как будто противоречит общий вид уравнения прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

содержащего три постоянные A, B и C. На самом же деле, существенную роль играют не сами эти три величины, а отношения двух из них к третьей. Это происходит от того, что, если в предыдущем уравнении все коэфициенты заменить на пропорциональные им величины, оно будет выражать ту же прямую.

Например, если известно, что коэфициенты искомой прямой удовлетворяют двум соотношениям:

$$\frac{A}{C} = 3, \quad \frac{B}{C} = 5,$$

или, что все равно,

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{5} = \frac{C}{1},$$

этого уже достаточно, чтобы написать уравнение искомой прямой

$$3x + 5y + 1 = 0,$$

или же всякое другое, получаемое из предыдущего умножением на постоянный множитель, например:

$$6x + 10y + 2 = 0.$$

---

[1]) Здесь под „условием" мы понимаем требование, которое можно выразить аналитически при помощи одного уравнения. Например, требование, чтобы прямая $y = ax + b$ проходила через точку (3, 5), выражается одним равенством: $5 = a \cdot 3 + b$; следовательно, мы здесь имеем одно „условие".

106. Пучок прямых. Из сказанного в предыдущем параграфе ясно, что если перед нами поставлена задача о нахождении прямой по *одному* заданному условию, то такая задача будет неопределенной, т. е., вообще говоря, будет допускать бесчисленное множество решений, зависящих уже не от двух, а от одной независимой постоянной. Примером может служить задача нахождения прямой, проходящей через одну заданную точку. Эта задача допускает бесчисленное множество решений.

Совокупность прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$, называется *пучком прямых с центром* M_0.

Если (X, Y) обозначают коэфициенты направления прямой, принадлежащей пучку с центром в точке M_0, то уравнение этой прямой будет (§ 88)

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}. \tag{1}$$

Изменяя X и Y, можно придать вектору направления прямой любое направление, т. е. получить любую прямую пучка. Следовательно, (1) есть, при произвольных X и Y (не равных одновременно нулю), общее уравнение прямых пучка. Это уравнение при $X\neq 0$ можно переписать так:

$$y-y_0=a(x-x_0), \tag{2}$$

где $a=\frac{Y}{X}$ есть угловой коэфициент прямой пучка. При $X=0$ (т. е. для прямой пучка, параллельной оси Oy) будем иметь

$$x-x_0=0. \tag{3}$$

Это последнее уравнение удобно рассматривать как частный вид уравнения (2), условившись говорить, что уравнение (3) соответствует случаю $a=\infty$ [1]).

Как и следовало ожидать, уравнение прямой, проходящей через заданную точку, зависит от одной независимой произвольной постоянной; если уравнение написано в виде (2), то этой постоянной является угловой коэфициент a.

Придавая a различные значения, мы будем получать различные прямые, проходящие через одну и ту же точку M_0; если еще условимся придавать a также и значение ∞ (понимая это в вышеприведенном смысле), то можно утверждать, что уравнение (2) изображает, при подходящем выборе коэфициента a, всякую прямую, проходящую через данную точку.

Заметим еще, что общее уравнение (1) прямых, проходящих через данную точку (x_0, y_0), можно, полагая $Y=A$, $X=-B$, переписать так:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \tag{4}$$

где A и B — произвольные постоянные (не равные одновременно нулю).

107. Задача 9. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данному направлению. Если угловой

---

[1]) Написав уравнение (2) в виде $x-x_0=\frac{y-y_0}{a}$ и полагая $a=\infty$, получим, $x-x_0=0$.

коэфициент данного направления есть a, а данная точка есть $M_1(x_1, y_1)$, то уравнение искомой прямой, очевидно, будет

$$y - y_1 = a(x - x_1). \tag{1}$$

Если данное направление задано не угловым коэфициентом, а коэфициентами направления (X, Y), то уравнение искомой прямой можно написать еще так:

$$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y}, \tag{2}$$

что, в сущности, сводится к тому же.

108. Задача 10. Найти уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Для этого достаточно в уравнении (2) предыдущего параграфа подобрать коэфициенты X и Y так, чтобы прямая проходила и через точку M_2. Замечая, что вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ расположен на искомой прямой, можем принять его за ее вектор направления, т. е. положить $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, и уравнение искомой прямой напишется так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{1}$$

Это же уравнение можно написать сразу, исходя из условия коллинеарности трех точек (x, y), (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (см. § 38); на основании сказанного в упомянутом параграфе, уравнение искомой прямой можно написать и в следующем симметричном виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

109. Задача 11. Найти прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную к заданной прямой (координаты предполагаются прямоугольными). Пусть $M_1(x_1, y_1)$ — заданная точка и

$$y = a_1 x + b_1 \tag{1}$$

— заданная прямая. Уравнение любой прямой, проходящей через M_1, имеет вид

$$y - y_1 = a(x - x_1); \tag{2}$$

для того чтобы эта прямая была перпендикулярна к прямой (1), должно быть (§ 102)

$$a = -\frac{1}{a_1}. \tag{3}$$

Подставляя в предыдущее уравнение значение a из (3), получим

$$y - y_1 = -\frac{1}{a_1}(x - x_1), \tag{4}$$

и наша задача решена.

Если прямая представлена уравнением в коэфициентах направления

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y}, \tag{1a}$$

то уравнение искомой прямой будет

$$X(x-x_1)+Y(y-y_1)=0; \qquad (2a)$$

это следует как из предыдущего решения $\left(\text{в нашем случае } a_1=\frac{Y}{X}\right)$, так и из того факта (§ 95), что вектор (A, B) перпендикулярен к прямой $Ax+By+C=0$.

110. Задача 12. Найти прямую, проходящую через заданиую точку и составляющую с заданной прямой заданный угол (координаты, как и при решении предыдущей задачи, считаются прямоугольными). Эта задача заключает в себе как частные случаи предыдущую задачу и задачу § 107.

Пусть α есть угол, который искомая прямая должна составлять с заданной прямой, предполагая, что этот угол отсчитывается от заданной прямой в положительном направлении (§ 101). При обозначениях предыдущего параграфа мы должны будем определить a из условия (§ 101):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a-a_1}{1+aa_1}.$$

Решая последнее уравнение относительно a и подставляя найденное значение в уравнение (2) предыдущего параграфа, найдем требуемое уравнение

$$y-y_1=\frac{a_1+\operatorname{tg}\alpha}{1-a_1\operatorname{tg}\alpha}(x-x_1).$$

Если направление отсчета углов не указано, то вместо $\operatorname{tg}\alpha$ надо взять $\pm\operatorname{tg}\alpha$. В этом случае задача допускает два решения; исключение составляют случаи $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, рассмотренные в двух предыдущих параграфах, когда задача имеет только одно решение.

Упражнения и дополнения (к § 106—110)

1. Найти прямую, проходящую через точку $(6, -2)$ и параллельную прямой

$$3x-8y+2=0.$$

Ответ. $3(x-6)-8(y+2)=0$.

2. Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и параллельной прямой $Ax+By+C=0$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

3. Показать, что уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и перпендикулярной к прямой $Ax+By+C=0$, имеет вид (в прямоугольных координатах)

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0.$$

4. Найти прямую, проходящую через точку $(2, 3)$ и перпендикулярную к прямой $3x-8y+2=0$ (в прямоугольных координатах).

Ответ. $8(x-2)+3(y-3)=0$.

5. Найти прямую, проходящую через точки $(2, 3)$ и $(7, 8)$.

Ответ. $\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{8-3}$, или $x-y+1=0$.

6. Найти прямую, проходящую через точку (1, 3) и составляющую с прямой $2x - y + 5 = 0$ угол в 60° (в прямоугольных координатах).

Ответ. Если угол отсчитывается от данной прямой, то уравнение искомой прямой будет:

$$y - 3 = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - 2\sqrt{3}}(x - 1).$$

Если направление отсчета угла не указывается, то задача допускает два решения (второе решение получим из первого заменой $\sqrt{3}$ на $-\sqrt{3}$).

111. Общее уравнение прямых, проходящих через пересечение двух данных. Иногда центр пучка прямых не задается непосредственно, а задаются две прямые, принадлежащие пучку. Тогда центр пучка можно найти как точку пересечения двух данных прямых.

Однако гораздо удобнее найти непосредственно общее уравнение прямых пучка, определяемого двумя данными прямыми, или, иными словами, найти общее уравнение прямых, проходящих через пересечение двух данных.

Пусть

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{2}$$

— уравнения заданных прямых.

Рассмотрим уравнение

$$l_1(A_1x + B_1y + C_1) + l_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{3}$$

где l_1 и l_2 обозначают некоторые произвольные постоянные величины, *не равные одновременно нулю*; это уравнение получается из уравнений (1) и (2) умножением их на постоянные l_1 и l_2 и почленным сложением.

Очевидно, что уравнение (3), которое можно переписать в виде

$$(l_1A_1 + l_2A_2)x + (l_1B_1 + l_2B_2)y + (l_1C_1 + l_2C_2) = 0, \tag{3a}$$

представляет собою уравнение некоторой прямой (ибо это — уравнение первой степени).

Докажем теперь, что прямая (3) удовлетворяет условиям задачи, т. е. докажем, что *прямая* (3) *проходит через точку пересечения прямых* (1) *и* (2), *каковы бы ни были значения постоянных* l_1 *и* l_2.

В самом деле, если x_0, y_0 обозначают координаты точки пересечения прямых (1) и (2), то

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0,$$

а потому

$$l_1(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + l_2(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0,$$

т. е. координаты точки пересечения удовлетворяют уравнению (3), иначе говоря, точка (x_0, y_0) лежит на прямой (3), а это и требовалось доказать.

Введем для краткости обозначения:

$$F_1(x, y) = A_1x + B_1y + C_1,$$

$$F_2(x, y) = A_2x + B_2y + C_2.$$

$F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ представляют собою линейные функции переменных x и y. При этих обозначениях уравнение (3) перепишется так:

$$l_1F_1(x, y) + l_2F_2(x, y) = 0. \qquad (4)$$

Придавая различные значения l_1 и l_2, мы получим различные прямые, проходящие через точку пересечения прямых (1) и (2).

В сущности положение прямой (4) зависит не от самих величин l_1 и l_2, а от их отношения

$$k = \frac{l_2}{l_1};$$

действительно, разделив уравнение (4) на l_1, мы приведем его к виду

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0. \qquad (5)$$

Безоговорочно это можно сделать только в том случае, если $l_1 \neq 0$. Но если $l_1 = 0$ (а следовательно, $l_2 \neq 0$, ибо, по условию, l_1 и l_2 не могут быть равны одновременно нулю), то уравнение (4) сводится к следующему: $F_2(x, y) = 0$, т. е. к уравнению прямой (2). Условимся теперь допускать, что в уравнении (5) величина k может принимать и значение ∞, считая, что при этом уравнение (2) сводится к уравнению [1] $F_2(x, y) = 0$. При этой оговорке уравнения (4) и (5) вполне эквивалентны.

Мы увидим в следующем параграфе, что при подходящем выборе величин l_1, l_2 в уравнении (4) [или при подходящем выборе k в (5)] мы сможем получить любую прямую пучка, так что уравнение (4) или (5) есть действительно самое общее уравнение прямых пучка, определяемого двумя данными прямыми.

До сих пор мы предполагали, что данные прямые (1) и (2) пересекаются в некоторой точке на конечном расстоянии. Посмотрим теперь, что выражает уравнение (4), если данные прямые параллельны, но не совпадают, т. е. если $A_1 = mA_2$, $B_1 = mB_2$, $C_1 \neq mC_2$, где m — некоторое число, отличное от нуля. В этом случае уравнение (4) или, что все равно, уравнение (3а) принимает вид

$$A'x + B'y + C' = 0, \qquad (6)$$

где $A' = (ml_1 + l_2)A_2$, $B' = (ml_1 + l_2)B_2$, $C' = l_1C_1 + l_2C_2$. Первые два из последних равенств показывают, что при всяких значениях l_1 и l_2 первые два коэфициента уравнения (6) пропорциональны первым двум коэфициентам уравнения (2), а это значит, что прямая, изображаемая уравнением (6), при всяких значениях l_1 и l_2 параллельна прямой, изображаемой уравнением (2), т. е. параллельна обеим данным прямым [2].

---

1) Если переписать уравнение $F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0$ так:

$$\frac{1}{k}F_1(x, y) + F_2(x, y) = 0$$

и положить $k = \infty$, получим $F_2(x, y) = 0$.

2) Исключение может представить случай, когда $ml_1 + l_2 = 0$, т. е. $A' = B' = 0$ (в этом случае, как легко видеть, $C' \neq 0$). Но и в этом случае можно говорить, что (6) представляет „несобственную" прямую (см. конец § 90), которая параллельна любому направлению.

Как мы увидим в следующем параграфе, всякая прямая, параллельная данным, может быть получена из (6) путем подходящего выбора чисел l_1 и l_2.

Совокупность параллельных прямых носит также название пучка, но в этом случае говорят, что центр пучка удален в бесконечность, или что пучок *несобственный*.

Если, наконец, прямые (1) и (2) совпадают, то мы будем иметь $A_1 = mA_2$, $B_1 = mB_2$, $C_1 = mC_2$ (где m – некоторое число), и все три коэфициента уравнения (6) будут пропорциональны соответствующим коэфициентам уравнения (2), или, что все равно, уравнения (1). Следовательно, в этом исключительном случае уравнение (6) при всяких значениях l_1 и l_2 выражает одну и ту же прямую (ту же самую, что и данные уравнения). Во всем последующем мы будем подразумевать, что данные прямые не совпадают.

112. Задача 13. Найти прямую, проходящую через пересечение двух заданных прямых и через другую заданную точку. Сохраним обозначения предыдущего параграфа. Пусть, кроме того, $M_1(x_1, y_1)$ обозначает некоторую заданную точку, не совпадающую с пересечением данных прямых. Наша задача будет решена, если нам удастся так подобрать параметр k в уравнении (5) предыдущего параграфа, чтобы прямая, изображаемая этим уравнением, проходила через точку M_1. Выражая условие прохождения этой прямой через точку $M_1(x_1, y_1)$, получим

$$F_1(x_1, y_1) + kF_2(x_1, y_1) = 0, \tag{1}$$

или, подробнее:

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 + k(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0; \tag{2}$$

это соотношение позволяет определить k

$$k = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}. \tag{3}$$

Подставляя найденное значение k в уравнение (5) предыдущего параграфа, получим уравнение искомой прямой.

Для k может получиться значение ∞ только в том случае, когда знаменатель $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0$. Но это значит, что точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на заданной прямой (2) предыдущего параграфа. С другой стороны, согласно условию, принятому в предыдущем параграфе, значению $k = \infty$ соответствует прямая $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, как это и должно быть, ибо в этом случае искомая прямая должна совпадать с нею.

Конечно, все сказанное относится и к случаю несобственного пучка, т. е. когда данные прямые параллельны (но не совпадают).

Итак, задача допускает всегда одно и только одно решение [1]).

---

[1]) Напомним, что мы исключили из рассмотрения случай, когда заданная точка совпадает с пересечением заданных прямых, т. е. когда одновременно

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0, \quad A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0.$$

Если бы это имело место, то формула (3) дала бы для k неопределенное значение $\frac{0}{0}$, как и надо было предвидеть. В этом случае уравнение (5) предыдущего параграфа решает задачу при всяком значении k.

Чтобы избежать рассмотрения бесконечно больших значений постоянной k, можно пользоваться уравнением (4) предыдущего параграфа.

Решенная нами задача доказывает также утверждение, высказанное в предыдущем параграфе, что *всякая* прямая, принадлежащая пучку, может быть получена из общего уравнения

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0,$$

если придать постоянной k подходящее значение. Действительно, мы можем получить путем выбора k прямую пучка, проходящую через любую точку плоскости, следовательно, мы можем получить любую прямую пучка.

113. Условие пересечения трех прямых в одной точке. Пусть даны три прямые уравнениями

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0, \quad F_3(x, y) = 0, \tag{1}$$

где для краткости введены обозначения:

$$F_1(x, y) = A_1x + B_1y + C_1, \quad F_2(x, y) = A_2x + B_2y + C_2,$$
$$F_3(x, y) = A_3x + B_3y + C_3. \tag{2}$$

Уравнение всякой прямой, проходящей через пересечение прямых, представляемых первыми двумя уравнениями, может быть написано в виде

$$l_1F_1(x, y) + l_2F_2(x, y) = 0. \tag{3}$$

В частности, если третья из данных прямых проходит через пересечение двух первых, то предыдущее уравнение, при подходящем выборе постоянных l_1 и l_2, должно изображать эту третью прямую. А это значит, что левая часть уравнения (3) может только постоянным множителем отличаться от левой части уравнения $F_3(x, y) = 0$ (см. § 98); иными словами, мы должны иметь *тождество* $l_1F_1(x, y) + l_2F_2(x, y) = kF_3(x, y)$, где k — некоторая постоянная, отличная от нуля. Обозначая для симметрии k через $(-l_3)$, предыдущее тождество можно переписать так:

$$l_1F_1(x, y) + l_2F_2(x, y) + l_3F_3(x, y) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что, обратно: если можно так подобрать три постоянных l_1, l_2, l_3, не равных одновременно нулю, чтобы имело место тождество (4), то данные три прямые пересекаются в одной точке.

Все сказанное относится и к случаю, когда две из данных прямых пересекаются в бесконечности (т. е. параллельны). Тогда условие (4) выражает, что и третья прямая пересекается с двумя первыми в бесконечности, т. е. параллельна им.

Итак, *для того чтобы три прямых* (1) *имели общую точку* [1]) (конечную или бесконечно удаленную), *необходимо и достаточно, чтобы можно было подобрать три таких числа* l_1, l_2, l_3, *не равных одновременно нулю, при которых равенство* (4) *обращается в тождество.*

[1]) Иными словами, чтобы эти прямые принадлежали одному и тому же пучку.

Например, прямые, представленные уравнениями

$$x+2y-1=0, \quad 2x+y-4=0, \quad 4x+5y-6=0,$$

проходят через одну точку, так как имеем тождество

$$2(x+2y-1)+1\cdot(2x+y-4)+(-1)(4x+5y-6)=0.$$

Легко непосредственно проверить, что предыдущее заключение (напечатанное курсивом) остается в силе, если допустить совпадение некоторых из трех рассматриваемых прямых. Тогда может случиться, что общих точек — бесчисленное множество.

Заметим, наконец, что тождество (4) эквивалентно равенствам:

$$\left.\begin{aligned} l_1A_1+l_2A_2+l_3A_3&=0,\\ l_1B_1+l_2B_2+l_3B_3&=0,\\ l_1C_1+l_2C_2+l_3C_3&=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

которые получим, приравнивая в (4) нулю коэфициенты при x, y и свободный член. Следовательно, для того чтобы три прямые (2) имели общую точку, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

ибо, как известно из теории определителей [1]), в этом и только в этом случае существуют величины l_1, l_2, l_3, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие однородным уравнениям (5).

114. Задача 14. Найти уравнение прямой, проходящей через пересечение заданных прямых и имеющей заданное направление. Пусть a есть угловой коэфициент данного направления. При обозначениях § 111 задача сводится к определению постоянной k в уравнении

$$F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0 \tag{1}$$

так, чтобы угловой коэфициент прямой, изображаемой этим уравнением, был равен a.

Переписав предыдущее уравнение в виде

$$(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+C_1+kC_2=0,$$

находим, что требуемое условие выражается равенством

$$-\frac{A_1+kA_2}{B_1+kB_2}=a,$$

что представляет собой уравнение первой степени относительно k; решив это уравнение и подставив найденное значение k в (1), мы получим искомое уравнение [2]).

---

[1]) См. Добавление, § 6.

[2]) Читателю предлагается исследовать случай, когда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, т. е. когда мы имеем дело с пучком параллельных прямых. В этом случае задача либо не допускает решения, либо допускает бесчисленное множество решений.

Аналогично решается задача: *найти прямую, проходящую через пересечение заданных прямых и перпендикулярную к заданному направлению* (более обще, составляющую с заданным направлением заданный угол) (ср. § 109, 110).

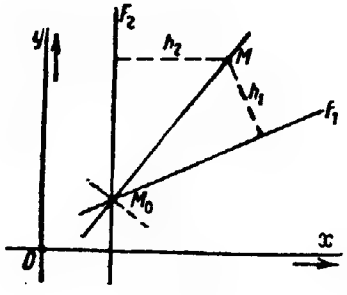
115. Геометрическое значение постоянной k. Параметр k в уравнении

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0 \qquad (1)$$

получает весьма простое геометрическое значение, если уравнения прямых $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ взять в нормальной форме.

В этом случае, вводя обозначения § 96 и отмечая значками 1 и 2 элементы, относящиеся к первой и второй прямым, будем иметь, считая координаты прямоугольными:

$$F_1(x, y) = x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1 - p_1,$$
$$F_2(x, y) = x\cos\psi_2 + y\sin\psi_2 - p_2.$$



Черт. 97.

Обозначая, далее, через h_1 и h_2 расстояния (снабженные знаками) какой-либо точки $M(x, y)$ соответственно до F_1 и F_2 [1]), будем иметь (§ 103)

$$h_1 = x\cos\psi_1 + y\sin\psi_1 - p_1,$$
$$h_2 = x\cos\psi_2 + y\sin\psi_2 - p_2.$$

Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

$$h_1 + kh_2 = 0,$$

или

$$k = -\frac{h_1}{h_2}. \qquad (2)$$

Следовательно, если не обращать внимания на знак, постоянная k равна отношению расстояний произвольной точки на прямой (1) до прямых $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$.

На основании условия относительно знаков расстояний (§ 103) ясно, что k есть величина отрицательная, если прямая (1) проходит через тот из углов между прямыми F_1 и F_2, где расположено начало координат O, и через вертикальный с ним угол (как на черт. 97); в противном случае (черт. 97, пунктир) k есть положительная величина [2]).

В общем случае, когда прямые F_1 и F_2 заданы уравнениями общего вида, а система координат — обобщенная декартова, будем иметь

$$h_1 = \lambda_1 F_1(x, y), \quad h_2 = \lambda_2 F_2(x, y),$$

где λ_1, λ_2 — постоянные (§ 103), и вместо формулы (2) получим

$$k = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{h_1}{h_2}. \qquad (3)$$

---

[1]) Для краткости прямою F мы называем прямую, изображаемую уравнением $F(x, y) = 0$.

[2]) Этот критерий отпадает, если одна из данных прямых $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ проходит через начало координат.

Упражнения и приложения (к § 111—115)

1. Найти прямую, проходящую через начало координат и через пересечение прямых $3x+y-1=0$ и $2x-8y+3=0$.

Ответ. $11x-5y=0$.

2. Найти прямую, проходящую через пересечение прямых $x+y+1=0$, $x+2y-2=0$ и параллельную прямой $x=3y+5$.

Ответ. $x-3y+13=0$.

3. Найти прямую, проходящую через пересечение прямых $x-y-5=0$, $2x-3y-1=0$ и перпендикулярную к прямой $x+2y=0$ (координаты — прямоугольные).

Ответ. $2x-y-19=0$.

4. Найти уравнение биссектрис углов, заключенных между двумя данными прямыми, *нормальные* уравнения которых суть (в прямоугольных координатах)

$$F_1(x, y)=0 \quad \text{и} \quad F_2(x, y)=0.$$

Решение. Прямые F_1 и F_2 образуют два угла, дополняющие друг друга до π. Следовательно, искомых биссектрис будет две. Придав постоянной k в уравнении

$$F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0$$

подходящее значение, мы получим уравнение любой из них.

Так как каждая точка биссектрисы равноудалена от данных прямых F_1 и F_2, то на основании § 115 будем иметь

$$k=\pm 1.$$

Очевидно, значению $k=+1$ соответствует одна биссектриса (именно та, которая не проходит через угол, содержащий начало координат), а значению $k=-1$ соответствует другая биссектриса.

Если уравнения прямых даны в общем виде, то уравнения биссектрис углов между ними напишутся так (в случае прямоугольных координат):

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

двум возможным знакам соответствуют две биссектрисы.

5. Доказать, пользуясь условием перпендикулярности двух прямых, что две биссектрисы, упомянутые в предыдущем упражнении, взаимно перпендикулярны.

6. Доказать, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть нормальные уравнения прямых (в прямоугольных координатах), представляющих стороны треугольника, суть $F_1(x, y)=0$, $F_2(x, y)=0$ и $F_3(x, y)=0$. Если начало координат находится внутри треугольника (что всегда можно предполагать), то уравнения биссектрис внутренних углов будут (см. упражнение 4)

$$F_2(x, y)-F_3(x, y)=0, \quad F_3(x, y)-F_1(x, y)=0, \quad F_1(x, y)-F_2(x, y)=0. \quad (*)$$

Но так как мы имеем тождество (опускаем для краткости x и y)

$$1\cdot(F_2-F_3)+1\cdot(F_3-F_1)+1\cdot(F_1-F_2)=0,$$

то, на основании § 113, прямые, представляемые уравнениями (*), проходят через одну точку (в нашем случае $l_1=l_2=l_3=1$).

7. Доказать (ср. предыдущее упражнение), что биссектрисы двух внешних углов треугольника и биссектриса внутреннего угла, не смежного с ними, пересекаются в одной точке.

Доказательство. При обозначениях предыдущего упражнения биссектрисы внешних углов между сторонами F_2, F_3 и сторонами F_3, F_1 будут даны уравнениями:

$$F_2+F_3=0, \quad F_3+F_1=0.$$

Биссектриса внутреннего угла между сторонами F_1 и F_2 будет дана уравнением $F_1 - F_2 = 0$. Но так как имеем тождество

$$1 \cdot (F_2 + F_3) + (-1) \cdot (F_3 + F_1) + 1 \cdot (F_1 - F_2) = 0,$$

то предложение доказано.

8. Доказать, что радикальные оси (§ 100, упражнение 3) трех окружностей, взятых попарно, пересекаются в одной точке (эта точка называется *радикальным центром* трех данных окружностей).

Доказательство. Если $x^2 + y^2 + 2A_1x + 2B_1y + C_1 = 0$, $x^2 + y^2 + 2A_2x + 2B_2y + C_2 = 0$, $x^2 + y^2 + 2A_3x + 2B_3y + C_3 = 0$ суть уравнения данных окружностей в прямоугольных координатах, то уравнения радикальных осей будут (§ 100, упражнение 3)

$2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + C_1 - C_2 = 0$ (для первой и второй окружностей),
$2(A_2 - A_3)x + 2(B_2 - B_3)y + C_2 - C_3 = 0$ („ второй и третьей „),
$2(A_3 - A_1)x + 2(B_3 - B_1)y + C_3 - C_1 = 0$ („ третьей и первой „).

Если сложить левые части этих уравнений, мы, как легко видеть, получаем выражение, тождественно равное нулю, а отсюда и следует наше утверждение.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

В предыдущей главе мы ознакомились с основным вопросом геометрии на плоскости — вопросом о представлении плоских линий при помощи уравнений.

В пространстве трех измерений приходится наряду с образами одномерными (линиями) рассматривать еще образы двумерные (поверхности).

Начнем с рассмотрения поверхностей, ибо в смысле аналитического представления они являются, в известной степени, аналогичными линиям на плоскости.

Во всей этой главе система координат предполагается декартовой. Иногда, для упрощения формул, она, кроме того, предполагается прямоугольной; это последнее обстоятельство всегда будет оговорено особо.

116. Уравнение поверхности. В элементарной геометрии не дается общее определение понятия „поверхность". Там обычно рассматриваются только поверхности частного вида, а именно: плоскость, сфера, круговые цилиндр и конус. Мы дадим здесь общее определение поверхности.

Поверхностью называется геометрическое место точек, координаты которых (относительно данной системы координат) *удовлетворяют одному уравнению вида*

$$\Phi(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

где $\Phi(x, y, z)$ обозначает функцию трех переменных x, y и z [1]).

Уравнение (1) называется уравнением этой поверхности, отнесенной к данной системе координат. Мы предполагаем, что уравнение (1) фактически содержит по крайней мере одну из переменных x, y, z, относительно которой его можно решить. Например, предположение о разрешимости (1) относительно переменной z дает возможность переписать уравнение (1) в виде

$$z = \varphi(x, y), \tag{1a}$$

где $\varphi(x, y)$ — однозначная или многозначная функция переменных x и y.

Из нашего определения следует, что *уравнение данной поверхности есть уравнение с тремя* [2]) *переменными, которое удовлетворяется тогда и только тогда, если на место переменных подставить координаты какой-либо точки поверхности.*

---

[1]) Это определение применимо для любой системы координат в пространстве.

[2]) Фактически в уравнение могут входить не все три переменных (см. ниже, § 118).

Данное выше определение понятия „поверхность" — слишком общее. Под это определение могут подойти образы, далекие от того, что мы привыкли называть „поверхностью". Поэтому при более детальном изучении поверхностей должны быть сделаны некоторые дополнительные предположения относительно функции $\Phi(x, y, z)$ или $\varphi(x, y)$. См. курсы дифференциальной геометрии.

Если дано уравнение поверхности, отнесенной к определенной системе координат, то, чтобы найти уравнение той же поверхности относительно другой системы, достаточно в данное уравнение подставить на место старых координат их выражения через новые.

Например, если

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

представляет собою уравнение поверхности, отнесенной к какой-либо декартовой системе $Oxyz$, то, чтобы найти уравнение той же поверхности относительно другой декартовой системы $O'x'y'z'$, достаточно в предыдущее уравнение подставить выражения x, y, z через x', y', z'; эти выражения имеют вид [§ 66, формула (1)]

$$x = a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \quad y = b + m_1x' + m_2y' + m_3z',$$
$$z = c + n_1x' + n_2y' + n_3z'.$$

Поэтому предыдущее уравнение преобразуется в следующее:

$$\Phi_1(x', y', z') = 0,$$

где для краткости введено обозначение

$$\Phi(a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \quad b + m_1x' + m_2y' + m_3z',$$
$$c + n_1x' + n_2y' + n_3z') = \Phi_1(x', y', z')$$

(ср. § 82).

Нам остается показать теперь, что поверхности, рассматриваемые в элементарной геометрии, действительно подходят под приведенное выше общее определение поверхностей, т. е. что для каждой из них можно составить уравнение вида (1), которое удовлетворяется тогда и только тогда, если на место x, y и z подставить координаты произвольной точки рассматриваемой поверхности. Мы ограничимся выводом уравнений сферы, конуса и цилиндра; уравнение плоскости будет рассмотрено ниже особо.

Для вывода требуемых уравнений мы можем в каждом отдельном случае воспользоваться специально выбранной системой координат, так как переход к любой другой системе, на основании только что сказанного, никаких затруднений не представляет.

117. Уравнение сферы и кругового конуса в прямоугольных координатах. 1. Пусть дана *сфера* радиуса r с центром в точке $C(a, b, c)$. Сфера, по определению, есть геометрическое место точек $M(x, y, z)$, расстояние которых до C равно r.

Выражая это определение аналитически, получим, ограничиваясь для простоты случаем прямоугольных координат:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r,$$

или

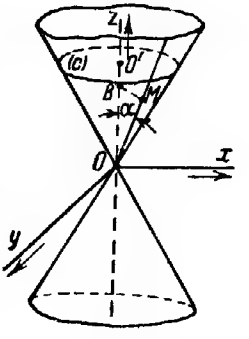
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Это и есть уравнение сферы в прямоугольных декартовых координатах. Если центр сферы совпадает с началом координат, то $a = b = c = 0$, и предыдущее уравнение принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{2}$$

2. *Конусом* называется поверхность, образованная прямыми (*образующими*), проходящими через постоянную точку (*вершину*) и пересекающими постоянную линию (*направляющую*).

Если направляющая есть окружность (c), а вершина O расположена на перпендикуляре, восставленном из центра O' окружности (c) к ее плоскости (черт. 98), то конус называется круговым, а прямая OO' — осью конуса. Всякий конус имеет две полости, расположенные по обеим сторонам вершины (в элементарной геометрии обыкновенно рассматривается только одна полость или даже только часть одной полости, заключенная между вершиной и направляющей).



Черт. 98.

Для вывода уравнения кругового конуса примем его вершину O за начало прямоугольных координат, а ось Oz направим по оси конуса.

Пусть α — острый угол между образующей конуса и положительным направлением оси Oz. Этот угол, очевидно, есть величина постоянная. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ находилась на конусе, необходимо и достаточно, чтобы острый угол между направлениями OM и Oz был равен α. Чтобы выразить это условие аналитически, обозначим через B прямоугольную проекцию точки M на Oz. Тогда наше условие выразится так:

$$\frac{|BM|}{|OB|} = \operatorname{tg}\alpha;$$

замечая, далее, что точка B имеет координаты $(0, 0, z)$, получим $|OB| = |z|$ и

$$|BM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|z|} = \operatorname{tg}\alpha,$$

или, по возведении в квадрат и уничтожении знаменателя,

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2, \tag{3}$$

где для краткости введено обозначение

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Уравнение (3) и есть требуемое. Вряд ли следует напоминать, что выведенное уравнение относится к специально выбранной системе координат.

Упражнения и дополнения

1. Показать, что уравнение сферы (в прямоугольных координатах) имеет вид $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$ [1]) (1а) (причем $A^2+B^2+C^2-D>0$) и что, обратно, уравнение (1а) выражает сферу с центром в точке $(-A, -B, -C)$ радиуса $r=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$ (ср. § 80, замечание).

2. Найти уравнение кругового конуса с вершиной в начале координат O, ось которого имеет направление орта $\mathbf{e}=(l, m, n)$ (координаты — прямоугольные).

Решение. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ находилась на конусе, необходимо и достаточно, чтобы угол ϑ между $\overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{e}$ был равен α или $\pi-\alpha$, где α имеет то же значение, что и выше. Следовательно, $\cos\vartheta=\pm\cos\alpha$, $\cos^2\vartheta=\cos^2\alpha$. Но (§ 45) $\cos\vartheta=\dfrac{lx+my+nz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Следовательно, $\dfrac{(lx+my+nz)^2}{x^2+y^2+z^2}=a^2$, где положено $\cos\alpha=a$, или

$$(lx+my+nz)^2=a^2(x^2+y^2+z^2). \tag{4}$$

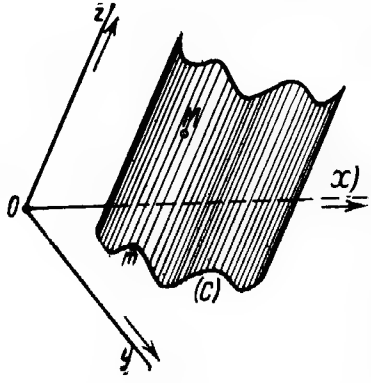
Это и есть требуемое уравнение. Если $l=m=0$, $n=\pm 1$, то, как легко видеть, снова получим уравнение (3).

118. Уравнение цилиндра. *Цилиндром* называется поверхность, образованная параллельными между собою прямыми (*образующими*), пересекающими постоянную линию (*направляющую*).

Если направляющая есть окружность, а образующие перпендикулярны к плоскости этой окружности, то цилиндр называется *круговым*.

Мы выведем здесь уравнение цилиндра общего вида (а не только кругового).

Возьмем декартову систему координат, ось Oz которой параллельна образующим цилиндра. Пусть (C) есть линия пересечения цилиндра с плоскостью Oxy (черт. 99). Пусть, далее,



Черт. 99.

$$\Phi(x, y)=0 \tag{1}$$

есть уравнение линии (C) на плоскости Oxy. Для того чтобы какая-либо точка $M(x, y, z)$ пространства лежала на нашем цилиндре, необходимо и достаточно, чтобы проекция m этой точки на плоскость Oxy (взятая параллельно Oz) лежала на (C). Следовательно, для того чтобы точка $M(x, y, z)$ находилась на данном цилиндре, необходимо и достаточно, чтобы координаты x и y этой точки были связаны уравнением (1) (каково бы ни было значение третьей координаты z). Иными словами, уравнение (1), *если его рассматривать как уравнение, связывающее координаты точек пространства*, есть уравнение данного цилиндра.

---

[1]) Это уравнение можно еще представить в несколько более общем виде

$$A_0(x^2+y^2+z^2)+2Ax+2By+2Cz+D=0,$$

где $A_0\neq 0$. Действительно, разделив обе части на A_0, получим уравнение вида (1а).

Это уравнение представляет собою частный вид уравнений (1) § 116; характерною особенностью его является отсутствие в нем координаты z.

Очевидно, что и обратно, всякое уравнение вида (1) есть уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны Oz и линия пересечения которой с плоскостью Oxy изображается *в этой плоскости* уравнением (1) [1]).

Аналогично, уравнения вида

$$\Phi(x, z) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(y, z) = 0$$

выражают цилиндры, образующие которых параллельны соответственно осям Oy и Ox.

Итак, *если в уравнении поверхности отсутствует одна из координат, то эта поверхность есть цилиндр, параллельный соответствующей оси.*

Рассмотрим несколько частных случаев.

1°. *Круговой цилиндр.* Если взять прямоугольную систему координат и предположить, что линия (C) есть окружность, то уравнение (1) обратится в уравнение кругового цилиндра, параллельного оси Oz. Если обозначить через (a, b) координаты центра окружности в плоскости Oxy, а через r радиус ее, то рассматриваемое уравнение напишется так (см. § 80):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0. \tag{2}$$

2°. Уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

очевидно, изображает в пространстве плоскость, параллельную оси Oz и пересекающую плоскость Oxy по прямой, изображаемой в последней плоскости тем же уравнением (3). (Плоскость есть частный вид цилиндрической поверхности, соответствующий случаю, когда линия (C) — прямая.)

119. Классификация поверхностей. По виду своего уравнения в *декартовых* координатах поверхности разделяются на алгебраические и трансцендентные так же, как и плоские кривые (ср. § 85). Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение можно представить в виде

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

где $F(x, y, z)$ — полином (целая рациональная функция относительно x, y и z). Все неалгебраические поверхности называются *трансцендентными*.

Алгебраические поверхности, в свою очередь, разделяются на поверхности различных *порядков*. Именно, если степень полинома $F(x, y, z)$ в уравнении поверхности (1) равна n, то говорят, что поверхность n-го

---

[1]) Мы подчеркиваем слова „в этой плоскости", так как хотим обратить внимание на то, что нельзя просто называть уравнение $\Phi(x, y) = 0$ уравнением линии (C); предыдущее уравнение выражает в пространстве цилиндр, и только те точки этого цилиндра, для которых $z = 0$, составляют линию (C).

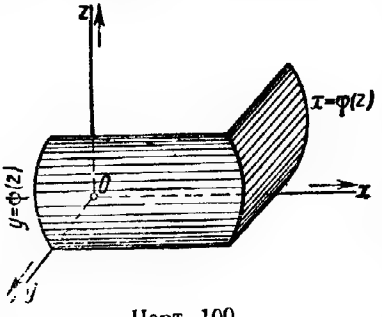
порядка. Например, сфера, круговой конус и круговой цилиндр суть алгебраические поверхности второго порядка (см. их уравнения, выведенные в предыдущих параграфах). Плоскость же есть поверхность первого порядка, как это следует из уравнения (3) предыдущего параграфа.

Легко показать, что порядок поверхности не зависит от выбора системы декартовых координат. Доказательство совершенно аналогично доказательству § 85, и мы его повторять здесь не будем.

Также непосредственно может быть перенесено на наш случай сказанное в § 85 относительно возможности замены уравнения $F(x, y, z) = 0$ уравнением низшей степени (см. об этом подробнее ниже, в § 174).

Алгебраическая поверхность может быть *распадающейся* (*неприводимой*) или *нераспадающейся* (*приводимой*) в зависимости от того, возможно или нет разложить полином $F(x, y, z)$ на множители, являющиеся также полиномами (подробнее см. ниже, в § 174).

120. Уравнения линии. Линию в пространстве можно определить как *пересечение двух поверхностей*, т. е. как геометрическое место точек, находящихся одновременно на двух поверхностях. Пусть $\Phi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$ — уравнения поверхностей, пересечением которых является данная линия. Координаты каждой точки линии должны, очевидно, одновременно удовлетворять обоим предыдущим уравнениям, и обратно, точки, координаты которых одновременно удовлетворяют обоим этим уравнениям, принадлежат данной линии. Короче, данная *линия есть геометрическое место точек, координаты которых одновременно удовлетворяют системе двух уравнений*



Черт. 100.

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= 0, \\ \Psi(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Уравнения (1) называются *уравнениями данной линии.*

Заметим, что данную линию можно представить двумя уравнениями бесчисленным множеством способов: действительно, вместо данных двух поверхностей мы можем взять любую пару поверхностей, пересекающихся по этой линии. Аналитически это соответствует тому, что вместо системы (1) можно взять любую эквивалентную ей систему.

Например, вообще говоря, систему (1) можно разрешить относительно двух из переменных, скажем, x и y; тогда вместо системы (1) мы получим эквивалентную ей систему вида

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(z), \\ y &= \psi(z). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Уравнения последней системы представляют собою уравнения цилиндров, первый из которых параллелен оси Oy, а второй — оси Ox. Это,

очевидно, цилиндры, проектирующие данную линию на плоскости Ozx и Oyz соответственно параллельно осям Oy и Ox (черт. 100).

Возьмем, например, систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=r^2,\\ x&=a. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В прямоугольных координатах первое из уравнений системы есть уравнение сферы радиуса r с центром в начале координат, а второе — плоскости, параллельной плоскости Oyz и отсекающей на оси Ox отрезок a. Пересечение этих двух поверхностей есть, очевидно, окружность с центром на оси Ox, плоскость которой перпендикулярна к этой оси и отсекает на ней отрезок a. Очевидно, пересечение существует лишь тогда, когда $a \leqslant r$.

Систему (3) можно заменить эквивалентной системой

$$\left.\begin{aligned} y^2+z^2&=r^2-a^2,\\ x&=a. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Первое уравнение этой системы изображает круговой цилиндр, осью которого служит Ox, а радиус поперечного сечения равен

$$\sqrt{r^2-a^2}.$$

Наша окружность есть линия пересечения этого цилиндра с плоскостью $x=a$.

Если линия может быть представлена как пересечение двух алгебраических поверхностей, т. е. может быть представлена системой уравнений

$$F_1(x,\ y,\ z)=0,\quad F_2(x,\ y,\ z)=0, \tag{5}$$

где F_1 и F_2 обозначают полиномы относительно x, y и z, то она называется *алгебраической* линией.

Порядком линии называется произведение степеней уравнений (5).

Всякая неалгебраическая линия называется *трансцендентной*.

121. Параметрическое представление линий и поверхностей. В предыдущем параграфе линия была определена как пересечение двух поверхностей. Можно рассматривать линию и с другой точки зрения; именно, представлять ее как путь, описываемый точкой, движущейся по определенному закону. Мы придем, таким образом (ср. § 81), к *параметрическому представлению*, когда координаты x, y и z выражаются как функции вспомогательной переменной t:

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\varphi_2(t),\quad z=\varphi_3(t), \tag{1}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$ обозначают непрерывные в известном промежутке функции. Если t изменяется в этом промежутке, то точка (x, y, z) перемещается непрерывным образом в пространстве, описывая линию.

Что это новое определение линии совпадает, по существу, с предыдущим, можно убедиться, исключив t из уравнений (1). Решая, например,

третье из уравнений (1) относительно t, т. е. выражая t через z и подставляя найденное выражение в первые два из уравнений (1), мы получим для x и y выражения через z:

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z), \tag{2}$$

т. е. уравнения (2) предыдущего параграфа.

Обратно, если линия задана уравнениями вида (2), то, взяв произвольную функцию $\varphi_3(t)$ и полагая $z = \varphi_3(t)$, получим уравнения вида (1)

$$x = \varphi[\varphi_3(t)], \quad y = \psi[\varphi_3(t)], \quad z = \varphi_3(t),$$

или

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t),$$

где введены обозначения

$$\varphi[\varphi_3(t)] = \varphi_1(t), \quad \psi[\varphi_3(t)] = \varphi_2(t).$$

Например, если линия задана уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 &= r^2, \\ x &= a \end{aligned}\right\}$$

(в прямоугольных координатах это есть окружность, параллельная плоскости Oyz, с центром на оси Ox), то, полагая $z = r\sin t$, получим

$$y = \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} = r\cos t,$$

что дает простое параметрическое представление данной кривой:

$$x = a, \quad y = r\cos t, \quad z = r\sin t\ ^1).$$

Также и *поверхность* можно представить параметрически, только здесь координаты x, y, z будут функциями *двух* параметров.

Пусть, действительно, уравнение данной поверхности есть

$$z = f(x, y). \tag{3}$$

Положим $x = \varphi(p, q)$, $y = \psi(p, q)$, где $\varphi(p, q)$, $\psi(p, q)$ — две произвольно выбранные функции двух переменных p и q, такие, что предыдущие уравнения разрешимы относительно p и q (т. е. что p и q могут быть обратно выражены через x и y). Внося в (3) выражения x и y через p и q, получим $z = f[\varphi(p, q), \psi(p, q)]$. Обозначая последнюю функцию через $\omega(p, q)$, будем иметь

$$x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q), \quad z = \omega(p, q). \tag{4}$$

Обратно, всякие уравнения вида (4), из которых какие-либо два разрешимы относительно p и q, представляют некоторую поверхность.

---

[1]) Мы не взяли двойного знака перед радикалом в выражении y, ибо двойной знак перед $\cos t$ не дал бы ничего нового; действительно, точку $x = a$, $y = -r\cos t$, $z = r\sin t$ получим из уравнений в тексте заменой t на $\pi - t$.

Действительно, пусть, например, первые два уравнения разрешимы относительно p и q, так что, решая эти два уравнения, получим $p=f_1(x, y)$, $q=f_2(x, y)$. Внося эти значения в третье из уравнений (4), получим уравнение вида (3), т. е. уравнение поверхности.

Короче, чтобы из параметрического представления (4) вывести уравнение поверхности, достаточно из трех уравнений (4) исключить две переменных p и q; тогда получим одно уравнение, содержащее переменные x, y, z; это и будет уравнением поверхности.

Например, если дана сфера с центром в начале прямоугольных координат и радиусом, равным r, то ее уравнение будет

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Полагая $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$ (где φ и ϑ играют роль параметров p и q) и внося в предыдущее уравнение, получим $r^2\sin^2\vartheta+z^2=r^2$, откуда $z^2=r^2\cos^2\vartheta$, или $z=r\cos\vartheta$ [1]). Итак, параметрическое представление сферы может быть дано в виде

$$\left.\begin{aligned} x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\\ z=r\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Читатель легко выяснит геометрическое значение параметров ϑ и φ (см. § 61). На основании этого геометрического значения ясно, что для получения всех точек сферы достаточно предполагать $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\vartheta<\pi$.

122. О пересечении поверхностей и линий в пространстве. Координаты точек пересечения *двух* поверхностей, данных уравнениями $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$, удовлетворяют совокупности этих двух уравнений; так как в этом случае имеются два уравнения с тремя переменными, то, вообще говоря, точек пересечения будет бесчисленное множество, и они, как было уже сказано, составят некоторую линию.

Координаты точек пересечения *трех* поверхностей

$$F_1(x, y, z)=0,\quad F_2(x, y, z)=0,\quad F_3(x, y, z)=0$$

удовлетворяют совокупности трех предыдущих уравнений. Так как у нас три уравнения с тремя неизвестными, то в этом случае точки пересечения будут, вообще говоря, отделены друг от друга конечными расстояниями; их будет или конечное число, или бесчисленное множество, но они, вообще говоря, не образуют непрерывной линии. То же относится к точкам пересечения поверхности $F(x, y, z)=0$ с линией, данной уравнениями $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$. Если линия задана параметрически: $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, $z=\varphi_3(t)$, то точки пересечения ее с поверхностью $F(x, y, z)=0$ определятся из уравнения (ср. § 87) $F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]=0$.

Наконец, координаты точек пересечения *двух линий* в пространстве, заданных уравнениями $\Phi_1(x, y, z)=0$, $\Psi_1(x, y, z)=0$ и $\Phi_2(x, y, z)=0$,

[1]) Мы не берем двойного знака перед $\cos\vartheta$, так как он не дал бы ничего нового (ср. предыдущую сноску).

$\Psi_2(x, y, z) = 0$, должны удовлетворять всем четырем предыдущим уравнениям. Так как число уравнений превосходит число неизвестных, то, вообще говоря, эти уравнения не имеют решения, т. е. две линии в пространстве, вообще говоря, не пересекаются.

II. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

123. Общее уравнение плоскости. Параметрическое представление. Перейдем теперь к выводу уравнения плоскости, а именно докажем предложение: если x, y, z — декартовы координаты относительно какой-либо системы $Oxyz$, то *всякое уравнение первой степени*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

изображает плоскость и, обратно, всякая плоскость изображается уравнением первой степени; мы предполагаем, что A, B, C не равны нулю одновременно.

Проще всего доказать это следующим образом. Пусть Π — данная плоскость. Возьмем новую систему $O'x'y'z'$ декартовых координат такую, чтобы оси $O'x'$ и $O'y'$ были расположены в этой плоскости. Тогда в новой системе уравнение

$$z' = 0$$

есть, очевидно, уравнение плоскости Π. Возвращаясь к старой системе $Oxyz$, будем иметь формулы перехода следующего вида:

$$z' = Ax + By + Cz + D$$

(и две аналогичные формулы для x' и y'), где A, B, C, D — постоянные [1]), причем A, B, C не равны нулю одновременно, и уравнение $z' = 0$ обращается в уравнение (1).

Обратно, если дано уравнение первой степени (1), то, взяв новую систему координат $O'x'y'z'$ такую, чтобы формулы перехода имели вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= l'_1 x + l'_2 y + l'_3 z + a', \\ y' &= m'_1 x + m'_2 y + m'_3 z + b', \\ z' &= Ax + By + Cz + D, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

(где в первых двух строках коэфициенты можно взять совершенно произвольно, с тем, однако, чтобы подстановка была неособенной [2]), преобразуем (1) к виду

$$z' = 0,$$

откуда видно, что уравнение изображает плоскость.

---

[1]) См. § 66, формулы (1a).

[2]) То-есть чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} l'_1 & l'_2 & l'_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Это всегда можно сделать. Действительно, по условию среди чисел A, B, C по крайней мере одно отлично от нуля. Если, например

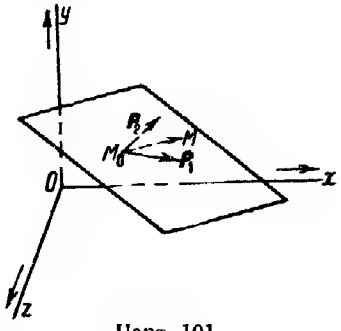
Для того чтобы иметь возможность составить уравнение плоскости, надо иметь заданным ее положение в пространстве. Один из способов задания заключается в том, что задается какая-либо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости и два вектора: $\mathbf{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, не параллельные между собою и параллельные плоскости (черт. 101). Составим уравнение плоскости по этим заданиям.

Пусть $M(x, y, z)$ — какая-либо точка пространства. Для того чтобы она находилась на нашей плоскости, необходимо и достаточно, чтобы вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) \quad (**)$$

был компланарен с векторами $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, т. е. чтобы (§ 39)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$



Черт. 101.

Это и есть уравнение данной плоскости. Разлагая определитель по элементам первой строки, представим уравнение (2) в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (3)$$

где положено

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix};$$

величины A, B, C не могут быть равны нулю одновременно, так как, по условию, векторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ не параллельны между собою [1]).

Наконец, раскрывая скобки и обозначая свободный член через D, получим уравнение (1).

Легко также найти *параметрическое представление* плоскости. Действительно, так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$ компланарен с $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, будем иметь [§ 39, формула (1)]

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\mathbf{P} + \mu\mathbf{Q}, \quad (4)$$

$C \neq 0$, то достаточно взять $l_1' = 1$, $l_2' = 0$, $l_3' = 0$, $m_1' = 0$, $m_2' = 1$, $m_3' = 0$, и тогда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = C \neq 0.$$

При $\Delta \neq 0$ систему (*) можно решить относительно x, y, z и получить выражение старых координат через новые, что приведет к формулам вида (1) § 66; это вполне определит положение нового начала и новые координатные векторы.

[1]) Если бы $A = B = C = 0$, т. е. $Y_1Z_2 - Y_2Z_1 = 0$, $Z_1X_2 - Z_2X_1 = 0$, $X_1Y_2 - X_2Y_1 = 0$, то было бы

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1},$$

т. е. векторы были бы параллельны.

где λ, μ — некоторые числа (параметры). Изменяя λ и μ, можем получить любую точку M нашей плоскости. Из (4) следует, если принять во внимание (**):

$$x - x_0 = \lambda X_1 + \mu X_2, \quad y - y_0 = \lambda Y_1 + \mu Y_2, \quad z - z_0 = \lambda Z_1 + \mu Z_2$$

или окончательно

$$x = x_0 + \lambda X_1 + \mu X_2, \quad y = y_0 + \lambda Y_1 + \mu Y_2, \quad z = z_0 + \lambda Z_1 + \mu Z_2. \quad (5)$$

Это и есть искомое параметрическое представление; параметрами являются λ и μ.

Замечание. Выше мы исключили случай, когда в общем уравнении $A = B = C = 0$. Однако и в этом случае (мы считаем, что при этом $D \neq 0$) говорят, что уравнение изображает *бесконечно удаленную* или *несобственную плоскость*[1]); об этом см. подробнее в главе VI. В нижеследующем, если противное не оговорено особо, мы будем считать, как выше, что не все три величины A, B, C равны нулю. Случай $A = B = C = D = 0$ не представляет интереса. Однако иногда имеет смысл рассматривать и этот случай („неопределенная плоскость").

124. Геометрическое значение коэфициентов A, B, C. В случае *прямоугольных координат* коэфициенты A, B, C в общем уравнении

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

имеют весьма простое геометрическое значение; а именно легко показать, что *вектор*

$$\mathbf{P} = (A, B, C)$$

перпендикулярен к плоскости (1). Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что вектор $\mathbf{P}$ перпендикулярен любому отрезку M_1M_2, расположенному на плоскости. Пусть координаты M_1 суть x_1, y_1, z_1, а координаты M_2 суть x_2, y_2, z_2. Так как обе эти точки принадлежат плоскости (1), то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$; вычитая, получим

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

откуда и следует, что вектор (A, B, C) перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Вектор $\mathbf{P}$ мы будем называть *вектором направления* плоскости Π.

Все сказанное выше будет справедливым и в случае общих декартовых координат, если под $\mathbf{P}$ будем подразумевать вектор, *ковариантные* координаты которого суть A, B, C.

125. Частные случаи. Равенство нулю одного или нескольких коэфициентов в общем уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

[1]) Ср. § 90, замечание.

характеризует некоторые особенности в ее расположении относительно осей координат, которые следует отметить.

1. Если в уравнении (1) свободный член $D=0$, то это уравнение принимает вид

$$Ax+By+Cz=0; \tag{2}$$

очевидно, что соответствующая плоскость проходит через начало координат (ибо предыдущее уравнение удовлетворяется значениями $x=y=z=0$).

2. Пусть в уравнении (1) равен нулю один из коэфициентов при переменных; например, пусть $C=0$. Тогда это уравнение принимает вид

$$Ax+By+D=0. \tag{3}$$

Соответствующая плоскость параллельна оси Oz и пересекает плоскость Oxy по прямой, уравнение которой в этой плоскости есть уравнение (3) (см. § 118, 2°).

Очевидно, наш результат можно формулировать так: *если в уравнении плоскости отсутствует член, содержащий одну из координат, то плоскость параллельна соответствующей оси координат.*

3. Пусть два коэфициента при переменных равны нулю. Например, $B=C=0$. Тогда плоскость будет, в силу предыдущего, параллельна одновременно как оси Oy, так и оси Oz, т. е. параллельна всей плоскости Oyz.

Этот результат с очевидностью вытекает также из рассмотрения уравнения

$$Ax+D=0,$$

которое может быть переписано так:

$$x=-\frac{D}{A}.$$

Очевидно, рассматриваемая плоскость отсекает на оси Ox отрезок, равный $-\frac{D}{A}$, если за единицу длины на Ox принять $|\mathrm{u}|$.

В частности, уравнение $x=0$ изображает плоскость Oyz. Аналогично для уравнений $y=0$ и $z=0$.

126. Знак четырехчлена $Ax+By+Cz+D$. Так же как в § 92, легко заключить, что плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

разбивает все пространство на две части, в одной из которых выражение

$$Ax+By+Cz+D$$

принимает положительные значения, а в другой — отрицательные. На самой плоскости это выражение обращается в нуль.

127. Уравнение в отрезках на осях [1]). Если в уравнении плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

[1]) Ср. § 93.

коэфициент D не равен нулю, то, разделив обе части этого уравнения на $-D$ и полагая

$$-\frac{A}{D}=\frac{1}{p},\quad -\frac{B}{D}=\frac{1}{q},\quad -\frac{C}{D}=\frac{1}{r}, \tag{1}$$

его можно привести к виду

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1. \tag{2}$$

Коэфициенты p, q и r в уравнении (2) имеют простое геометрическое значение.

Действительно, найдем пересечение плоскости (2) с осью Ox. Искомая точка пересечения есть та точка плоскости (2), для которой $y=z=0$. Подставляя эти значения в предыдущее уравнение, найдем

$$\frac{x}{p}=1,$$

или $x=p$. Поступая аналогично относительно двух других осей, выводим, что p, q и r обозначают отрезки, отсекаемые данной плоскостью на осях координат Ox, Oy, Oz, если за единицы длин отрезков на этих осях принять длины $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{w}|$ соответствующих координатных векторов.

Замечание. Если один из коэфициентов A, B, C равен нулю, например, $C=0$, то вместо уравнения (2) получим, очевидно,

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \tag{3}$$

где p и q имеют те же значения (1) и тот же геометрический смысл; уравнение (3) получается из (2), если положить $r=\infty$, что и понятно, так как при $C=0$ плоскость параллельна оси Oz, т. е. отсекает на ней отрезок бесконечно большой длины.

128. Построение плоскости, заданной уравнением. Для того чтобы построить плоскость, заданную уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

достаточно найти три какие-либо ее точки (не лежащие на одной прямой). Чтобы найти какую-либо точку плоскости, достаточно придать в ее уравнении (1) двум из координат (например x и y) произвольные значения, а третью координату вычислить на основании этого уравнения.

В большинстве случаев проще всего найти точки пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz и по этим точкам построить плоскость.

Пусть, например, дано уравнение

$$2x+4y-z-8=0. \tag{2}$$

Полагая $y=z=0$, найдем $x=4$; полагая, далее, $z=x=0$, найдем $y=2$ и, наконец, полагая $x=y=0$, найдем $z=-8$.

Поэтому наша плоскость пересекает оси координат в точках M_1 (4, 0, 0), M_2 (0, 2, 0) и M_3 (0, 0, -8) (черт. 102).

Тот же результат получим, написав уравнение (2) в виде

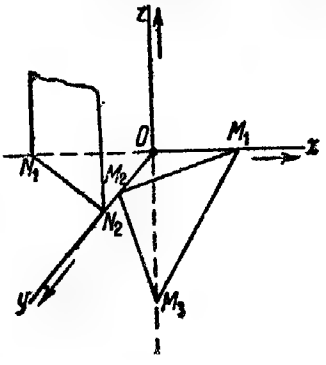
$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-8}=1,$$

откуда ясно, что плоскость отсекает на осях координат отрезки $4|\mathbf{u}|$, $2|\mathbf{v}|$ и $-8|\mathbf{w}|$.

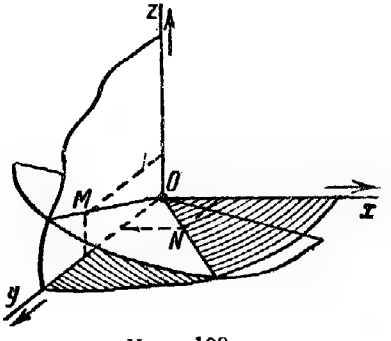
Возьмем еще уравнение плоскости

$$2x-3y+12=0. \tag{3}$$

Эта плоскость параллельна оси Oz. Полагая в предыдущем уравнении $y=0$, найдем $x=-6$, полагая же $x=0$, получим $y=4$; следовательно, наша плоскость проходит через точки $N_1(-6, 0, 0)$ и $N_2(0, 4, 0)$,



Черт. 102.



Черт. 103.

будучи параллельной оси Oz, на основании сказанного выше (черт. 102).

Тот же результат мы получим, если напишем уравнение (3) в виде

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{4}=1,$$

откуда видно, что плоскость отсекает на осях координат отрезки $-6|\mathbf{u}|$, $4|\mathbf{v}|$ и ∞.

Если плоскость проходит через начало координат O, то все три точки пересечения ее с осями совпадают с O. Чтобы построить еще две какие-либо принадлежащие ей точки, проще всего взять точки, лежащие на плоскостях координат.

Пусть, например, дано уравнение

$$x-2y+4z=0.$$

Полагая, например, $x=0$ и $y=2$, найдем $z=1$, полагая же $z=0$ и $x=2$, получим $y=1$; поэтому наша плоскость проходит через точки $O(0, 0, 0)$, $M(0, 2, 1)$ и $N(2, 1, 0)$ (черт. 103).

129. Следы плоскости на плоскостях координат. Построение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

можно также произвести, найдя *следы* этой плоскости на плоскостях координат, т. е. прямые пересечения данной плоскости с плоскостями Oyz, Ozx и Oxy.

Пересечение плоскости (1), например, с плоскостью Oxy, есть, очевидно, геометрическое место точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнению (1) и условию $z=0$. Поэтому уравнение искомого следа на плоскости Oxy будет

$$Ax+By+D=0. \tag{2}$$

Точно так же уравнение следа на плоскости $Oyz\,(x=0)$ будет

$$By+Cz+D=0, \tag{3}$$

и наконец, уравнение следа на плоскости $Ozx\,(y=0)$ будет:

$$Ax+Cz+D=0. \tag{4}$$

Замечание. В сущности уравнения следа на плоскости Oxy надо было бы писать так:

$$\begin{cases} Ax+By+D=0, \\ z=0, \end{cases}$$

ибо уравнение (2) само по себе изображает плоскость, параллельную оси Oz. Добавочное же уравнение $z=0$ заменено выше словесным указанием на то, что уравнение (2) относится к точкам плоскости Oxy.

То же самое относится и к уравнениям (3) и (4).

Читателю предлагается построить следы плоскостей, рассмотренных в предыдущем параграфе, и при помощи этих следов произвести построение самих плоскостей.

Упражнения

1. Найти следы плоскости $4x+7y+3z+5=0$ на плоскостях Oyz, Ozx, Oxy.

Ответ. $7y+3z+5=0$; $4x+3z+5=0$; $4x+7y+5=0$.

2. Найти следы плоскости $x+y+1=0$ на плоскостях координат (и построить, пользуясь этим, данную плоскость).

Ответ. $y+1=0$; $x+1=0$; $x+y+1=0$.

130. Условия параллельности и совпадения двух плоскостей. Сказанное в предыдущем параграфе позволяет вывести условия параллельности двух плоскостей:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Действительно, для того чтобы упомянутые плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы были параллельны их следы на плоскостях координат (черт. 104).

Условие параллельности следов

$$A_1x+B_1y+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+D_2=0 \tag{2}$$

на плоскости Oxy дает (§ 97)

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1};$$

написав аналогичные равенства для двух других плоскостей координат, получим окончательно *условие параллельности двух плоскостей*:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}. \tag{3}$$

Итак, *для того чтобы две плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы в их уравнениях были пропорциональны коэфициенты при соответствующих переменных.*

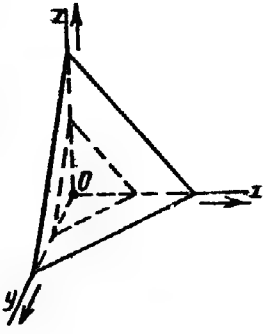
Частным случаем параллельности является совпадение.

Для совпадения двух плоскостей необходимо и достаточно совпадение их следов на плоскостях координат. Условие же совпадения следов на плоскости Oxy [см. уравнения (2)] дает равенства:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{D_2}{D_1};$$

написав аналогичные равенства для двух других плоскостей координат, получим окончательно требуемое условие:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}. \tag{4}$$



Черт. 104.

Итак, *для того чтобы две плоскости совпадали, необходимо и достаточно, чтобы все соответственные коэфициенты в их уравнениях были пропорциональны.*

Если k обозначает общее значение отношений (4), то предыдущее условие можно записать так:

$$A_2=kA_1,\ B_2=kB_1,\ C_2=kC_1,\ D_2=kD_1. \tag{5}$$

Отсюда следует (ср. § 97), что для совпадения плоскостей, данных уравнениями (1), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое постоянное число k, при котором имеет место тождество (т. е. равенство, справедливое для всех значений x, y, z):

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1). \tag{5a}$$

131. Нормальное уравнение плоскости. Совершенно аналогично тому, что было сделано в § 96, мы можем привести уравнение плоскости в прямоугольных координатах

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

к так называемому *нормальному виду*

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{2}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — косинусы некоторого направления, а $p \geqslant 0$. Для этого достаточно умножить обе части (1) на постоянную λ, подобрав ее так, чтобы вектор

$$\mathbf{V} = (\lambda A,\ \lambda B,\ \lambda C) \tag{3}$$

был ортом и, кроме того, чтобы $\lambda D \leqslant 0$. Из первого требования следует: $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 + (\lambda C)^2 = 1$, откуда

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \tag{4}$$

знак подбирается согласно второму требованию (при $D = 0$ знак произволен). Полагая

$$\lambda A = \cos\alpha, \quad \lambda B = \cos\beta, \quad \lambda C = \cos\gamma, \tag{5}$$

приведем уравнение к требуемому виду (2); λ называется *нормирующим множителем*.

Из (3), на основании сказанного в § 124, следует, что орт $\mathbf{V}$ перпендикулярен к плоскости (1). Совершенно так же, как в § 96, покажем, что орт $\mathbf{V}$ направлен, при $D \neq 0$, от начала координат к плоскости и что p есть расстояние начала координат до плоскости.

Упражнения

1. Длина перпендикуляра OK, опущенного из начала координат на плоскость равна 3; вектор $\overrightarrow{OK}$ составляет с осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$; с осью Oz он составляет острый угол. Найти нормальное уравнение плоскости (координаты — прямоугольные).

Решение. Угол γ вектора $\overrightarrow{OK}$ с осью Oz найдем из формулы

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

так как

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

получим $\cos\gamma = +\frac{1}{2}$ (мы взяли знак $+$, так как, по условию, угол γ — острый). Следовательно, искомое нормальное уравнение будет

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z - 3 = 0.$$

2. Привести уравнение плоскости $x + 3y + 3z + 1 = 0$ к нормальному виду.

Ответ. $\dfrac{x + 3y + 3z + 1}{-\sqrt{19}} = 0.$

III. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

132. Уравнения в коэфициентах направления. Параметрическое представление. Выведем теперь уравнения прямой в пространстве методом, аналогичным методу § 88. Пусть Δ есть данная прямая; положение ее вполне определяется заданием одной из ее точек $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и какого-либо вектора $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$, не равного нулю, параллельного ей

(черт. 105). Этот вектор мы будем называть *вектором направления* прямой Δ. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ находилась на Δ, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ был параллелен вектору P; это же дает (§ 37)

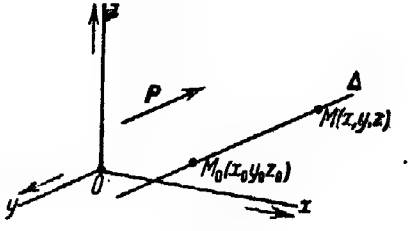
$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}. \tag{1}$$

Предыдущее условие представляет собою систему двух уравнений, которые можно написать, например, так:

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{z - z_0}{Z}, \quad \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}. \tag{1a}$$

Так как уравнения эти выражают необходимое и достаточное условие того, чтобы точка (x, y, z) находилась на данной прямой, то они и представляют собою уравнения этой прямой.

Мы видим, что прямая в пространстве изображается *двумя* уравнениями, как это и должно быть согласно сказанному выше об аналитическом представлении линии в пространстве (§ 120). Для прямой характерно то, что *оба эти уравнения — линейные*.



Черт. 105.

Величины X, Y, Z вполне определяют направление данной прямой; они поэтому называются *коэфициентами направления* этой прямой, а в соответствии с этим уравнения (1) называются *уравнениями в коэфициентах направления*.

Ясно, что, обратно: всякое уравнение вида (1), где X, Y, Z не равны одновременно нулю, выражает прямую, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) и параллельную вектору (X, Y, Z).

Так как вектор P можно заменить любым другим, параллельным ему, то величины X, Y, Z можно заменить любыми величинами, им пропорциональными. Из этого следует, что направление прямой зависит не от самих величин X, Y, Z, а от их отношений, например от отношений (ср. § 88)

$$a = \frac{X}{Z}, \quad b = \frac{Y}{Z}. \tag{2}$$

Эти отношения можно назвать угловыми коэфициентами данной прямой (см. следующий параграф).

Из уравнений (1) легко получить и *параметрическое представление прямой*. Для этого достаточно обозначить общее значение отношений (1) через t, что дает (ср. § 88)

$$x = x_0 + Xt, \quad y = y_0 + Yt, \quad z = z_0 + Zt. \tag{3}$$

Параметр t имеет то же геометрическое значение, что и в § 88.

Если вместо вектора **P** произвольной длины взять орт $\mathbf{e}=(l, m, n)$, то уравнения (1) примут вид

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}; \tag{4}$$

величины l, m, n называются *координатами направления* прямой Δ, уравнения (4) — уравнениями в координатах направления.

Соответствующее параметрическое представление примет вид

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt; \tag{5}$$

параметр t в этом случае представляет собою расстояние переменной точки $M(x, y, z)$ до постоянной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, снабженное знаком (ср. § 88).

Замечание. Если даны коэфициенты направления X, Y, Z прямой Δ, то, чтобы найти координаты направления l, m, n, достаточно умножить величины X, Y, Z на такой множитель k, чтобы длина вектора (kX, kY, kZ) равнялась единице.

В случае *прямоугольных координат* это дает

$$(kX)^2+(kY)^2+(kZ)^2=1,$$

откуда

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

и

$$\left.\begin{aligned} l=\pm\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad m=\pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ n=\pm\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Двойной знак[1]) берется потому, что если l, m, n суть координаты направления прямой, то $-l, -m, -n$ будут также координатами направления той же прямой.

Вспомним, что в рассматриваемом случае (прямоугольных координат) l, m, n являются в то же время косинусами направления, т. е.

$$l=\cos\alpha, \quad m=\cos\beta, \quad n=\cos\gamma, \tag{7}$$

где α, β, γ обозначают углы орта $\mathbf{e}=(l, m, n)$ с осями координат. Орту $-\mathbf{e}=(-l, -m, -n)$ будут соответствовать углы $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$.

Под углами прямой Δ с осями координат мы будем, безразлично, понимать либо углы орта $\mathbf{e}$ с этими осями (т. е. углы α, β, γ), либо углы орта $-\mathbf{e}$ (т. е. углы $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$).

Итак, формулы (6) дают возможность *найти углы прямой, заданной уравнениями* (1), *с осями координат.*

---

[1]) Надо одновременно брать либо верхние, либо нижние знаки.

Упражнения и дополнения

1. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (1, 0, 1) и параллельной вектору $\mathbf{P} = (3, 2, 1)$.

Ответ. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z - 1$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (2, 3, 2) и параллельной вектору (0, 3, 5).

Ответ. $\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{5}$, или $x = 2, \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{5}$.

3. Найти общий вид уравнений прямой, параллельной плоскости Oxy.

Ответ. $\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{0}$, или $\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y}, z = z_0$.

4. Найти общий вид уравнений прямой, параллельной оси Oz.

Ответ. $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{Z}$, или $x = x_0, y = y_0$.

5. Найти углы, которые прямая $\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{3}$ составляет с осями (прямоугольных) координат.

Ответ. $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \pm\frac{3}{\sqrt{14}}$.

133. Приведенные уравнения прямой. Предполагая $Z \neq 0$, можно уравнения (1а) предыдущего параграфа переписать так:

$$x - x_0 = a(z - z_0), \quad y - y_0 = b(z - z_0), \tag{1}$$

где попрежнему a и b обозначают постоянные

$$a = \frac{X}{Z}, \quad b = \frac{Y}{Z}, \tag{2}$$

или еще так:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где p и q обозначают некоторые постоянные (именно, $p = x_0 - az_0$, $q = y_0 - bz_0$). Система уравнений (3) называется *простейшей*, или *приведенной* системой уравнений прямой.

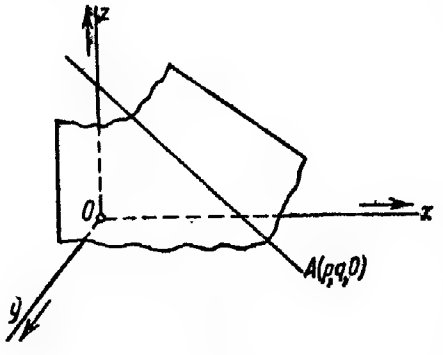
Каждое из этих уравнений, например уравнение $x = az + p$, взятое само по себе, изображает плоскость (ибо это уравнение первой степени). Так как координаты точек прямой Δ удовлетворяют обоим этим уравнениям, то эта прямая принадлежит одновременно обеим этим плоскостям, т. е. представляет собою их пересечение.

Так как первое уравнение не содержит y, а второе x, то первая плоскость параллельна оси Oy, а вторая — оси Ox. Следовательно, плоскости, изображаемые уравнениями (3), представляют собою соответственно плоскости, проектирующие данную прямую на плоскости Ozx и Oyz (проекции берутся соответственно параллельно осям Oy и Ox) (черт. 106).

Коэфициенты a, b, p и q в уравнениях (3) имеют весьма простое геометрическое значение. Именно, ясно, что p и q представляют собою не что иное, как *координаты следа прямой* (3) *на плоскости Oxy*. В самом деле, чтобы найти координаты этого следа, т. е. координаты точки A пересечения прямой (3) с плоскостью Oxy, надо в системе (3) положить $z=0$, что и дает

$$x=p, \quad y=q.$$

Для выяснения геометрического значения коэфициентов a, b ограничимся случаем *прямоугольных координат*. В этом случае при обозначениях предыдущего параграфа



Черт. 106.

$$a=\frac{X}{Z}=\frac{l}{n}, \quad b=\frac{Y}{Z}=\frac{m}{n},$$

или

$$a=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \qquad (4)$$

где α, β, γ обозначают углы прямой Δ с осями координат; заметим, что значения a и b не изменятся, если заменить одновременно α, β, γ на $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$.

Если даны приведенные уравнения (3), то их всегда можно преобразовать в уравнения в коэфициентах направления; для этого достаточно переписать уравнения (3) так:

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-0}{1}. \qquad (5)$$

Из предыдущего следует, что уравнения (3) всегда изображают прямую, проходящую через точку $(p, q, 0)$ и имеющую коэфициенты направления a, b, 1 (или всякие три числа, пропорциональные числам a, b, 1).

Замечание 1. Одна из величин a, b или обе могут быть, в частности, равны 0. Если, например, $a=0$, то уравнения прямой примут вид $x=p$, $y=bz+q$; в этом случае наша прямая лежит в плоскости $x=p$, параллельной плоскости Oyz, т. е. прямая параллельна этой последней плоскости. Если $a=b=0$, то уравнения прямой примут вид $x=p$, $y=q$; прямая в этом случае параллельна оси Oz.

Замечание 2. Выводя уравнения (3), мы предполагали, что $Z\neq 0$. Если $Z=0$, то по крайней мере одна из величин X, Y не равна нулю (так как все три величины X, Y, Z не могут, по условию, обращаться в 0); пусть, например, $X\neq 0$; тогда мы сможем написать приведенные уравнения, меняя ролями переменные z и x.

Упражнения и дополнения

(Координаты прямоугольные)

1. Найти углы, которые прямая, данная приведенными уравнениями (3), составляет с осями координат.

Ответ. Из формулы (5) этого параграфа и из формулы (6) предыдущего параграфа следует

$$\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\quad \cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

2. Найти острый угол γ, который прямая, данная уравнениями $x = z+2$, $y = -2z+3$, составляет с осью Oz.

Ответ. $\cos\gamma = +\frac{1}{\sqrt{6}}$.

134. Условия параллельности и совпадения двух прямых. Из самого определения коэфициентов направления следует, что для параллельности двух прямых, заданных уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{X_1} = \frac{y-y_1}{Y_1} = \frac{z-z_1}{Z_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{X_2} = \frac{y-y_2}{Y_2} = \frac{z-z_2}{Z_2}, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы векторы направления (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) были параллельны, т. е. чтобы

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}. \tag{2}$$

Предыдущие равенства *выражают условия параллельности прямых* (1).

Если прямые заданы приведенными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 z + p_1, \\ y &= b_1 z + q_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x &= a_2 z + p_2, \\ y &= b_2 z + q_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

то, переписав эти уравнения в виде (5) предыдущего параграфа и применяя условия (2), убедимся, что условия параллельности выражаются равенствами:

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2. \tag{4}$$

На основании геометрического значения коэфициентов p и q (см. предыдущий параграф) ясно также, что *для совпадения двух прямых* (3) необходимо и достаточно условие

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad p_1 = p_2, \quad q_1 = q_2. \tag{5}$$

135. Уравнения прямой в общем виде. Приведенные уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

дают нам прямую как пересечение двух плоскостей: $x - az - p = 0$ и $y - bz - q = 0$, параллельных соответственно осям Oy и Ox. Но, конечно, для аналитического представления прямой можно воспользоваться любыми двумя плоскостями, пересекающимися вдоль данной прямой (но не сливающимися друг с другом). Пусть

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

суть уравнения этих плоскостей. Совокупность двух предыдущих уравнений представляет собою *уравнения* данной *прямой в общем виде.*

Обратно, система двух уравнений (2) всегда представляет некоторую прямую; предполагается, что плоскости, изображаемые каждым из этих уравнений в отдельности, не параллельны (и не сливаются). Это очевидно непосредственно, так как мы знаем, что система (2) представляет пересечение двух упомянутых плоскостей, т. е. прямую.

Ясно, что систему (2) мы можем заменить бесчисленным множеством других, ей эквивалентных. Это сводится к тому, что вместо двух взятых плоскостей мы можем взять любые две другие, пересекающиеся вдоль данной прямой. В частности, систему (2) можно всегда привести к простейшему виду (1) (или аналогичному виду, где роль z исполняют x или y). Для этого достаточно решить систему (2) относительно двух из переменных x, y, z, что всегда можно сделать, как сейчас будет показано.

Заметим прежде всего, что среди определителей [1])

$$B_1C_2 - B_2C_1, \quad C_1A_2 - C_2A_1, \quad A_1B_2 - A_2B_1, \tag{3}$$

по крайней мере один не равен нулю, так как, если бы все эти три величины были равны нулю, то мы имели бы

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

и плоскости, изображаемые уравнениями системы (1), были бы параллельны, что противоречит условию.

Предположим для определенности, что не равна нулю третья из величин (3), т. е. что

$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0. \tag{4}$$

Тогда, решив систему (2) относительно переменных x и y, мы получим уравнения вида (1).

Итак, чтобы получить приведенные уравнения из общих, достаточно эти последние решить относительно двух из переменных.

В свою очередь, приведенные уравнения можно всегда сразу преобразовать в уравнения в коэфициентах направления (см. предыдущий параграф).

Замечание. Если плоскости, представляемые уравнениями (2), параллельны, то все-таки удобно говорить, что эти плоскости пересекаются по прямой, но что прямая их пересечения — *бесконечно удаленная,* или *несобственная.*

Упражнения

1. Даны уравнения прямой в общем виде:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + 5 &= 0, \\ 2x - y - 2z + 1 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Найти приведенные уравнения и уравнения в коэфициентах направления.

Ответ. Приведенные уравнения: $x = \frac{1}{3}z - 2$, $y = -\frac{4}{3}z - 3$.

---

[1]) Это — определители, составленные из таблицы

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}$$

Один из видов уравнения в коэфициентах направления:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{-\left(\frac{4}{3}\right)},\quad \text{или}\quad \frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z}{3}.$$

2. Та же задача для прямой:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=0,\\ 2x+4y-z+6&=0.\end{aligned}\right\}$$

Ответ. Приведенные уравнения (решаем относительно x и z): $x=-2y-2$, $z=2$. Один из видов уравнения в коэфициентах направления:

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}.$$

3. Найти углы, которые прямая, представленная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y-2z+5&=0,\\ 4x+4y-z+2&=0,\end{aligned}\right\}$$

составляет с осями прямоугольных координат.

Решение. Приведенные уравнения этой прямой будут

$$x=\frac{5}{4}z-\frac{7}{2},\quad y=-z+3;$$

следовательно, коэфициентами направления будут $\left(\frac{5}{4},\ -1,\ 1\right)$, или $(5,\ -4,\ 4)$. Отсюда

$$\cos\alpha=\pm\frac{5}{\sqrt{57}},\quad \cos\beta=\mp\frac{4}{\sqrt{57}},\quad \cos\gamma=\pm\frac{4}{\sqrt{57}}.$$

IV. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

Переходя к решению ряда основных задач, связанных с аналитическим представлением прямых и плоскостей в пространстве, мы могли бы сделать ряд предварительных замечаний, аналогичных тем, которые были приведены перед решением задач, касающихся прямой на плоскости. Во избежание повторения мы их не воспроизводим.

В нижеследующем слова: „дана плоскость“, „дана прямая“, „найти плоскость“ и т. п. надо понимать так: „дано уравнение плоскости“ и т. п.

136. Задача 1. Найти пересечение двух плоскостей. Две плоскости, заданные уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad (1)$$

и

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \qquad (2)$$

могут либо пересекаться (иметь общую прямую), либо быть параллельными (иметь общую бесконечно удаленную прямую), либо совпадать (иметь все точки общими).

Мы уже умеем определять заранее, какой из этих случаев будет иметь место (§ 130). В первом случае (когда плоскости пересекаются по прямой на конечном расстоянии) прямая эта определяется системою

уравнений (1), (2). В случае надобности мы можем преобразовать эту систему к приведенному виду или в уравнения в коэфициентах направления (см. предыдущий параграф).

137. Задача 2. Найти пересечение трех плоскостей. Координаты точки пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

должны удовлетворять одновременно этим трем линейным уравнениям.

Система (1) допускает одно определенное решение тогда и только тогда, когда определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля; в этом и только в этом случае плоскости (1) пересекаются в одной определенной точке (на конечном расстоянии). Предоставляя читателю произвести несложное алгебраическое исследование возможных остальных случаев[1]), ограничимся следующими замечаниями, непосредственно вытекающими из известных свойств плоскостей.

Кроме упомянутого случая, когда $\Delta\neq 0$ и когда, следовательно, существует одна точка пересечения, могут представиться следующие случаи (во всех этих случаях $\Delta=0$):

1) Данные три плоскости могут вовсе не иметь общих точек, т. е. составлять призму (быть параллельными одной и той же прямой, не пересекаясь по одной и той же прямой), или же быть взаимно параллельными, не сливаясь в одну плоскость. В этом (и только в этом) случае система (1) несовместима.

2) Все три данные плоскости могут пересекаться по одной и той же прямой или же сливаться в одну плоскость. Тогда (и только тогда) система (1) допускает бесчисленное множество решений.

Решая систему (1), всегда можно узнать, с каким из перечисленных случаев мы имеем дело.

Упражнения

1. Найти пересечение трех плоскостей

$$x+y-z=0,\quad 2x-y+z-3=0,\quad x-y-2z+1=0.$$

Ответ. Точка (1, 0, 1).

2. Найти пересечение трех плоскостей

$$x+2y+3z-1=0,\quad x+y+z+1=0,\quad 2x+3y+4z=0.$$

Ответ. Последнее уравнение есть следствие первых двух (получается путем сложения первых двух уравнений). Поэтому третье уравнение можно отбросить. Остается удовлетворить первым двум уравнениям. Эти два уравнения определяют прямую

$$\begin{aligned} x+2y+3z-1=0,\\ x+y+z+1=0, \end{aligned}$$

по которой пересекаются три данные плоскости.

---

[1]) Ниже (§ 166) мы дадим полное исследование при помощи однородных координат.

3. Найти пересечение трех плоскостей

$$x+2y+3z-1=0,\quad x+y+z+1=0,\quad 2x+3y+4z+5=0.$$

Ответ. Если сложить первые два уравнения и из полученного уравнения вычесть третье, получим $-5=0$, т. е. невозможное равенство. Значит, данные плоскости не пересекаются (пересекаются в бесконечно удаленной точке). Легко проверить, что эти плоскости непараллельны. Следовательно, они составляют призму.

138. Задача 3. Найти формулы перехода к новой системе декартовых координат, плоскости которой заданы уравнениями. Если новые координатные плоскости заданы уравнениями (1) предыдущего параграфа (причем первое изображает плоскость $O'y'z'$, второе $O'z'x'$, а третье $O'x'y'$), то искомые формулы перехода будут (ср. § 99)

$$\left.\begin{aligned} x' &= k_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1),\\ y' &= k_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2),\\ z' &= k_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где k_1, k_2, k_3 — постоянные, которые можно взять произвольно (разумеется, отличными от нуля), если положительные направления и длины новых координатных векторов безразличны. Мы, конечно, предполагаем, что данные плоскости пересекаются в одной точке, т. е. что $\Delta\neq 0$. Доказательство формул (1) совершенно аналогично доказательству формул § 99.

139. Задача 4. Найти пересечение плоскости и прямой. Если прямая и плоскость заданы общими уравнениями (например прямая представлена первыми двумя уравнениями системы (1) § 137, а плоскость — третьим уравнением той же системы), то мы приходим к задаче, рассмотренной в упомянутом параграфе.

Решение получает более простой вид, если прямая задана, например, параметрически. Пусть

$$x=x_0+Xt,\quad y=y_0+Yt,\quad z=z_0+Zt \tag{1}$$

параметрическое представление данной прямой и

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

уравнение данной плоскости. Подставляя выражения (1) в (2), получим

$$(AX+BY+CZ)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3}$$

Если коэфициент при t не равен нулю, то мы получим вполне определенное значение t. Подставив это значение в (1), получим координаты x, y, z точки пересечения.

Но если

$$AX+BY+CZ=0 \tag{4}$$

и при этом свободный член $Ax_0+By_0+Cz_0+D$ уравнения (3) отличен от нуля, тогда точки пересечения нет (или, как часто говорят, она находится в бесконечности); это значит, что прямая и плоскость параллельны.

Если, наконец, имеет место равенство (4) и, кроме того,

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{5}$$

то уравнение (3) обращается в тождество: $0 = 0$, и следовательно, удовлетворяется при всяких значениях t. Это значит, что прямая не только параллельна плоскости, но и расположена на ней.

Те же результаты получим, если прямая задана уравнениями в коэфициентах направления

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}. \tag{1a}$$

Запомним, что *равенство* (4) *представляет собою условие параллельности прямой* (1), *или, что все равно, прямой* (1a) *и плоскости* (2).

Можно также сказать, что равенство (4) есть *условие параллельности плоскости* (2) *и вектора* (X, Y, Z).

Совокупность равенств (4) и (5) дает *условия совмещения прямой и плоскости.*

Если прямая представлена приведенными уравнениями

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{6}$$

то, переписав их в виде

$$\frac{x - p}{a} = \frac{y - q}{b} = \frac{z - 0}{1},$$

видим, что *условие параллельности плоскости и прямой* есть

$$Aa + Bb + C = 0; \tag{4a}$$

условие совмещения прямой и плоскости состоит из равенства (4a) и равенства

$$Ap + Bq + D = 0. \tag{5a}$$

Упражнения

1. Найти точку пересечения прямой $x = 3z + 1$, $y = z - 2$ с плоскостью $4x + y - 11z + 2 = 0$.

Ответ. $(-5, -4, -2)$.

2. При каком значении k прямая $x = kz + 2$, $y = 2kz + 4$ параллельна плоскости $x + y + z = 0$?

Ответ. $k = -\frac{1}{3}$.

140. Задача 5. Найти пересечение: 1° данной поверхности и плоскости; 2° данной поверхности и прямой; 3° данной кривой и плоскости. 1°. В пересечении поверхности

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

получается плоская линия, уравнения которой суть (1) и (2). Если поверхность (1) — алгебраическая, n-го порядка, то плоскость пересекает

ее по алгебраической линии порядка не выше n или входит целиком в поверхность, как составная часть. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим пересечение поверхности (1) с плоскостью Oxy (т. е. с плоскостью $z=0$). Это пересечение, в плоскости Oxy, дается уравнением

$$\Phi(x, y, 0)=0.$$

Ясно, что это уравнение алгебраической линии порядка не выше n, если только оно не обращается в тождество. Если $\Phi(x, y, 0)=0$ тождественно, то это значит, что z входит во все члены полинома[1] $\Phi(x, y, z)$, т. е. что $\Phi(x, y, z)=z\cdot\Phi_1(x, y, z)$, где Φ_1 — полином $(n-1)$-й степени. Поэтому в рассматриваемом случае уравнение (1) распадается на два: $z=0$ и $\Phi_1(x, y, z)=0$. Для нахождения пересечения поверхности (1) с произвольной плоскостью (2) достаточно принять эту последнюю за новую плоскость Oxy, что на основании предыдущего приводит к результату, указанному в начале. Из этих же рассуждений вытекает, что если плоскость (2) целиком входит в состав поверхности (1), то будем иметь

$$\Phi(x, y, z)=(Ax+By+Cz+D)\,\Phi_1(x, y, z),$$

где Φ_1 — полином $(n-1)$-й степени и поверхность (1) распадается на две: плоскость (2) и поверхность $(n-1)$-го порядка $\Phi_1(x, y, z)=0$.

Заметим, что введение некоторых обобщенных понятий[2] дает возможность утверждать, что линия пересечения — всегда порядка n (если исключить случай распадения). Тогда предыдущий результат не противоречит общему определению порядка алгебраической линии в пространстве[3], как произведения порядков поверхностей, пересечением которых эта линия является.

2°. Рассмотрим теперь пересечение поверхности (1) с прямою; последнюю представим параметрически:

$$x=x_0+Xt,\quad y=y_0+Yt,\quad z=z_0+Zt. \tag{3}$$

Значения параметра t, соответствующие точкам пересечения, определяются из уравнения

$$\Phi(x_0+Xt, y_0+Yt, z_0+Zt)=0. \tag{4}$$

Если поверхность (1) — алгебраическая, порядка n, то уравнение (4) будет степени n или низшей; оно может обратиться и в тождество. Таким образом имеется не более n точек пересечения, если исключить случай, когда прямая принадлежит поверхности; ср. § 100.

При известных обобщениях[4] можно утверждать, что если прямая не принадлежит поверхности, число точек пересечения всегда равно n. Таким образом порядок алгебраической поверхности может быть определен, как число точек пересечения поверхности с произвольною прямою, которая не принадлежит поверхности целиком.

---

[1] Ср. аналогичные рассуждения в § 100.
[2] См. ниже, § 174.
[3] См. § 120.
[4] См. ниже, § 174.

3°. Рассмотрим, наконец, пересечение линии в пространстве, заданной уравнениями

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad \Psi(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

с плоскостью. Так как всякую плоскость можно принять за плоскость Oxy, то, не нарушая общности, можем ограничиться рассмотрением пересечения с этой плоскостью.

Подставляя в предыдущие уравнения $z = 0$, получим систему

$$\Phi(x, y, 0) = 0, \quad \Psi(x, y, 0) = 0. \tag{6}$$

Это — уравнения линий пересечения поверхностей (5) с плоскостью Oxy. Пересечение этих линий между собою и дает искомые точки пересечения линии (5) с плоскостью Oxy. Если поверхности (5) — алгебраические, порядков m и n, то линии (6) — алгебраические, порядков m и n, или меньших; мы исключаем случай, когда одно из уравнений (6) обращается в тождество, т. е. когда плоскость Oxy целиком принадлежит одной из поверхностей (5). Следовательно, число точек пересечения линии (5) с плоскостью равно $m \cdot n$ (т. е. порядку линий) или меньше, если исключить из рассмотрения случай, когда линии (6) имеют общие части.

При известных обобщениях понятий можно утверждать, что число точек пересечения плоскости и алгебраической линии всегда равно ее порядку, если исключить случаи, когда точек пересечения — бесчисленное множество.

Упражнения и дополнения

1. *Степень точки относительно сферы* определяется так же, как и для окружности (см. § 100, упражнение 2). Доказать, что степень k точки $M(x_0, y_0, z_0)$ относительно сферы, заданной уравнением (см. § 117)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0,$$

равна результату подстановки в левую часть этого уравнения x_0, y_0, z_0 вместо x, y, z.

2. Доказать, что геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно двух сфер, есть плоскость. Эта плоскость называется *радикальною плоскостью* двух данных сфер (ср. § 100, упражнение 3).

141. Задача 6. Найти углы между данными плоскостями или прямыми (координаты предполагаются прямоугольными). Под углом $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$ между двумя прямыми Δ_1 и Δ_2 мы будем понимать один из двух дополняющих друг друга до π углов, которые составляют прямые, проведенные из одной точки и параллельные данным. Этот угол равен углу ϑ между векторами направлений $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ этих прямых или дополняет его до π.

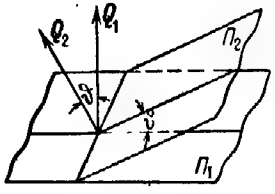
Под углом $\widehat{\Pi_1, \Pi_2}$ между двумя плоскостями Π_1 и Π_2 мы будем понимать также один из двух составляемых ими двугранных углов. Этот угол равен углу ϑ между векторами направлений[1]) $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ этих плоскостей (черт. 107) или дополняет его до π.

[1]) То-есть векторами, перпендикулярными к данным плоскостям.

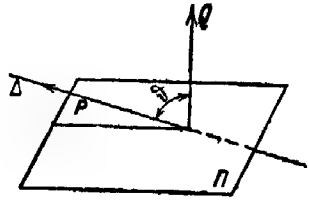
Наконец, под углом $\widehat{\Delta, \Pi}$ между прямою Δ и плоскостью Π мы будем подразумевать один из двух углов, дополняющих друг друга до π, которые прямая Δ составляет со своей прямоугольной проекцией на плоскость Π. Этот угол и угол ϑ, составляемый векторами направлений $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ прямой и плоскости, связаны соотношением (см. черт. 108)

$$\widehat{\Delta, \Pi} = \frac{\pi}{2} \pm \vartheta,$$

если не обращать внимания на слагаемое, кратное π.



Черт. 107.



Черт. 108.

Если вспомним теперь, что вектор направления прямой, заданной уравнениями

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}, \tag{1}$$

есть вектор $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ (или всякий, ему параллельный), а вектор направления плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

есть вектор $\mathbf{Q} = (A, B, C)$ (или всякий ему параллельный), то задача нахождения углов между плоскостями и прямыми, заданными уравнениями, непосредственно сводится к задаче нахождения угла между двумя векторами, уже решенной нами в § 45. Пользуясь формулами упомянутого параграфа, сразу получаем следующие результаты:

1. *Угол между двумя прямыми* Δ_1, Δ_2, заданными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1}, \\ \frac{x - x_2}{X_2} = \frac{y - y_2}{Y_2} = \frac{z - z_2}{Z_2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

дается формулой

$$\cos \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \pm \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} \tag{4}$$

(двойной знак берется потому, что угол $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$ равен либо ϑ, либо $\pi - \vartheta$, где ϑ есть угол между векторами направлений прямых).

2. *Угол между двумя плоскостями* Π_1, Π_2, заданными уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{5}$$

дается формулой

$$\cos \widehat{\Pi_1, \Pi_2} = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{6}$$

(двойной знак берется по той же причине, что и выше).

3. *Угол между прямой* Δ, заданной уравнениями (1) *и плоскостью* Π, заданной уравнением (2), дается формулой

$$\sin \widehat{\Pi, \Delta} = \pm \frac{AX + BY + CZ}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \tag{7}$$

перед радикалом надо взять такой знак, чтобы $\sin \widehat{\Pi, \Delta} \geqslant 0$, ибо по предположению оба значения угла $\widehat{\Pi, \Delta}$ заключены между 0 и π.

Замечание. Если одна или обе из рассматриваемых выше прямых заданы приведенными уравнениями вида

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

то для получения соответствующих формул достаточно вспомнить, что за вектор направления этой прямой можно взять вектор $(a, b, 1)$, так что в этом случае

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = 1.$$

Легко распространить формулы этого параграфа на случай обобщенных декартовых координат, пользуясь формулами § 56. Не надо забывать только, что A, B, C суть ковариантные координаты вектора $\mathbf{Q}$, перпендикулярного к плоскости (2).

Упражнения

1. Найти угол θ между прямой $x = 2z + 1$, $y = -z + 5$ и плоскостью $x - 3y + z - 5 = 0$.

Ответ. $\sin \theta = \frac{\sqrt{66}}{11}$.

2. Найти угол θ между плоскостями $x + y + z + 2 = 0$ и $x - y + z + 4 = 0$

Ответ. $\cos \theta = \pm \frac{1}{3}$.

3. Найти угол θ между двумя прямыми $x = 5z + 1$, $y = 2$ и $x = z + 3$, $y = 4z - 3$.

Ответ. $\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$.

142. Задача 7. Найти условия перпендикулярности данных прямых и плоскостей (координаты предполагаются прямоугольными). Пользуясь формулами предыдущего параграфа или же известными уже нам условиями перпендикулярности и параллельности двух векторов, немедленно получаем при обозначениях предыдущего параграфа:

1. *Условие перпендикулярности двух прямых* Δ_1 и Δ_2:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{1}$$

2. *Условие перпендикулярности двух плоскостей* Π_1 и Π_2:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{2}$$

3. *Условие перпендикулярности прямой* Δ *и плоскости* Π:

$$\frac{A}{X} = \frac{B}{Y} = \frac{C}{Z}. \tag{3}$$

Напомним для сравнения *условия параллельности*, выведенные нами ранее и пригодные также для декартовых координат общего вида:

Для двух прямых

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1}. \tag{1a}$$

Для двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{2a}$$

Для прямой и плоскости

$$AX + BY + CZ = 0. \tag{3a}$$

Легко также вывести и эти последние формулы, пользуясь условием параллельности и перпендикулярности двух векторов.

Следует обратить внимание на разницу между видом условий для плоскости и прямой и видом соответствующих условий для двух прямых или двух плоскостей.

143. Задача 8. Найти расстояние данной точки до данной плоскости. Задача эта решается аналогично задаче § 103.

Рассуждения совершенно аналогичные рассуждениям упомянутого параграфа, показывают, что если плоскость задана нормальным уравнением в прямоугольных координатах

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

то расстояние h точки $M(x, y, z)$ до плоскости дается формулой:

$$h = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p, \tag{1}$$

т. е. h есть результат подстановки координат точки в левую часть *нормального* уравнения плоскости.

Если плоскость задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

то

$$h = \lambda(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D), \tag{3}$$

где λ — нормирующий множитель

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4}$$

Результат (3) остается справедливым и в случае декартовых координат общего вида, только постоянная λ уже не имеет значения (4).

Формулы (1) и (3) приписывают расстоянию h определенный знак, как в § 103. Нам важно помнить лишь то, что для точек, расположенных по разные стороны плоскости, h имеет различные знаки.

Упражнения

(Координаты — прямоугольные)

1. Найти расстояние точки (2, 3, 1) до плоскости

$$3x + 2y + z + 5 = 0.$$

Ответ. $h = -\frac{13}{\sqrt{14}}$.

2. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$2x + 3y + 2z - 3 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + 6y + 4z - 1 = 0.$$

(Указание. Взяв произвольную точку на одной из плоскостей, найдите ее расстояние до другой.)

Ответ. $\frac{5\sqrt{17}}{34}$.

144. Задача 9. Найти отношение, в котором данная плоскость делит отрезок, соединяющий две данные точки.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — данные точки, а

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

— уравнение данной плоскости, то рассуждения, совершенно аналогичные рассуждениям § 104, приводят к формуле

$$k = \frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}, \tag{1}$$

где M обозначает точку пересечения данной плоскости с прямой, соединяющей точки M_1 и M_2.

145. Число независимых постоянных, определяющих положение плоскости и прямой в пространстве. Прежде чем перейти к решению задач, требующих нахождения прямой или плоскости по определенным условиям, сделаем замечание, аналогичное замечанию § 105.

Уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

можно переписать так:

$$z = ax + by + c, \tag{2}$$

где положено

$$a = -\frac{A}{C}, \quad b = -\frac{B}{C}, \quad c = -\frac{D}{C} \tag{3}$$

(мы предполагаем, что $C \neq 0$; если бы $C = 0$, то мы могли бы решить уравнение (1) относительно x или y).

Следовательно, для того чтобы написать уравнение плоскости, достаточно знать *три* величины a, b и c; в соответствии с этим говорят, что положение плоскости зависит от *трех* независимых постоянных [в уравнении (2) этими постоянными являются a, b и c].

Общий вид уравнения (1) плоскости не противоречит этому положению, так как существенную роль в нем играют не сами четыре коэфициента A, B, C, D, а отношения трех из них к четвертому; это ясно из того, что если все коэфициенты уравнения (1) заменить величинами, им пропорциональными, оно будет выражать ту же плоскость (ср. § 105)

Положение прямой в пространстве определяется *четырьмя* независимыми постоянными, как это явствует из приведенных уравнений прямой

$$x = az + p, \quad y = bz + q. \tag{4}$$

На основании геометрического значения постоянных a, b, p, q очевидно, что все эти четыре постоянные существенны, так как изменение каждой из них влечет за собою изменение положения прямой.

Нельзя того же сказать о постоянных x_0, y_0, z_0, X, Y, Z, входящих в уравнения в коэфициентах направления

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z};$$

действительно, положение прямой не изменится, если вместо точки x_0, y_0, z_0 взять любую другую ее точку, например точку $(p, q, 0)$ пересечения прямой с плоскостью Oxy; кроме того, величины X, Y, Z можно заменить любыми величинами, им пропорциональными, например величинами $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$, 1.

В результате остаются только четыре величины p, q, a, b $\left(\text{где положено } a = \frac{X}{Z},\ b = \frac{Y}{Z}\right)$, задание которых вполне определяет прямую.

Из сказанного ясно, что для определения положения плоскости требуется, вообще говоря, *три* условия, а для определения положения прямой в пространстве — *четыре* условия [1]).

146. Связки прямых и плоскостей. Пучок плоскостей. Совокупность прямых пространства, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называется *связкой* прямых; те прямые связки, которые находятся в одной и той же плоскости, составляют пучок (§ 106). Точка M_0 называется *центром* связки.

Уравнения любой прямой, принадлежащей связке с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, очевидно, могут быть написаны в виде

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}, \tag{1}$$

где X, Y, Z — коэфициенты направления прямой. Придавая им различные значения (не равные одновременно нулю), можно придать прямой (1) любое направление, т. е. получить любую прямую связки.

Уравнения (1) можно написать и так (при $Z \neq 0$):

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= a(z - z_0), \\ y - y_0 &= b(z - z_0), \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

где $a = \frac{X}{Z}$, $b = \frac{Y}{Z}$; следовательно, положение прямой, принадлежащей связке, зависит от *двух* независимых постоянных.

Вспомним (§ 106), что положение прямой, принадлежащей *пучку*, зависит от *одной* постоянной.

---

[1]) См. § 105, сноска. Заметим, между прочим, что требование, чтобы прямая в пространстве проходила через данную точку x_0, y_0, z_0, выражается *двумя* условиями:

$$x_0 = az_0 + p, \quad y = bz_0 + q.$$

Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называется *связкой плоскостей*, а точка M_0 — *центром* связки.

Найдем общее уравнение плоскости, принадлежащей связке.

Для того чтобы плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

проходила через точку M_0, необходимо и достаточно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению (1), т. е. чтобы

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Это — единственное условие, которое должно связывать неопределенные коэфициенты A, B, C и D. Предыдущее условие можно переписать и так:

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0;$$

подставляя в (2) вместо D это значение, получим уравнение, удовлетворяющее условиям задачи:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3}$$

Придавая коэфициентам A, B и C в уравнении (3) различные значения, мы получим различные плоскости, проходящие через точку M_0.

Положение каждой плоскости связки характеризуется значениями коэфициентов A, B и C в уравнении (3). Но ясно, что существенную роль играют в нем не сами эти коэфициенты, а их отношения. В этом мы сразу убедимся, решив уравнение (3), например, относительно $z - z_0$:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

где положено

$$a = -\frac{A}{C}, \quad b = -\frac{B}{C}.$$

Следовательно, каждая плоскость связки с данным центром вполне характеризуется *двумя* постоянными, так же как и положение прямой, принадлежащей связке прямых.

Пучком плоскостей называется совокупность плоскостей, проходящих через данную прямую Δ, называемую *осью* пучка.

Постараемся найти общий вид уравнения плоскости, принадлежащей пучку.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

суть уравнения прямой Δ (т. е. оси пучка). Каждое из двух написанных выше уравнений, взятое в отдельности, изображает некоторую плоскость; обозначим эти плоскости через Π_1 и Π_2. Прямая Δ есть пересечение плоскостей Π_1, Π_2, которые, следовательно, принадлежат пучку.

Итак, наша задача состоит в нахождении общего вида уравнения плоскостей, проходящих через пересечение двух данных. В этой формулировке задача вполне аналогична вопросу, рассмотренному в § 111.

Составим уравнение

$$l_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+l_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \quad (5)$$

где l_1 и l_2 — произвольные постоянные, не равные одновременно нулю. Уравнение (5), которое можно переписать так:

$$(l_1A_1+l_2A_2)x+(l_1B_1+l_2B_2)y+(l_1C_1+l_2C_2)z+l_1D_1+l_2D_2=0,$$

есть уравнение плоскости, ибо оно — первой степени.

Эта плоскость удовлетворяет условиям задачи, т. е. она проходит через линию пересечения плоскостей Π_1 и Π_2. Действительно, координаты любой точки линии пересечения упомянутых плоскостей одновременно удовлетворяют уравнениям (4), а потому обращают в нуль выражения, заключенные в скобки, в левой части уравнения (5), и значит, всю левую часть его. Следовательно, любая точка пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 лежит на плоскости (5), а это и требовалось доказать.

Введем для краткости обозначения

$$F_1(x, y, z)=A_1x+B_1y+C_1z+D_1,$$
$$F_2(x, y, z)=A_2x+B_2y+C_2z+D_2.$$

Тогда уравнение (5) можно переписать так:

$$l_1F_1(x, y, z)+l_2F_2(x, y, z)=0. \quad (6)$$

Придавая различные значения величинам l_1 и l_2, мы получим различные плоскости, проходящие через прямую (1). Что мы получим таким образом *все* такие плоскости, будет ясно из решения задачи § 152.

Вместо двух постоянных l_1 и l_2 можно ввести одну постоянную

$$k=\frac{l_2}{l_1}$$

и написать уравнение (6) в виде

$$F_1(x, y, z)+kF_2(x, y, z)=0. \quad (7)$$

Мы видим, что положение плоскости, принадлежащей пучку, зависит от *одной* постоянной (так же как и в случае прямых на плоскости).

Если уравнения плоскостей $F_1(x, y, z)=0$ и $F_2(x, y, z)=0$ взяты в нормальной форме, то постоянная приобретает весьма простое значение, которое предоставляем выяснить читателю (ср. § 115).

Легко видеть, что если плоскости $F_1(x, y, z)=0$ и $F_2(x, y, z)=0$ параллельны, то все плоскости, представляемые уравнением (6) или (7), будут параллельны. В этом случае также говорят, что мы имеем дело с пучком, ось которого находится в бесконечности („несобственная ось“).

Совершенно аналогично сказанному в § 113 легко показать[1]), что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы *три плоскости*, заданные уравнениями

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0, \quad F_3(x, y, z)=0, \quad (8)$$

[1]) Все утверждения, высказанные в остальной части этого параграфа, будут доказаны ниже (в главе VI, § 168).

принадлежали одному пучку, заключается в следующем: *существуют три числа* l_1, l_2, l_3, *не равных одновременно нулю и таких*, что имеем тождественно (т. е. для всех x, y, z)

$$l_1F_1(x, y, z) + l_2F_2(x, y, z) + l_3F_3(x, y, z) = 0. \tag{9}$$

Аналогично, для того чтобы *четыре плоскости*

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ F_2(x, y, z) &= A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ F_3(x, y, z) &= A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ F_4(x, y, z) &= A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

принадлежали одной связке [т. е. имели общую точку [1])], необходимо и достаточно, чтобы существовало четыре числа l_1, l_2, l_3, l_4, не равных одновременно нулю и таких, что

$$l_1F_1(x, y, z) + l_2F_2(x, y, z) + l_3F_3(x, y, z) + l_4F_4(x, y, z) = 0;$$

это условие эквивалентно условию

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

147. Задача 10. Найти прямую, проходящую через заданную точку и параллельную заданной прямой (или вектору). Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ заданная точка, а X, Y, Z — коэфициенты направления заданной прямой (или координаты заданного вектора), то уравнения искомой прямой, очевидно, напишутся в виде

$$\frac{x - x_1}{X} = \frac{y - y_1}{Y} = \frac{z - z_1}{Z}.$$

148. Задача 11. Найти прямую, проходящую через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярную заданной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (координаты предполагаются прямоугольными). Эта задача сводится к предыдущей, так как искомая прямая должна быть параллельна вектору (A, B, C).

149. Задача 12. Найти прямую, проходящую через две заданные точки. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — заданные точки, то, очевидно (ср. § 108), уравнения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

представляют искомую прямую.

Этот результат можно получить непосредственно, исходя из условий коллинеарности трех точек (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (см. § 38).

[1]) Сюда включается и случай, когда общая точка — бесконечно удаленная („несобственная"), т. е. когда все четыре плоскости параллельны одной и той же прямой. См. подробнее в главе VI, § 168.

150. Задача 13. Найти плоскость, проходящую через заданную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и параллельную заданной плоскости. Пусть

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

есть уравнение заданной плоскости.

Чтобы решить поставленную задачу, надо так подобрать коэфициенты A, B и C в общем уравнении (см. § 146) плоскостей, проходящих через заданную точку

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \qquad (2)$$

чтобы плоскость, изображаемая последним уравнением, была параллельна плоскости (1). Но ведь для этого необходимо и достаточно, чтобы коэфициенты A, B и C были пропорциональны коэфициентам A_1, B_1 и C_1. Подставляя в уравнение (2) вместо A, B и C пропорциональные им величины A_1, B_1 и C_1, найдем уравнение искомой плоскости

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0.$$

151. Задача 14. Найти плоскость, проходящую через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярную заданной прямой или вектору (координаты предполагаются прямоугольными). Если X, Y, Z обозначают коэфициенты направления заданной прямой (или координаты заданного вектора), то, при обозначениях предыдущего параграфа, коэфициенты A, B, C должны быть пропорциональны этим величинам (см. § 142, 3). Поэтому задача решается, как предыдущая (вместо A_1, B_1, C_1 надо взять X, Y, Z).

В случае декартовых координат общего вида получим то же решение, если под X, Y, Z будем подразумевать ковариантные координаты данного вектора.

152. Задача 15. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и заданную точку. Пусть $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ представляют уравнения данной прямой. Мы знаем, что уравнение

$$F_1(x, y, z) + kF_2(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

представляет некоторую плоскость, проходящую через данную прямую (§ 146). Постараемся теперь подобрать постоянную k так, чтобы эта плоскость проходила через заданную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не расположенную на заданной прямой. Выражая условие расположения M_1 на плоскости (1), получим

$$F_1(x_1, y_1, z_1) + kF_2(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

откуда

$$k = -\frac{F_1(x_1, y_1, z_1)}{F_2(x_1, y_1, z_1)}. \qquad (2)$$

Подставляя это значение k в (1), получим уравнение искомой плоскости. В том (и только в том) случае, когда точка M_1 находится на плоскости $F_2(x, y, z) = 0$, для k получается значение ∞, так как в этом случае (и только в этом случае) знаменатель в выражении для k, т. е. $F_2(x_1, y_1, z_1)$, обращается в нуль[1]). Условившись считать, что при

[1]) Так как, по условию, точка M_1 не расположена на данной прямой, то числитель $F_1(x_1, y_1, z_1)$ и знаменатель $F_2(x_1, y_1, z_1)$ не могут быть одновременно равными нулю.

$k=\infty$ уравнение (1) сводится к уравнению $F_2(x, y, z)=0$, мы видим, что наша задача допускает всегда одно определенное решение.

Из этого следует, в частности, что, придавая постоянной k в уравнении (1) подходящее значение, можно получить *любую* плоскость, проходящую через заданную прямую.

Пусть, например, требуется провести плоскость через прямую

$$x=2z-1, \quad y=z+5$$

и через точку $M_1(1, 3, 2)$.

Общее уравнение плоскостей, проходящих через данную прямую, будет

$$(x-2z+1)+k(y-z-5)=0.$$

Чтобы предыдущая плоскость проходила через точку (1, 3, 2), должно быть $(1-2\cdot 2+1)+k(3-2-5)=0$, откуда $k=-\frac{1}{2}$. Подставляя это значение в предыдущее уравнение, получим, после упрощений, уравнение искомой плоскости

$$2x-y-3z+7=0.$$

153. Задача 16. Найти плоскость, проходящую через три заданные неколлинеарные точки. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — три данные точки, то решение задачи непосредственно получим, выражая, что любая точка $M(x, y, z)$ искомой плоскости компланарна с тремя данными. Это дает (§ 40)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

Разлагая определитель в левой части (1) по элементам первой строки, получим уравнение первой степени, т. е. уравнение плоскости, которая, очевидно, удовлетворяет условиям задачи.

Легко видеть, что так как данные три точки не расположены на одной прямой, то коэфициенты при x, y, z в этом уравнении не могут быть равны нулю одновременно.

Нашу задачу можно свести также к задаче предыдущего параграфа. Для этого достаточно составить уравнение прямой, проходящей через две из заданных точек (что мы умеем делать, § 149), а затем составить уравнение плоскости, проходящей через эту прямую и третью из заданных точек (что составляет задачу, решенную в предыдущем параграфе).

Поясним сказанное примером.

Пусть требуется провести плоскость через три точки $M_1(1, 3, 7)$, $M_2(2, 3, 8)$ и $M_3(0, 1, 2)$. Уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, суть

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-7}{1},$$

или

$$\left.\begin{aligned} y-3=0,\\ x-z+6=0. \end{aligned}\right\}$$

Общее уравнение плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид:

$$(y-3)+k(x-z+6)=0.$$

Теперь надо подобрать k так, чтобы это уравнение изображало плоскость, проходящую и через точку $M_3(0, 1, 2)$. Выражая это условие, получим

$$-2+k\cdot 4=0,$$

т. е. $k=\frac{1}{2}$. Подстановка этого значения k в предыдущее уравнение приводит нас к уравнению искомой плоскости

$$x+2y-z=0.$$

154. Задача 17. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и параллельную другой заданной прямой или вектору. (Предполагается, что заданные прямые не параллельны, иначе задача была бы, очевидно, неопределенной.) Если

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

— уравнение прямой, через которую мы проводим плоскость, а (X', Y', Z') — вектор направления другой заданной прямой, то решение задачи получим, написав уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум векторам: (X, Y, Z) и (X', Y', Z'). Уравнение это нами уже выведено в § 123 и имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ X & Y & Z\\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Задачу эту можно решить иным способом: написать общее уравнение плоскостей, проходящих через данную прямую [§ 146, уравнение (7)], и подобрать значение постоянной k так, чтобы эта плоскость была параллельна другой данной прямой (или вектору).

Пусть, например, требуется через прямую

$$4x=5z-2,\quad y=-3z-1$$

провести плоскость, параллельную вектору $\mathbf{P}=(2, 6, 1)$.

Уравнение любой плоскости, проходящей через данную прямую, имеет вид

$$(4x-5z+2)+k(y+3z+1)=0,$$

или

$$4x+ky+(3k-5)z+2+k=0. \qquad (*)$$

Условие параллельности этой плоскости и вектора **P** дает

$$2 \cdot 4 + 6k + 1 \cdot (3k - 5) = 0,$$

откуда получаем $k = -\frac{1}{3}$. Подставляя это значение в (*), получаем требуемое уравнение

$$12x - y - 18z + 5 = 0.$$

155. Задача 18. Найти плоскость, проходящую через заданную прямую и перпендикулярную к заданной плоскости. Решается (для случая прямоугольных координат) совершенно аналогично предыдущей задаче.

156. Задача 19. Найти условия компланарности (пересечения) двух даиных прямых. Две прямые в пространстве вообще не пересекаются и не компланарны (т. е. не расположены в одной плоскости).

Если две прямые компланарны, то они пересекаются в конечной или бесконечно удаленной точке (под последним мы, как всегда, подразумеваем, что прямые параллельны). Найдем условие того, чтобы две прямые

$$\frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_0}{Z_1} \tag{1}$$

и

$$\frac{x - x_2}{X_2} = \frac{y - y_2}{Y_2} = \frac{z - z_2}{Z_2} \tag{2}$$

были компланарны (т. е. пересекались в конечной или бесконечно удаленной точке).

Напишем для этого уравнение плоскости, проходящей через прямую (1) и параллельную прямой (2). Согласно формуле (1) § 154 это уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Для того чтобы наши прямые были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы прямая (2) была не только параллельна этой плоскости, но и принадлежала ей; а для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы хоть одна из точек прямой (2) принадлежала плоскости (3). Выражая, что точка (x_2, y_2, z_2) находится на плоскости (3), получаем требуемое условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Если прямые заданы приведенными уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 z + p_1, \\ y &= b_1 z + q_1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и

$$\left.\begin{aligned} x &= a_2 z + p_2, \\ y &= b_2 z + q_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то можно взять

$$(X_1, Y_1, Z_1) = (a_1, b_1, 1), \quad (X_2, Y_2, Z_2) = (a_2, b_2, 1),$$
$$x_1 = p_1, \quad y_1 = q_1, \quad z_1 = 0, \quad x_2 = p_2, \quad y_2 = q_2, \quad z_2 = 0,$$

и условие (4) примет вид

$$\begin{vmatrix} p_2 - p_1 & q_2 - q_1 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, вычитая вторую строку из третьей, легко получаем

$$\begin{vmatrix} p_2 - p_1 & q_2 - q_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4a}$$

157. Задача 20. Найти уравнения перпендикуляра, опущенного из заданной точки M на заданную прямую Δ (координаты предполагаются прямоугольными). Искомый перпендикуляр мы можем определить как линию пересечения плоскости, проходящей через точку M и прямую Δ, с плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной к прямой Δ. Уравнения обеих плоскостей мы умеем найти (§ 152 и 151). Совокупность этих двух уравнений и будет изображать искомую прямую.

Упражнения и дополнения (к § 146—157)

1. Найти прямую, проходящую через точку (5, 6, 0) и параллельную прямой

$$y = 9x - 1, \quad z = 2x + 5.$$

Ответ. $x - 5 = \dfrac{y-6}{9} = \dfrac{z}{2}$.

2. Найти прямую, проходящую через точку $(-3, 2, 1)$ и перпендикулярную плоскости $x + 3z - 1 = 0$ (координаты — прямоугольные).

Ответ. $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-1}{3}$, или $y - 2 = 0$, $3x - z + 10 = 0$.

3. Найти прямую, проходящую через точки (1, 3, 5) и (2, 3, 7).

Ответ. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-5}{2}$, или $y - 3 = 0$, $2x - z + 3 = 0$.

4. Найти плоскость, проходящую через точку $(0, -3, 1)$ и перпендикулярную вектору (6, 8, 10) (координаты — прямоугольные).

Ответ. $6x + 8(y + 3) + 10(z - 1) = 0$, или $6x + 8y + 10z + 14 = 0$.

5. Найти плоскость, проходящую через прямую

$$y = 2x + 4,$$
$$z = -x + 1$$

и через точку (2, 0, 0).

Ответ. $6x + y + 8z - 12 = 0$.

6. Найти плоскость, проходящую через точки $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$.

Ответ. $x+y+z-1=0$.

7. Найти плоскость, проходящую через прямую

$$x+y+1=0,$$
$$x+2y+2z=0$$

и перпендикулярную к плоскости $2x-y-z=0$ (координаты — прямоугольные).

Ответ. $3x+4y+2z+2=0$.

8. Найти (в прямоугольных координатах) уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (1, 0, 1) на прямую

$$x=3z+2,$$
$$y=2z;$$

найти основание этого перпендикуляра.

Ответ. Уравнения перпендикуляра

$$x-2y+z-2=0,$$
$$3x+2y+z-4=0.$$

Координаты основания перпендикуляра $\left(\frac{11}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$.

9. Найти значение p, при котором прямые $x=z+p$, $y=-z$ и $x=2z+1$, $y=3z+2$ пересекаются; найти точку пересечения.

Ответ. $p=\frac{1}{2}$; координаты точки пересечения будут $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

158. Задача 21. Найти расстояние заданной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до заданной прямой Δ (координаты предполагаются прямоугольными). Под расстоянием точки от прямой подразумевается, конечно, кратчайшее расстояние, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из M_1 на Δ. Эту длину легко найти следующим образом. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к Δ. Точка пересечения K этой плоскости с Δ есть основание упомянутого перпендикуляра. Так как эту точку мы умеем найти, то сможем вычислить и расстояние $|M_1K|$.

Другой способ быстрее ведет к цели. Пусть

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z} \tag{1}$$

есть уравнение данной прямой Δ. Мы можем всегда для наглядности считать, что вектор $\mathbf{P}=\overrightarrow{M_0M}=(X, Y, Z)$ расположен на самой прямой Δ и приложен к точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой прямой (черт. 109). Обозначим через $\mathbf{Q}$ векторное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\mathbf{P}$ [1]), т. е. положим

$$\mathbf{Q}=\overrightarrow{M_1M_0}\times\mathbf{P}. \tag{2}$$

Мы знаем (§ 25), что $|\mathbf{Q}|=2$ площ. $M_0MM_1=|\mathbf{P}|\cdot h$, где h — искомое расстояние. Следовательно:

$$h=\frac{|\mathbf{Q}|}{|\mathbf{P}|}. \tag{3}$$

---

[1]) $\mathbf{Q}$ есть не что иное, как векторный момент вектора $\mathbf{P}$ относительно точки M_1; см. § 25, упражнение 1.

Но мы знаем, что координаты вектора Q, который представляет собою векторное произведение векторов

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1) \quad \text{и} \quad \mathbf{P} = (X,\ Y,\ Z),$$

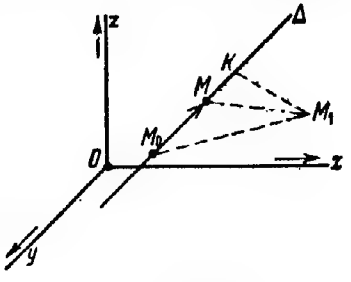
равны соответственно определителям (§ 51):

$$\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ X & Y \end{vmatrix};$$

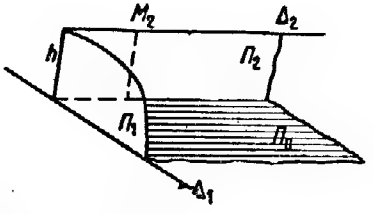
следовательно, длина $|\mathbf{Q}|$ равна корню квадратному из суммы квадратов предыдущих определителей. Таким образом формула (3) дает

$$h = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ X & Y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

159. Задача 22. Найти уравнения общего перпендикуляра к двум прямым Δ_1 и Δ_2. Мы знаем, что прямые в пространстве вообще не



Черт. 109.



Черт. 110.

пересекаются. Легко показать, что существует одна и только одна[1]) прямая, пересекающая эти две прямые и перпендикулярная к ним обеим (*общий перпендикуляр*). Эту прямую можно найти следующим образом.

Проведем через прямую Δ_1 (черт. 110) плоскость Π_0, параллельную прямой Δ_2. Затем проведем две плоскости, перпендикулярные к Π_0: одну (Π_1) — через Δ_1 и другую (Π_2) — через Δ_2. Пересечение плоскостей Π_1 и Π_2 и даст нам искомый общий перпендикуляр.

Если координаты прямоугольные, то уравнения его легко найти, ибо мы умеем найти уравнения всех упомянутых плоскостей, в частности, плоскостей Π_1 и Π_2.

Легко убедиться, что отрезок h этого общего перпендикуляра, заключенный между точками пересечения с Δ_1 и Δ_2, есть кратчайшее расстояние между прямыми Δ_1 и Δ_2 (т. е. что расстояние между любыми двумя другими точками, взятыми соответственно на Δ_1 и Δ_2, больше h).

160. Задача 23. Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми (координаты предполагаются прямоугольными). Мы сохраняем обозначения предыдущего параграфа. Для вычисления h нет необходи-

[1]) Исключение представляет случай, когда данные прямые параллельны, тогда общих перпендикуляров — бесчисленное множество.

мости находить уравнения общего перпендикуляра. Достаточно найти только уравнение плоскости Π_0, а затем взять любую точку на Δ_2 и найти ее расстояние до плоскости Π_0. Это расстояние как раз равно h, ибо прямая Δ_2 параллельна плоскости Π_0.

Пусть

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1} \tag{1}$$

и

$$\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y\ \ y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2} \tag{2}$$

суть уравнения прямых Δ_1 и Δ_2.

Уравнение плоскости, проходящей через Δ_1 и параллельной прямой Δ_2, будет (см. § 154)

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

или, разлагая по элементам первой строки:

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}+(y-y_1)\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}+(z-z_1)\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Остается теперь найти расстояние какой-либо точки прямой Δ_2 до плоскости (3). Проще всего с этой целью взять точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Согласно общему правилу, это расстояние найдется, если в уравнение (3), предварительно приведенное к нормальному виду, мы подставим на место x, y, z координаты точки M_2. Следовательно [1]):

$$h=-\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}}; \tag{5}$$

знак перед радикалом следует подобрать так, чтобы $h>0$.

---

[1]) Чтобы привести уравнение (3) к нормальному виду, достаточно, как известно, умножить его на $\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где A, B, C обозначают коэффициенты при x, y, z уравнения (3), написанного в разложенном виде (4).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

МНИМЫЕ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ОДНОРОДНЫЕ ДЕКАРТОВЫ И ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Эта глава посвящена расширению некоторых основных геометрических понятий, имеющему целью внести бо́льшую общность и единообразие в теорию алгебраических линий и поверхностей (в частности, линий и поверхностей второго порядка).

I. МНИМЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

161. Мнимые точки и векторы. Введение мнимых элементов (мнимых точек, прямых, плоскостей и пр.) в аналитической геометрии преследует ту же цель, что и введение комплексных (мнимых) чисел в алгебре. Если мы пожелаем ограничиться в алгебре рассмотрением исключительно действительных чисел, то это не вызовет никаких неудобств до тех пор, пока мы будем изучать уравнения только первой степени. Но при переходе к уравнениям второй и высших степеней расширение понятия числа введением комплексных чисел напрашивается само собой. Читателю хорошо известны те неудобства, которые возникли бы в алгебре при желании ограничиться рассмотрением действительных чисел: большинство теорем, касающихся уравнений второй и высших степеней, потеряло бы свою общность и силу; не могла бы, например, быть сформулирована теорема о том, что всякое уравнение n-й степени имеет ровно n корней.

Точно так же и в аналитической геометрии введение мнимых элементов напрашивается само собой, как только мы переходим к вопросу о пересечении линий порядка выше первого. Так же как и в алгебре, при желании ограничиться рассмотрением только действительных точек мы вынуждены были бы отказаться от многих общих предложений или заменить некоторые из них рядом частных, более сложных, теряя, таким образом, в общности и простоте.

Читателю это сделается ясным при ознакомлении с дальнейшим материалом.

Введение понятия мнимых элементов никакого затруднения не вызывает.

Мы знаем, что при данной системе координат Oxy на плоскости всякая пара действительных чисел x, y характеризует одну вполне определенную точку $M(x, y)$ на плоскости.

Условимся говорить, что *всякая* пара чисел x, y также характеризует одну вполне определенную точку $M(x, y)$ на плоскости Oxy; точку

мы будем называть *действительной*, если оба числа x и y действительные, и *мнимой*, если по крайней мере одно из чисел x, y мнимое. Итак, мнимая точка определена нами чисто формально и не следует пытаться вкладывать в это понятие смысла большего, чем это дается в определении.

Также и выражение, что „мнимая" точка $M(x, y)$ находится на данной плоскости координат Oxy, следует понимать чисто условно, и не надо пытаться представлять себе положение этой точки на плоскости. Надо хорошо помнить, что понятие „мнимой точки" на плоскости Oxy покрывается вполне понятием „пары чисел x, y".

Мы условимся говорить, что если Oxy и $O'x'y'$ две системы осей координат на плоскости, то числа (x, y) и (x', y') *определяют одну и ту же точку*, если (x, y) и (x', y') связаны друг с другом теми же формулами преобразования, как и в случае действительных точек, т. е., например, в случае прямоугольных координат, формулами:

$$x = a + x'\cos\varphi \mp y'\sin\varphi,$$
$$y = b + x'\sin\varphi \pm y'\cos\varphi.$$

Далее, условимся говорить, что две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяют отрезок M_1M_2 и в том случае, если одна или обе эти точки мнимые. В этом случае отрезок будет называться мнимым. Точку $M(x, y)$ с координатами

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

мы будем называть *серединой* отрезка M_1M_2 даже в том случае, если точки M_1 и M_2 мнимые.

Две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ мы будем называть *мнимыми сопряженными*, если числа x_1 и x_2, а также и числа y_1 и y_2 — сопряженные комплексные числа [1]).

Середина M_1M_2 отрезка, „соединяющего" две мнимые сопряженные точки, есть действительная точка. Действительно, в этом случае $(x_1 + x_2)$ и $(y_1 + y_2)$ суть действительные числа [2]) и, следовательно, формулы (1) определяют действительную точку (x, y).

Большинство понятий, относящихся к действительным точкам, может быть (формально) обобщено на случай мнимых точек, как это было только что сделано нами для понятия „середины" отрезка, „соединяющего" две мнимые точки. Таким образом можно, например, ввести понятие „расстояния" r между двумя точками, определяя его (в случае прямоугольных координат на плоскости) формулой

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (2)$$

и т. д.

---

[1]) Комплексное число имеет вид $a + ib$, где a и b — действительные числа. Два комплексных числа $a + ib$ и $a - ib$ называются *сопряженными* комплексными числами. Сумма двух сопряженных комплексных чисел есть число действительное. В самом деле, $(a + ib) + (a - ib) = 2a$ — действительное число.

[2]) См. предыдущую сноску.

Точно так же можно рассматривать и *мнимый вектор* на плоскости, определяемый двумя „координатами“ X, Y, которые суть комплексные числа. Два мнимых вектора называются равными, если их координаты равны; суммой двух векторов называется вектор, координаты которого равны суммам соответственных координат данных векторов; „длиной“ вектора называется число

$$\sqrt{X^2+Y^2}$$

(если рассматриваются прямоугольные координаты); векторы называются „параллельными“, если их координаты пропорциональны, и т. д.

Заметим, что *в случае мнимого вектора длина его может равняться нулю без того, чтобы сам вектор был равен нулю* (т. е. чтобы обе координаты его были равны нулю).

Действительно, из равенства (мы все время считаем координаты прямоугольными)

$$X^2+Y^2=0$$

вытекает только, что

$$Y=\pm iX, \tag{3}$$

где

$$i=\sqrt{-1}\,.$$

„Угловой коэфициент“ $\frac{Y}{X}$ такого вектора равен, как мы видим, $\pm i$. О векторе, имеющем такой угловой коэфициент, говорят, что он имеет *изотропное направление*. Это название объясняется тем, что „угловой коэфициент“ такого вектора не изменяется при повороте осей координат.

Действительно рассмотрим, например, случай, когда угловой коэфициент равен $+i$. При повороте осей координат на угол α новые координаты X', Y' вектора выражаются через старые формулами [1]):

$$X'=X\cos\alpha+Y\sin\alpha, \quad Y'=-X\sin\alpha+Y\cos\alpha.$$

Угловой коэфициент этого вектора равен

$$\frac{Y'}{X'}=\frac{-X\sin\alpha+Y\cos\alpha}{X\cos\alpha+Y\sin\alpha},$$

откуда, разделяя числитель и знаменатель в правой части на X и помня, что $\frac{Y}{X}=i$, получаем

$$\frac{Y'}{X'}=\frac{-\sin\alpha+i\cos\alpha}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\frac{i(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=i,$$

а это и требовалось доказать.

Значит „направление“ нашего вектора одинаково как относительно старой, так и относительно повернутой системы осей.

---

[1]) Так же, как и в случае мнимых точек, мы, разумеется, условимся считать, что пары чисел (X, Y) и (X', Y') изображают один и тот же вектор относительно различных осей координат, если числа эти связаны теми же формулами преобразования, что и координаты действительных векторов.

Все сказанное о мнимых точках и векторах на плоскости непосредственно обобщается на случай пространства. Ввиду очевидности этого обобщения мы на нем не останавливаемся (об изотропных направлениях в пространстве будет сказано ниже).

162. Мнимые прямые и плоскости. Сказанное в предыдущем параграфе естественно обобщается на случай „мнимых" прямых и плоскостей.

Например, под мнимой прямой на плоскости Oxy понимают совокупность (мнимых и действительных) точек (x, y), координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$Ax + By + C = 0,$$

где A и B не равны нулю одновременно и где A, B, C обозначают комплексные числа (которые не могут быть все три сделаны действительными сокращением на некоторый общий множитель: в этом последнем случае прямая будет действительной).

Решая предыдущее уравнение относительно y (считая, что $B \neq 0$), приведем его к виду

$$y = ax + b;$$

a называется угловым коэфициентом (по аналогии с действительной прямой). Две прямые (мнимые или действительные) называются параллельными, если их угловые коэфициенты равны. „Точкой пересечения" двух мнимых или действительных прямых называется точка, координаты которой удовлетворяют уравнениям обеих прямых.

Две прямые называются мнимыми сопряженными, если, по умножении уравнения одной из них на подходящий множитель, соответствующие коэфициенты их уравнений становятся мнимыми сопряженными числами. Легко показать, что две мнимые сопряженные прямые всегда пересекаются в действительной точке (если они не параллельны; см. упражнения). Примером мнимых сопряженных прямых могут служить прямые

$$y - y_0 = ai(x - x_0) \quad \text{и} \quad y - y_0 = -ai(x - x_0),$$

где a, x_0, y_0 — действительные числа. Эти прямые пересекаются в действительной точке (x_0, y_0).

В случае прямоугольных координат и $a = 1$ получаем две сопряженные прямые

$$y - y_0 = i(x - x_0), \quad y - y_0 = -i(x - x_0), \tag{1}$$

называемые *изотропными* прямыми, проведенные из точки (x_0, y_0). Они характеризуются тем, что имеют угловой коэфициент $\pm i$ (ср. § 161).

Эти прямые называются также „прямыми нулевой длины", ибо, как легко видеть, расстояние между любыми двумя точками, взятыми на одной из них, равно нулю.

Совершенно аналогично определяются мнимые плоскости и мнимые прямые в пространстве.

Упражнения и дополнения

1. Показать, что две мнимые сопряженные прямые пересекаются в действительной точке (если они не параллельны).

Доказательство. Пусть

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad A'x+B'y+C'=0 \qquad (*)$$

уравнения данных прямых, причем A', B', C' обозначают величины, сопряженные соответственно с A, B, C. Решая предыдущую систему, получаем:

$$x=\frac{C'B-CB'}{AB'-A'B}, \quad y=\frac{A'C-AC'}{AB'-A'B}.$$

Величина $AB'-A'B$ есть величина чисто мнимая, ибо AB' и $A'B$ — сопряженные комплексные числа. Точно так же $C'B-CB'$ и $A'C-AC'$ чисто мнимые числа. Но так как отношение двух чисто мнимых чисел есть число действительное, то x и y будут действительными.

2. Доказать, что совокупность двух мнимых сопряженных прямых может быть представлена одним уравнением второго порядка

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

с действительными коэфициентами.

Доказательство. Совокупность прямых (*) предыдущего упражнения может быть представлена уравнением

$$(Ax+By+C)(A'x+B'y+C')=0;$$

произведя перемножение, получим уравнение указанного типа.

II. ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. КООРДИНАТЫ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Многие предложения аналитической геометрии тоже значительно выигрывают в общности и простоте при введении „бесконечно удаленных“ или „несобственных“ элементов (точек, прямых, плоскостей). Это проще всего достигается применением однородных координат, с определения которых мы и начинаем.

163. Однородные декартовы координаты на прямой. Нам уже несколько раз приходилось встречаться с величинами, характеризующими данное геометрическое свойство, которым, в целях достижения единообразия, оказывалось целесообразным приписывать и бесконечно большие значения (например, угловой коэфициент прямой). При этом каждый раз приходилось делать оговорки о том, как понимать ту или иную формулу, если входящие в нее величины принимают бесконечно большие значения. Эти оговорки, иногда очень загромождающие изложение, можно избежать, выражая величину, обращающуюся в бесконечность, *в виде отношения двух конечных величин*. Так мы, например, поступали, изображая угловой коэфициент прямой на плоскости в виде отношения двух величин: $\frac{Y}{X}$, где Y и X — коэфициенты направления прямой. Угловому коэфициенту ∞ соответствуют тогда коэфициенты направления $X=0$, $Y\neq 0$.

Совершенно аналогично мы можем поступать относительно координат точек на прямой, на плоскости и в пространстве. Начнем для большей ясности с координат точек на прямой.

Положение точки M на оси Ox мы характеризовали до сих пор при помощи одного числа — декартовой абсциссы x. Введем теперь вместо одного числа x два числа x_1, x_2 ($x_2\neq 0$), подчиненные условию

$$x=\frac{x_1}{x_2}. \qquad (1)$$

Величины x_1, x_2 называются *однородными* декартовыми *координатами* точки M. Ясно, что если заданы числа x_1, x_2, причем $x_2 \neq 0$, то точка M вполне определена. Наоборот, если задана точка M, т. е. ее абсцисса x, то это еще не определяет однородных координат: определено только их отношение $\frac{x_1}{x_2}$. Иными словами, если x_1, x_2 — однородные координаты точки M, то числа λx_1 и λx_2, где λ — произвольное число, отличное от нуля, определяют ту же точку.

До сих пор мы считали, что $x_2 \neq 0$. Заменим теперь предыдущее определение однородных координат более общим, а именно условимся в следующем.

1°. Всякие два числа x_1, x_2, *не равные одновременно нулю*, определяют на оси Ox одну и только одну точку $M(x_1, x_2)$.

2°. Числа λx_1, λx_2, где λ — произвольное число, не равное нулю, определяют ту же самую точку, что и x_1, x_2; иными словами, имеет значение только отношение $\frac{x_1}{x_2}$ или $\frac{x_2}{x_1}$ (если одно из чисел x_1, x_2 равно нулю, то надо подразумевать то из этих отношений, знаменатель которого отличен от нуля).

3°. Если $x_2 \neq 0$, то точка $M(x_1, 0)$ есть точка оси Ox, имеющая абсциссой $x = \frac{x_1}{x_2}$.

4°. Если $x_2 = 0$, то точка $M(x_1, 0)$ называется *бесконечно удаленной* или *несобственной* точкой оси Ox (в отличие от точек в собственном смысле слова — „собственных“ точек).

Естественность названия „бесконечно удаленная“ вытекает из того, что точка с абсциссой $x = \frac{x_1}{x_2}$ удаляется в бесконечность при x_2, стремящемся к нулю.

Подчеркнем, что согласно принятым нами условиям, на данной прямой имеется только *одна* бесконечно удаленная точка (прямая как бы замыкается в бесконечности); это следует из условия 2°, в силу которого символы $(x_1, 0)$ и $(\lambda x_1, 0)$ изображают одну и ту же точку; подобрав же подходящим образом λ, можно всегда придать λx_1 какое угодно значение. Значит, символ $(x_1, 0)$ должен изображать одну и ту же точку, каково бы ни было x_1, отличное от нуля.

Замечание. Тот факт, что на прямой имеется только одна бесконечно удаленная точка, не является абсолютным законом, а определяется совокупностью принятых нами условий 1°—4°. Приняв иные условия, мы пришли бы к иному результату. Например, иногда бывает целесообразно принять, что на прямой — две бесконечно удаленные точки, соответствующие $x = +\infty$ и $x = -\infty$.

164. Приложение к корням алгебраического уравнения. С предыдущим естественно связать вопрос о „бесконечно больших“ корнях алгебраического уравнения. Для ясности рассмотрим сперва квадратное уравнение

$$ax^2 + 2bx + c = 0. \qquad (1)$$

Нам придется в дальнейшем часто иметь дело со случаем, когда решение геометрического вопроса в общем виде приводится к уравнению (1),

которое при некоторых частных предположениях обращается в уравнение первой степени

$$2bx + c = 0, \tag{2}$$

благодаря тому что коэфициент a обращается в нуль. Уравнение (2), при $b \neq 0$, имеет один корень. Но часто, чтобы не терять в общности, рассматривают уравнение (2) как частный случай квадратного уравнения (1). Достигается это проще всего так. Будем рассматривать x как абсциссу некоторой точки на оси Ox и введем однородные координаты, положив (считая пока $x_2 \neq 0$)

$$x = \frac{x_1}{x_2}; \tag{3}$$

внося это выражение в (1), получим уравнение

$$a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + c = 0, \tag{1a}$$

которое по умножении на x_2^2 приводится к виду

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0 \tag{4}$$

(„квадратное уравнение в однородном виде"). Это последнее уравнение, содержащее две неизвестные x_1, x_2, не определяет каждую из них в отдельности, а только их отношение

$$x = \frac{x_1}{x_2} \text{ (если } x_2 \neq 0), \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} = \frac{x_2}{x_1} \text{ (если } x_1 \neq 0);$$

для определения первого из отношений имеем уравнение (1a), а для определения второго — уравнение, получаемое из (4) делением на x_1^2:

$$a + 2b\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + c\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 0. \tag{1b}$$

Условимся теперь считать, что уравнение (1) вполне эквивалентно уравнению (4) во всех случаях (даже при $x_2 = 0$), понимая под этим следующее: всякое решение уравнения (4), при котором $x_2 \neq 0$, дает обычное решение $x = \frac{x_1}{x_2}$ уравнения (1). Решение же, при котором $x_2 = 0$ (а, следовательно, по условию, $x_1 \neq 0$), дает „бесконечно большое решение" уравнения (1), решение, которое мы будем обозначать так: $x = \infty$, считая это равенство эквивалентным следующему:

$$\frac{1}{x} = \frac{x_2}{x_1} = 0.$$

Решение уравнения (4), при котором $x_2 = 0$, может иметь место только в том случае, когда $a = 0$; ибо, если $a \neq 0$, то при $x_2 = 0$ мы должны были бы иметь $ax_1^2 = 0$, т. е. $x_1 = 0$; но тогда x_1 и x_2 были бы равны нулю одновременно, что мы всегда исключаем. При $a = 0$ уравнение (4) принимает вид

$$x_2(2bx_1 + cx_2) = 0$$

и имеет следующие решения (считая $b \neq 0$):

1°. $x_1 =$ произвольной величине, $x_2 = 0$, т. е. $\frac{x_2}{x_1} = 0$;

2°. $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{c}{2b}$.

В соответствии со сказанным имеем следующий результат: *если в уравнении* (1) $a = 0$, $b \neq 0$, *то уравнение это имеет следующие два решения*:

$$x = -\frac{c}{2b} \quad \text{и} \quad x = \infty.$$

Если в уравнении (1) $a = b = 0$, $c \neq 0$, то оно принимает вид $cx_2^2 = 0$ и имеет, как видим, *двукратный корень* $x_2 = 0$ (причем x_1 — произвольно). В соответствии с этим можно сказать, *что при* $a = b = 0$, $c \neq 0$ *уравнение* (1) *имеет двукратный корень* $x = \infty$ или, что все равно, *два бесконечно больших корня*. К тому же результату приводит рассмотрение пределов корней уравнения (1) при стремлении к нулю одного или обоих коэфициентов a, b; см. ниже, упражнение.

Рассуждения, вполне аналогичные предыдущим, приводят к следующему соглашению, которое мы примем раз и навсегда:

Пусть дано уравнение n-й степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0; \tag{5}$$

если $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$, но $a_k \neq 0$, то мы будем говорить, что уравнение n-й степени (5) имеет k-кратный корень, равный бесконечности (или k корней, равных бесконечности).

Упражнение

Пусть коэфициенты a, b, c квадратного уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ — переменные величины, стремящиеся к пределам:

$$\lim a = a_0, \quad \lim b = b_0, \quad \lim c = c_0.$$

Доказать, что если $a_0 = 0$, $b_0 \neq 0$, то один из корней уравнения стремится [1]) к ∞, а другой к $-\frac{c_0}{2b_0}$. Если же $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 \neq 0$, то оба корня стремятся к ∞.

165. Однородные декартовы координаты на плоскости. Перейдем теперь к координатам на плоскости. Пусть x, y — декартовы координаты точки M. Введем вместо x, y *три числа* x_1, x_2, x_3, *не равные одновременно нулю*, которые мы будем называть *однородными декартовыми координатами*, условившись в следующем (ср. аналогичные условия в § 163):

1°. Всякие три числа x_1, x_2, x_3, не равные одновременно нулю, определяют на плоскости Oxy одну и только одну точку $M(x_1, x_2, x_3)$.

2°. Числа λx_1, λx_2, λx_3, где $\lambda \neq 0$, определяют ту же самую точку, что и x_1, x_2, x_3; таким образом значение имеют только отношения чисел x_1, x_2, x_3 друг к другу.

---

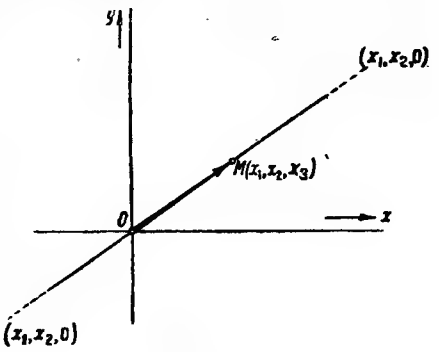
[1]) Говоря, что x стремится к ∞, мы подразумеваем только то, что $\lim \frac{1}{x} = 0$; следовательно, мы не делаем различия между стремлением к $+\infty$ и $-\infty$ даже в том случае, когда x пробегает действительные значения.

3°. Если $x_3 \neq 0$, то точка $M(x_1, x_2, x_3)$ есть точка плоскости Oxy с неоднородными (т. е. обычными) координатами

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{1}$$

4°. Если $x_3 = 0$, то точка $M(x_1, x_2, 0)$ называется бесконечно удаленной или несобственной точкой плоскости.

Несобственных (бесконечно удаленных) точек на плоскости бесчисленное множество; каждая из них характеризуется отношением двух чисел x_1, x_2. Поясним это более подробно.



Черт. 111.

Рассмотрим наряду с данной несобственной точкой $(x_1, x_2, 0)$ собственную точку $M(x_1, x_2, x_3)$. Представим себе, что x_1, x_2 остаются неизменными, а x_3, оставаясь отличным от нуля, стремится к пределу нуль. Тогда по крайней мере одна из неоднородных декартовых координат x, y этой точки будет беспредельно возрастать. Значит, точка $M(x_1, x_2, x_3)$ или $M(x, y)$ при убывании x_3 удаляется в бесконечность.

Проведем радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат с переменной точкой M (черт. 111).

На основании (1) угловой коэфициент его

$$k = \frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1}, \tag{2}$$

значит, радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ при перемещении точки M (когда x_3 стремится к 0) остается параллельным неизменному направлению, которое характеризуется угловым коэфициентом $\frac{x_2}{x_1}$.

В соответствии с этим говорят, что несобственная точка $(x_1, x_2, 0)$ *удалена в бесконечность в направлении, определяемом угловым коэфициентом* $\frac{x_2}{x_1}$. Если дано это направление, т. е. отношение величин x_1, x_2, то этим самым вполне определяется соответствующая несобственная точка, ибо такая точка характеризуется не самими величинами x_1, x_2, а их отношением друг к другу.

Предыдущее рассмотрение пригодно и в случае, когда $x_1 = 0$ (а, следовательно, по условию, $x_2 \neq 0$): в этом случае наша несобственная точка бесконечно удалена в направлении оси Oy.

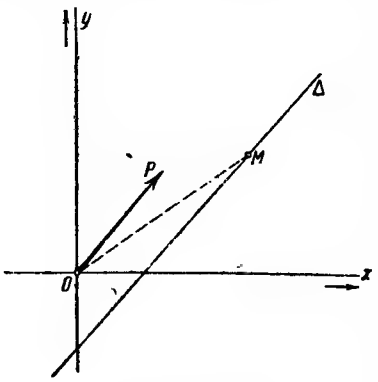
Рассмотрим переменную точку $M(x_1, x_2, x_3)$, однородные координаты x_1, x_2, x_3 которой стремятся к определенным (конечным) пределам, не равным одновременно нулю. Если $\lim x_3 \neq 0$, то наша точка

стремится к вполне определенной собственной точке с неоднородными координатами

$$x_0 = \frac{\lim x_1}{\lim x_3}, \quad y_0 = \frac{\lim x_2}{\lim x_3}.$$

Если же $\lim x_3 = 0$, то условимся говорить, что точка M стремится к несобственной точке с однородными координатами X, Y, 0, где $X = \lim x_1$, $Y = \lim x_2$ (или, что все равно, с координатами λX, λY, 0, где $\lambda \neq 0$ произвольное число).

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ переменной точки M имеет угловой коэфициент $k = \frac{x_2}{x_1}$, который стремится к пределу $\frac{Y}{X}$. Значит, он стремится стать параллельным вектору $\mathrm{P} = (X, Y)$; это, очевидно, остается справедливым и в случае, когда $X = \lim x_1 = 0$. Таким образом предельная несобственная точка M_0 удалена в бесконечность в направлении, параллельном вектору $\mathrm{P} = (X, Y)$. Обратим внимание на то, что здесь мы не различаем положительного и отрицательного направлений: точка может удаляться в бесконечность так, что положительное направление ее радиуса-вектора стремится к направлению вектора $\mathrm{P} = (X, Y)$ или к направлению вектора $-\mathrm{P} = (-X, -Y)$. В обоих случаях, согласно нашему условию, точка M стремится к одной и той же бесконечно удаленной точке $M_0(X, Y, 0)$ или $M_0(-X, -Y, 0)$.



Черт. 112.

Например, пусть точка M движется по прямой Δ, параллельной вектору $\mathrm{P} = (X, Y)$ (черт. 112) в ту или другую сторону. По принятому нами определению она стремится в обоих случаях к одной и той же несобственной точке $(X, Y, 0)$, которую можно представить и так: $(-X, -Y, 0)$ или, общее, так: $(\lambda X, \lambda Y, 0)$, где λ — произвольный множитель, не равный нулю. Таким образом в согласии с тем, что было сказано в § 163, на прямой имеется только *одна* бесконечно удаленная точка.

Ясно также, что *бесконечно удаленная точка всякой прямой, параллельной* Δ, *совпадает с предыдущей.*

Замечание. Мы видели, что точка M с однородными координатами x_1, x_2, x_3 стремится к определенному предельному положению (собственному или несобственному), когда x_1, x_2, x_3 стремятся к определенным пределам, не равным одновременно нулю.

Если x_1, x_2, x_3 не стремятся к определенным пределам, то это еще не значит, что точка M не стремится ни к какому пределу. Действительно, может конечно случиться, что x_1, x_2, x_3 не стремятся ни к каким пределам, тогда как числа λx_1, λx_2, λx_3, где λ — подходящим образом подобранный (переменный) множитель, стремятся к определен-

ным пределам, не равным одновременно нулю. Тогда, очевидно, наша точка будет стремиться к определенному предельному положению, ибо точка $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ есть та же точка $M(x_1, x_2, x_3)$.

166. Уравнение прямой в однородных координатах. Рассмотрим теперь уравнение

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0, \tag{a}$$

где a_1, a_2, a_3 — постоянные коэфициенты. Мы знаем, что если a_1 и a_2 не равны одновременно нулю, то уравнение это изображает прямую на плоскости Oxy.

Вводя теперь однородные координаты, полагая

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

получим уравнение

$$a_1 \frac{x_1}{x_3} + a_2 \frac{x_2}{x_3} + a_3 = 0. \tag{b}$$

Если мы ограничиваемся рассмотрением собственных точек плоскости ($x_3 \neq 0$), то можем умножить уравнение (b) на x_3, т. е. привести его к „однородному виду“

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0. \tag{1}$$

Однородные координаты всякой собственной точки нашей прямой удовлетворяют уравнению (1); обратно, всякие три числа (x_1, x_2, x_3), при $x_3 \neq 0$, удовлетворяющие уравнению (1), дают собственную точку, принадлежащую нашей прямой.

Условимся теперь говорить, что вообще *всякая* (собственная или несобственная) точка принадлежит или не принадлежит нашей прямой в зависимости от того, удовлетворяют ли ее координаты уравнению (1) или нет; мы имеем в виду именно уравнение, взятое в однородном виде (1), а не в виде (b).

В частности, координаты $(x_1, x_2, 0)$ несобственной точки, принадлежащей нашей прямой, должны удовлетворять уравнению

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

которое дает для $\frac{x_2}{x_1}$ вполне определенное значение

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{a_1}{a_2} \tag{2}$$

(в случае, когда $a_2 = 0$, эту формулу следует заменить следующей: $x_1 = 0$, x_2 — произвольно).

Мы видим, таким образом, что согласно нашим условиям на данной прямой имеется одна и только одна бесконечно удаленная точка, в качестве однородных координат которой можно взять, например, $(a_2, -a_1, 0)$ или всякие пропорциональные им числа. Это находится в точном согласии со сказанным в предыдущих параграфах.

Легко видеть, далее, что, в согласии со сказанным в предыдущем параграфе, все параллельные между собою прямые, содержат одну и ту же

бесконечно удаленную точку, т. е., как говорят, проходят через одну и ту же несобственную точку. Действительно, мы видим, что бесконечно удаленная точка данной прямой определяется отношением коэфициентов a_1, a_2, т. е. зависит только от углового коэфициента прямой.

Сделаем теперь еще один шаг в обобщении введенных понятий. До сих пор мы считали, что a_1 и a_2 не равны одновременно нулю. Отбросим теперь это условие. Если $a_1 = a_2 = 0$ и, кроме того, $a_3 = 0$, то мы имеем тождественное уравнение $0 = 0$, удовлетворяющееся координатами всех точек плоскости. Этот случай, вообще говоря, интереса не представляет, но иногда есть смысл рассматривать и его: говорят, что при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ уравнение (1) представляет „неопределенную прямую".

В дальнейшем, если противное не оговорено, *мы всегда будем считать, что по крайней мере одна из величин* a_1, a_2, a_3 *отлична от нуля.*

Рассмотрим теперь случай, когда $a_1 = a_2 = 0$, но $a_3 \neq 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$a_3 x_3 = 0,$$

или

$$x_3 = 0. \qquad (3)$$

В этом случае, как мы видим, нашему уравнению удовлетворяют только несобственные точки; ясно, что всякая несобственная точка удовлетворяет ему. Мы будем говорить, что уравнение (3) изображает *несобственную или бесконечно удаленную прямую.*

Итак, согласно нашим условиям совокупность бесконечно удаленных точек на плоскости составляет одну бесконечно удаленную прямую [1]).

Таким образом мы расширили понятие точки и прямой введением несобственных точек и несобственной прямой. Мы увидим сейчас, что при этом сохраняется основное свойство точек и прямых, заключающееся в том, что через две несовпадающие точки проходит одна и только одна прямая. Другое же основное свойство, заключающееся в том, что две несовпадающие прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке, заменяется более простым: две несовпадающие прямые всегда пересекаются в одной точке (собственной или несобственной). Мы докажем оба эти свойства, решая задачи: *провести прямую через две заданные точки и найти пересечение двух заданных прямых.*

Сделаем несколько предварительных замечаний и условимся в обозначениях.

Левая часть уравнения (1) представляет собою *линейную форму* [2])

---

[1]) Надо иметь в виду, что это заключение (как и другие аналогичные) следуют из принятых нами условий. Мы могли бы принять и другие условия и получить другие заключения (ср. еще замечание в конце § 163). Например, в теории функций комплексного переменного целесообразнее принять условия, на основании которых на плоскости имеется только одна бесконечно удаленная точка.

[2]) См. Добавление, § 4.

трех переменных x_1, x_2, x_3. Для краткости мы будем обозначать ее через $f(x_1, x_2, x_3)$ или просто через f:

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

Пусть теперь даны две прямые

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad \text{и} \quad f' = a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = 0.$$

Для совпадения этих прямых необходимо и достаточно, чтобы формы f и f' были *линейно зависимы* [1]), т. е. чтобы имело место тождество вида

$$f' = kf,$$

где k — некоторое число, отличное от нуля, т. е. чтобы коэфициенты одной формы были пропорциональны коэфициентам другой. А для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы *ранг таблицы*

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{matrix}$$

был равен единице (нулю он равен быть не может, так как среди элементов таблицы, и даже в каждой строке, имеются элементы, отличные от нуля).

С этим уместно сопоставить *условие совпадения двух точек*, которое, очевидно, можно формулировать так: *для совпадения двух точек* $M(x_1, x_2, x_3)$ и $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ *необходимо и достаточно, чтобы ранг таблицы*

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{matrix} \qquad (**)$$

был равен единице.

Перейдем к решению *задачи о проведении прямой через две несовпадающие точки* $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ и $M''(x''_1, x''_2, x''_3)$.

Пусть a_1, a_2, a_3 — коэфициенты уравнения искомой прямой, а $M(x_1, x_2, x_3)$ — одна из ее точек. По условию мы должны иметь одновременно:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3 &= 0, \\ a_1x''_1 + a_2x''_2 + a_3x''_3 &= 0. \end{aligned}$$

Так как a_1, a_2, a_3 не равны нулю одновременно, мы должны иметь

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

[1]) Если прямые совпадают, то их уравнения $f = 0$ и $f_1 = 0$ эквивалентны, а отсюда следует, что линейные формы f и f_1 зависимы (см. Добавление, § 6, Следствие; в нашем простом случае интересующий нас результат очень легко установить и непосредственно).

Мы сейчас покажем, что это и есть уравнение искомой прямой. Действительно, разлагая определитель в левой части (4) по элементам первой строки и умножая обе части уравнения на произвольное число k, отличное от нуля [1]), получим линейное уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

где

$$a_1 = k(x'_2x''_3 - x''_2x'_3),\quad a_2 = k(x'_3x''_1 - x''_3x'_1),\quad a_3 = k(x'_1x''_2 - x''_1x'_2). \quad (5)$$

Коэфициенты a_1, a_2, a_3 не равны нулю одновременно, так как точки M', M'' по условию не совпадают [2]). Таким образом (4) изображает определенную прямую. Ясно, что прямая эта удовлетворяет поставленным условиям, т. е. проходит через точки M' и M'' [3]). Значит, через две несовпадающие (собственные или несобственные) точки проходит одна вполне определенная прямая.

Рассмотрим для большей ясности возможные частные случаи. Если обе точки M' и M'' — собственные, то и прямая (4) будет собственной, как легко проверить [4]).

Если одна из точек, например M'', несобственная, а другая M' — собственная, т. е. $x''_3 = 0$, $x'_3 \neq 0$, то уравнение (4) по разделению на kx'_3 примет вид

$$-x''_2x_1 + x''_1x_2 + \frac{x'_1x''_2 - x''_1x'_2}{x'_3}x_3 = 0,$$

или в неоднородных координатах

$$-x''_2x + x''_1y + \frac{x'_1x''_2 - x''_1x'_2}{x'_3} = 0.$$

Это есть, очевидно, уравнение прямой, проходящей через точку M' и параллельной вектору (x''_1, x''_2). Этого и следовало ожидать, так как прямая, проходящая через несобственную точку $(x''_1, x''_2, 0)$, есть прямая, параллельная вектору (x''_1, x''_2).

Если обе точки M' и M'' — несобственные ($x'_3 = x''_3 = 0$), то уравнение (4) принимает вид

$$(x'_1x''_2 - x''_1x'_2)x_3 = 0,$$

---

[1]) Конечно, можно и не вводить множитель k; мы делаем это для общности окончательных формул (5).

[2]) Если бы $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то ранг таблицы

$$\begin{matrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{matrix}$$

был бы меньше двух (равен единице).

[3]) Действительно, непосредственной подстановкой координат точек M' и M'' убеждаемся, что уравнение (4) удовлетворяется ими.

[4]) Так как в этом случае $x'_3 \neq 0$, $x''_3 \neq 0$, то, изменяя пропорционально координаты, можем принять $x'_3 = x''_3 = 1$. Если бы при этом оказалось, что $a_1 = a_2 = 0$, то вышло бы на основании (5), что $x'_1 = x''_1$, $x'_2 = x''_2$, т. е. точки M' и M'' совпадали бы.

т. е.

$$x_3 = 0,$$

значит, как и следовало ожидать, искомая прямая — несобственная (собственная прямая может содержать только одну несобственную точку).

Заметим еще, что *равенство* (4) *выражает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы три точки* $M(x_1, x_2, x_3)$, $M'(x_1', x_2', x_3')$, $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$ *были коллинеарны*, т. е. расположены на одной прямой. Это следует из предыдущего в том случае, когда M' и M'' не совпадают. Когда M' и M'' совпадают, тогда условие (4) соблюдено для всякой точки M, ибо в определителе элементы второй и третьей строк в этом случае пропорциональны. С другой стороны, если точки M' и M'' совпадают, то эти точки расположены на одной прямой с любой точкой M. Итак, наше условие справедливо для всяких трех точек [собственных, несобственных и совпадающих] [1]).

Перейдем теперь к задаче нахождения пересечения двух прямых. Пусть даны две несовпадающие прямые

$$\left.\begin{aligned} a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 &= 0, \\ a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решая эту систему относительно x_1, x_2, x_3, находим [2])

$$x_1 = k(a_2'a_3'' - a_2''a_3'),\ x_2 = k(a_3'a_1'' - a_3''a_1'),\ x_3 = k(a_1'a_2'' - a_1''a_2'), \tag{7}$$

где k — произвольный множитель, отличный от нуля. Правые части не равны нулю одновременно, так как прямые (6), по условию, не совпадают. Итак, имеется одна и только одна точка пересечения, определяемая формулами (7).

Если

$$a_1'a_2'' - a_1''a_2' = 0, \tag{8}$$

то $x_3 = 0$. В этом и только в этом случае точка пересечения — несобственная. Условие (8) является, таким образом, условием параллельности прямых (6) — результат, полученный нами и раньше.

Если одна из данных прямых — несобственная, например, если $a_1'' = a_2'' = 0$, $a_3'' \neq 0$, то на основании (7) получим, отбрасывая общий множитель ka_3'':

$$x_1 = a_2',\quad x_2 = -a_1',\quad x_3 = 0,$$

т. е., как и следовало ожидать, несобственную точку прямой $a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = 0$.

Перейдем теперь к вопросу о пересечении *трех* прямых и введем

---

[1]) Ср. это условие с условием коллинеарности трех точек, полученным в § 38.

[2]) См. Добавление, § 6а.

обозначения (несколько отличные от предыдущих: мы пишем теперь f_1 и f_2 вместо f и f'):

$$f_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$
$$f_2 = a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3,$$
$$f_3 = a''_1x_1 + a''_2x_2 + a''_3x_3.$$

Уравнения (6) перепишутся теперь сокращенно так:

$$f_2 = 0, \quad f_3 = 0. \tag{6а}$$

Если прямые (6а) различны [1]) и если прямая $f_1 = 0$ проходит через их пересечение, то форма f_1 есть *линейная комбинация* форм f_1 и f_2:

$$f_1 = \lambda f_2 + \mu f_3, \tag{9}$$

где λ, μ — некоторые числа; действительно, по условию, решение системы уравнений (6а) должно удовлетворять и уравнению $f_1 = 0$, откуда и следует наше утверждение [2]).

Тождество (9) эквивалентно следующим равенствам:

$$a_1 = \lambda a'_1 + \mu a''_1, \quad a_2 = \lambda a'_2 + \mu a''_2, \quad a_3 = \lambda a'_3 + \mu a''_3 \tag{10}$$

или еще утверждению, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Предыдущее равенство есть *условие того, чтобы три прямые*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

принадлежали одному пучку (т. е. имели общую собственную или несобственную точку). Мы доказали это для случая, когда прямые $f_2 = 0$ и $f_3 = 0$ различны. Если эти две прямые совпадают, то (11) все же имеет место (ибо тогда две последние строки определителя пропорциональны); с другой стороны, если прямые f_2 и f_3 совпадают, то любая третья прямая $f_1 = 0$ имеет с ними общую точку (собственную или несобственную). Таким образом условие (11) справедливо во всех случаях. Этим мы снова доказали результат § 113 в более общем виде.

Условие (11) эквивалентно условию, что три формы f_1, f_2, f_3 линейно зависимы [3]), т. е. что имеет место равенство вида (тождественно, т. е. при всяких значениях x_1, x_2, x_3)

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0, \tag{12}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — числа, не все равные нулю. Если f_2 и f_3 линейно независимы, то наверное $\lambda_1 \neq 0$, и мы снова получаем результат (9).

---

[1]) То-есть формы f_2 и f_3 линейно независимы.

[2]) См. Добавление, § 6, следствие.

[3]) См. Добавление, § 5. Условие (11) можно выразить и так: ранг таблицы коэфициентов форм f_1, f_2, f_3 меньше трех.

В качестве примера применения условия (11) рассмотрим случай, когда одна из прямых несобственная, например, когда $a_1'' = a_2'' = 0$, $a_3'' \neq 0$. Тогда условие (11) дает

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ 0 & 0 & a_3'' \end{vmatrix} = a_3''(a_1a_2' - a_1'a_2) = 0,$$

или

$$a_1a_2' - a_1'a_2 = 0,$$

т. е. условие параллельности двух первых прямых, как и следовало ожидать.

167. Параметрическое представление прямой в однородных координатах. Прямую на плоскости легко также представить параметрически в однородных координатах. Будем определять положение данной прямой двумя какими-нибудь ее различными точками $M'(x_1', x_2', x_3')$ и $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$. Координаты любой точки $M(x_1, x_2, x_3)$ этой прямой характеризуются условием (4) предыдущего параграфа, которое в нашем случае можно формулировать и так: ранг таблицы

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{matrix} \qquad (1)$$

равен двум (меньше двух он быть не может, ибо ранг таблицы, составленной из двух последних строк, равен двум; это следует из того, что точки M' и M'' различны). Следовательно, первая строка является линейной комбинацией двух последних, т. е. [1])

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'', \qquad (2)$$

где λ и μ — числа, не равные одновременно нулю (так как x_1, x_2, x_3 не равны одновременно нулю).

Если числа x_1, x_2, x_3 даны [2]), то λ и μ вполне определены [3]). Действительно, среди определителей $x_i'x_j'' - x_i''x_j'$ $(i, j = 1, 2, 3)$ по крайней мере один отличен от нуля. Пусть это будет, например, определитель $x_1'x_2'' - x_1''x_2'$. Решая тогда первые два уравнения (2) относительно λ и μ, получим для них значения

$$\lambda = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \mu = \gamma x_1 + \delta x_2, \qquad (3)$$

где α, β, γ, δ — вполне определенные величины (предоставляем читателю написать выражения для них).

---

[1]) См. Добавление, § 5, следствие.

[2]) Конечно, предполагается, что эти числа таковы, что ранг таблицы (1) меньше трех (и, следовательно, равен двум).

[3]) Это также следует из сказанного в Добавлении (§ 5, следствие). Но, для большей ясности, мы приводим доказательство непосредственно для нашего частного случая.

Изменяя в (2) λ и μ, можно получить все точки рассматриваемой прямой, включая и несобственную. При $\lambda = 0$ получим точку M'', а при $\mu = 0$ — точку M'; если λ и μ таковы, что $\lambda x_3' + \mu x_3'' = 0$, то $x_3 = 0$, и мы получим несобственную точку нашей прямой.

На положение точки влияют не сами числа λ и μ, а их отношение $\frac{\lambda}{\mu}$ или $\frac{\mu}{\lambda}$. Действительно, будем считать временно, что $\mu \neq 0$, т. е. что точка M не совпадает с M'. Тогда мы можем переписать уравнения (2) таким образом:

$$x_1 = \mu(hx_1' + x_1''),\quad x_2 = \mu(hx_2' + x_2''),\quad x_3 = \mu(hx_3' + x_3''), \tag{4}$$

где

$$h = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Так как умножение однородных координат на одно и то же число не изменяет положения точки, то в предыдущих формулах можно отбросить множитель μ и переписать их так:

$$x_1 = hx_1' + x_1'',\quad x_2 = hx_2' + x_2'',\quad x_3 = hx_3' + x_3'', \tag{4a}$$

откуда и следует, что, положение точки M зависит только от отношения h. Из (4а) следует, что каждому значению h соответствует одна, вполне определенная точка прямой.

Легко видеть, что, обратно, каждой точке прямой соответствует одно определенное значение h (временно исключаем точку M'). Действительно, пусть $M(x_1, x_2, x_3)$ — какая-либо точка данной прямой. Тогда всякие другие однородные координаты той же точки (относительно той же системы координат) получаются из x_1, x_2, x_3 умножением на произвольный множитель k, отличный от нуля; но тогда λ и μ умножатся на тот же множитель, как это следует из (3)· следовательно, отношение $\frac{\lambda}{\mu} = h$ неизменно для одной и той же точки.

Мы исключили временно случай $\mu = 0$, т. е. $h = \infty$. Условимся теперь придавать в (4а) параметру h такое значение ∞, понимая под этим, что тогда, в формулах (2), $\mu = 0$. Таким образом значению $h = \infty$ соответствует точка M', и обратно.

Итак, мы можем высказать следующее: *придавая* $h = \frac{\lambda}{\mu}$ *всевозможные значения, включая* ∞, *получим все точки нашей прямой; при этом каждой точке прямой соответствует одно значение* h, *и обратно.*

Замечание 1. Из формул (4а) легко получить параметрическое представление прямой, полученное нами раньше. Именно, возьмем в качестве точки M' несобственную точку нашей прямой, т. е. будем считать $x_3' = 0$; тогда вектор (X, Y), где $X = x_1'$, $Y = x_2'$, есть вектор направления нашей прямой. Формулы (4а) дают $x_1 = x_1'' + hX$, $x_2 = x_2'' + hY$, $x_3 = x_3''$. Переходя к неоднородным координатам точки M $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ и точки M'' $x_0 = \frac{x_1''}{x_3''}$, $y_0 = \frac{x_2''}{x_3''}$, получаем

$$x = x_0 + tX, \quad y = y_0 + tY, \tag{5}$$

где положено $t = \frac{h}{x_3''}$, т. е. формулы § 88.

Замечание 2. В § 41 мы вывели формулы (2а), которые мы теперь напишем так:

$$x = \frac{x' + mx''}{1 + m}, \quad y = \frac{y' + my''}{1 + m}, \tag{6}$$

где x, y обозначают координаты точки M, делящей отрезок $M'M''$ в отношении m; здесь M' и M'' суть собственные точки с координатами (x', y'), (x'', y''). Эти формулы можно рассматривать как параметрическое представление прямой, проходящей через M' и M''; параметром здесь является m. При $m = -1$ получаем несобственную точку, при $m = 0$ точку M', при $m = \infty$ — точку M''. Эти формулы можно легко вывести из формул (2).

Действительно, считая M' и M'' собственными точками, можно принять $x_3' = x_3'' = 1$.

Тогда $x_1' = x'$, $x_2' = y'$ и $x_1'' = x''$, $x_2'' = y''$ суть неоднородные координаты точек M' и M''. Разделяя почленно первые два равенства (2) на третье и полагая

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y,$$

получим

$$x = \frac{\lambda x' + \mu x''}{\lambda + \mu}, \quad y = \frac{\lambda y' + \mu y''}{\lambda + \mu}, \tag{6а}$$

откуда делением числителей и знаменателей на λ получаем (6).

168. Однородные декартовы координаты в пространстве. Обобщение предыдущих соображений на случай пространства никаких затруднений не представляет.

Пусть $M(x, y, z)$ есть точка пространства. Введем вместо x, y, z *четыре* величины x_1, x_2, x_3, x_4, *не равные одновременно нулю* и связанные с x, y, z соотношениями:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}. \tag{1}$$

Числа x_1, x_2, x_3, x_4 носят название *однородных координат* точки M, которая при этом обозначается так: $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$. На положение точки влияют не сами однородные координаты, а отношения трех из них к четвертой. Для обычных (собственных) точек пространства должно быть $x_4 \neq 0$. Вводя также в рассмотрение значения $x_4 = 0$, мы обобщим понятие точки, условившись говорить, что совокупность чисел $(x_1, x_2, x_3, 0)$ изображает *несобственную* или *бесконечно удаленную* точку. Мы будем говорить, что точка эта бесконечно удалена в направлении вектора

$$\mathbf{P} = (X, Y, Z),$$

где $X = \lambda x_1$, $Y = \lambda x_2$, $Z = \lambda x_3$, а λ — произвольное число (но не нуль), например $+1$.

Все прямые, параллельные вектору $\mathbf{P}=(X, Y, Z)$, содержат одну и ту же бесконечно удаленную точку $M_0(X, Y, Z, 0)$; ср. сказанное в § 165 и 166.

Уравнение плоскости

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0 \tag{2}$$

в однородных координатах будет иметь вид

$$f_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0. \tag{3}$$

Условимся приписывать этому уравнению смысл и в том случае, когда $a_1=a_2=a_3=0$. Если a_4 также равно нулю, мы получим тождественное уравнение $0=0$, удовлетворяющееся координатами всех точек пространства. Этот случай интереса не представляет, но иногда есть смысл рассматривать и его („неопределенная плоскость"). *Во всем дальнейшем,* если противное не оговорено, *мы будем считать, что* a_1, a_2, a_3, a_4 *не равны нулю одновременно.*

Если $a_1=a_2=a_3=0$ и, следовательно, $a_4\neq 0$, уравнение (3) дает

$$a_4x_4=0, \quad \text{или} \quad x_4=0,$$

т. е. удовлетворяется только несобственными точками. Мы будем говорить, что оно изображает *несобственную* или *бесконечно удаленную плоскость.* Таким образом, согласно нашему условию, совокупность несобственных точек пространства составляет *одну* несобственную плоскость.

Две плоскости

$$f_2=a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3+a'_4x_4=0 \tag{4}$$

и

$$f_3=a''_1x_1+a''_2x_2+a''_3x_3+a''_4x_4=0 \tag{5}$$

будут совпадающими (т. е. такими, что все точки одной принадлежат и другой) тогда и только тогда, когда формы f_2 и f_3 линейно зависимы, т. е. когда коэфициенты одной пропорциональны коэфициентам другой.

Пусть (4) и (5) какие-либо несовпадающие плоскости.

Совокупность точек, принадлежащих обеим этим плоскостям, есть прямая, если обе плоскости — собственные и непараллельные.

Если одна из них — несобственная, например, если $a''_1=a''_2=a''_3=0$, $a''_4\neq 0$, то предыдущие уравнения сводятся к следующим

$$a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3+a'_4x_4=0, \quad x_4=0.$$

Мы будем все же говорить, что эти уравнения изображают прямую пересечения плоскости (4) с несобственной плоскостью; эта прямая представляет собою совокупность несобственных точек плоскости (4) и называется *несобственной* или *бесконечно удаленной прямой этой плоскости.* Это находится в полном согласии с принятым в § 166 условием, что совокупность несобственных точек плоскости составляет одну (несобственную) прямую данной плоскости.

Совокупность несобственных точек $(x_1, x_2, x_3, 0)$ плоскости (4) определяется условиями

$$a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3=0, \quad x_4=0.$$

Совокупность несобственных точек любой плоскости

$$a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 + a_4''x_4 = 0,$$

параллельной данной, определяется из таких же условий

$$a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

Эти несобственные точки одни и те же для обеих параллельных плоскостей, ибо, в силу параллельности, коэфициенты a_1'', a_2'', a_3'' пропорциональны коэфициентам a_1', a_2', a_3', и следовательно, уравнения

$$a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = 0 \quad \text{и} \quad a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 = 0$$

эквивалентны.

Значит, две параллельные плоскости имеют общую несобственную прямую.

Из сказанного следует, что *всякие две несовпадающие плоскости определяют одну и только одну прямую* (собственную или несобственную).

Докажем теперь, что через любые две (собственные или несобственные) точки проходит одна и только одна (собственная или несобственная) прямая. Пусть $M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ и $M''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$ две различные точки. Найдем сперва все плоскости, проходящие через эти две точки. Для того чтобы плоскость

$$f_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

проходила через точки M' и M'', коэфициенты ее уравнения должны удовлетворять двум условиям:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' + a_4x_4' &= 0, \\ a_1x_1'' + a_2x_2'' + a_3x_3'' + a_4x_4'' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ранг таблицы коэфициентов этой системы

$$\begin{matrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{matrix}$$

равен двум, так как точки M' и M'' не совпадают. Следовательно, система (6) допускает два независимых решения [1]), которые мы обозначим так:

$$\begin{matrix} a_1', & a_2', & a_3', & a_4', \\ a_1'', & a_2'', & a_3'', & a_4''. \end{matrix}$$

Всякое решение системы (6) будет линейной комбинацией этих двух решений, т. е.

$$\left.\begin{aligned} a_1 = \lambda a_1' + \mu a_1'',\ a_2 = \lambda a_2' + \mu a_2'',\ a_3 = \lambda a_3' + \mu a_3'', \\ a_4 = \lambda a_4' + \mu a_4''. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

[1]) См. Добавление, § 6.

(где λ, μ — не равны одновременно нулю) и, следовательно, уравнение искомой плоскости будет

$$f_1 = (\lambda a_1' + \mu a_1'')\, x_1 + (\lambda a_2' + \mu a_2'')\, x_2 + (\lambda a_3' + \mu a_3'')\, x_4 + \\ + (\lambda a_4' + \mu a_4'')\, x_4 = 0$$

или

$$\lambda f_2 + \mu f_3 = 0, \tag{8}$$

где попрежнему

$$f_2 = a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 + a_4' x_4,\ f_3 = a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 + a_4'' x_4.$$

Изменяя λ и μ, мы получим все возможные плоскости, проходящие через точки M' и M''. Мы видим, что все эти плоскости проходят через пересечение плоскостей

$$f_2 = 0,\quad f_3 = 0. \tag{9}$$

Пересечение это и определяет прямую, проходящую через две точки M' и M'', и притом, как это следует из сказанного, единственным образом.

Вообще, если даны две различные плоскости $f_2 = 0$ и $f_3 = 0$, то для того, чтобы плоскость $f_1 = 0$ проходила через пересечение этих плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы форма f_1 была линейной комбинацией форм [1]) f_2 и f_3:

$$f_1 = \lambda f_2 + \mu f_3. \tag{8а}$$

Следовательно, общее уравнение плоскостей пучка, определяемого двумя плоскостями (9), имеет вид (8).

Условие (8а) эквивалентно условию, что ранг таблицы

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' & a_4'' \end{matrix} \tag{10}$$

равен двум [2]) (меньше двух он быть не может, ибо, по условию, формы f_2 и f_3 независимы).

Наконец, из предыдущего следует, что *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы три плоскости* $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ *принадлежали одному пучку, заключается в том, чтобы ранг таблицы* (10) *был меньше трех*. Это уже доказано для случая, когда ранг равен двум. Если ранг равен единице, то две из форм f_1, f_2, f_3 линейно зависят от третьей, т. е., например,

$$f_1 = \lambda f_3,\quad f_2 = \mu f_3,$$

а это значит, что все три плоскости сливаются в одну, и в этом случае, разумеется, плоскости принадлежат одному пучку.

---

[1]) См. Добавление, § 6, следствие.
[2]) См. Добавление, § 5.

Условие, чтобы ранг таблицы (10) был меньше трех, эквивалентно условию, чтобы формы f_1, f_2, f_3 были линейно зависимы, т. е. чтобы существовало тождество вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0, \tag{11}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — числа, не все равные нулю. Мы получили, таким образом, в более общем виде, результаты § 146, касающиеся пучка плоскостей.

С полученным результатом уместно сопоставить следующее предложение: для того *чтобы три точки* $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $M'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, $M''(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы ранг таблицы*

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \end{matrix} \tag{12}$$

был меньше трех.

Действительно, для того чтобы названные точки были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали две различные плоскости, проходящие через все три точки. Коэфициенты a_1, a_2, a_3, a_4 уравнения любой плоскости, проходящей через наши точки, должны удовлетворять трем уравнениям:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= 0, \\ a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3 + a_4x'_4 &= 0, \\ a_1x''_1 + a_2x''_2 + a_3x''_3 + a_4x''_4 &= 0. \end{aligned}$$

Если ранг таблицы (12) равен трем, то предыдущая система имеет только одно линейно независимое решение [1]) и, следовательно, определяет только одну плоскость. Значит, ранг таблицы (12) должен быть меньше трех. Обратно, если ранг этой таблицы меньше трех, то система допускает по крайней мере два линейно независимых решения, и наши точки коллинеарны.

Найдем, наконец, *условие того, чтобы четыре плоскости*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0 \tag{13}$$

принадлежали одной связке, т. е. имели общую (собственную или несобственную) точку. Для того чтобы уравнения (13) имели решение, отличное от нуля, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэфициентов форм f_1, f_2, f_3, f_4

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 & a''_4 \\ a'''_1 & a'''_2 & a'''_3 & a'''_4 \end{vmatrix}, \tag{14}$$

[1]) См. Добавление, § 6.

был равен нулю. Это и есть необходимое и достаточное условие. Это условие эквивалентно следующему: *формы* f_1, f_2, f_3, f_4 *должны быть линейно зависимыми*, т. е. должно иметь место тождество (относительно переменных x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0, \tag{15}$$

где λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — некоторые числа, не все равные нулю. Мы получили, таким образом, в более общем виде, результат, указанный в § 146.

Отметим еще *условие компланарности четырех точек* $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $M'(x_1', x_2', x_3', x_4')$, $M''(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$, $M'''(x_1''', x_2''', x_3''', x_4''')$, заключающееся в равенстве

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

которое доказывается совершенно аналогично предыдущему.

169. Параметрическое представление прямой в пространстве. Пусть рассматриваемая прямая задана двумя своими различными точками M' и M''. Любая другая точка $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ прямой должна быть коллинеарна с M' и M'' и, следовательно, ранг таблицы (12) предыдущего параграфа должен быть меньше трех; но ранг таблицы, состоящей из двух последних строк, равен двум, так как точки M' и M'' — различные. Поэтому [1]) первая строка есть линейная комбинация остальных:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \lambda x_1' + \mu x_2'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'', \\ x_4 = \lambda x_4' + \mu x_4'', \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где λ и μ — числа, не равные одновременно нулю. Придавая параметрам λ, μ всевозможные значения (кроме значения $\lambda = \mu = 0$), получим все точки прямой. В дальнейшем можно сделать те же заключения, что в § 167. В частности, положение точки на прямой вполне определяется значением отношения

$$h = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Обратно, каждому значению h соответствует одна и только одна точка прямой.

170. Координаты прямой на плоскости. Взаимность между точками и прямыми. Введем некоторые новые понятия; начнем, для простоты, со случая двух измерений.

Как известно, положение точки на плоскости вполне определяется отношениями трех ее однородных координат x_1, x_2, x_3; положение же прямой вполне определяется отношениями трех коэфициентов a_1, a_2, a_3 уравнения этой прямой

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0. \tag{1}$$

[1]) См. Добавление, § 5, следствие.

Поэтому мы можем назвать величины a_1, a_2, a_3 *однородными координатами прямой*, ибо под координатами вообще мы понимаем величины, определяющие данный образ (в случае однородных координат значение имеют только их отношения). Так же, как мы говорим о точке $M(x_1, x_2, x_3)$, можем говорить и о прямой $\Delta(a_1, a_2, a_3)$.

Если в уравнении (1) считать x_1, x_2, x_3 *постоянными*, а a_1, a_2, a_3 — *переменными*, то уравнение это дает совокупность прямых, проходящих через точку (x_1, x_2, x_3), и, таким образом, определяет точку x_1, x_2, x_3 как центр пучка прямых. Поэтому *уравнение* (1), *при постоянных* x_1, x_2, x_3 называется *уравнением точки* в координатах прямой.

Вместо однородных координат прямой можно рассматривать и неоднородные. Перепишем сперва уравнение (1), вводя неоднородные координаты точки $\left(x = \frac{x_1}{x_3},\quad y = \frac{x_2}{x_3}\right)$:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0.$$

Разделим теперь обе части на a_3 (считая, что $a_3 \neq 0$) и положим

$$\frac{a_1}{a_3} = u,\quad \frac{a_2}{a_3} = v; \tag{2}$$

тогда будем иметь

$$ux + vy + 1 = 0. \tag{3}$$

Величины u и v называются *неоднородными координатами прямой*[1]). Неоднородные координаты неудобны тем, что не дают возможности изобразить *любую* прямую; а именно, если рассматривать только конечные значения u и v, уравнение (3) изображает прямые, не проходящие через начало координат.

Мы видим, что уравнение (1), или (3), выражающее, что точка $M(x_1, x_2, x_3)$ и прямая $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ совмещены [2]), совершенно симметрично относительно координат точки и прямой.

Следствием этой полной симметрии является то, что каждому предложению, вытекающему из уравнения (1) или (3), или из системы таких уравнений, соответствует „взаимное“ предложение, которое получается заменой слова „точка“ словом „прямая“, и наоборот. Это — так называемый *принцип взаимности* или *двойственности* для точек и прямых на плоскости.

Мы не будем заниматься здесь обоснованием этого принципа, играющего большую роль в проективной геометрии [3]), но в дальнейшем бу-

---

[1]) Координаты прямой как однородные, так и неоднородные называют также *плюккеровыми* координатами (по имени немецкого математика J. Plücker'a) или *тангенциальными* (касательными) координатами; происхождение этого последнего названия будет ясно из дальнейшего. (См. § 223 и след.)

[2]) Мы будем иногда применять этот термин, выражающий, что точка M находится на прямой Δ или что прямая Δ проходит через точку M; цель термина — ввести симметрию и в словесные выражения. Применяют с этою целью также термин „инцидентность“ (прямая и точка „инцидентны“, если точка находится на прямой).

[3]) Можно обосновать принцип взаимности и не пользуясь аппаратом аналитической геометрии. Такое обоснование заключается в анализе геометрических аксиом и выделении тех геометрических истин, которые основаны исключи-

дем иногда пользоваться свойством взаимности, как удобным средством классификации и сопоставления различных геометрических истин. Мы приводим ниже ряд примеров такого сопоставления; предварительно заметим следующее. Прямые и точки на плоскости можно рассматривать с двух различных точек зрения. При первом способе рассмотрения основным геометрическим элементом является точка, прямая же рассматривается как „носитель" точек, с ней совмещенных (на ней расположенных); точки, расположенные на прямой, образуют „прямолинейный ряд точек". При втором способе основным элементом является прямая, точка же рассматривается как носитель прямых, с ней совмещенных (через нее проходящих); прямые, проходящие через точку, образуют пучок. Следовательно, образом, взаимным с прямолинейным рядом точек, является пучок прямых. Прямой как носителю точек соответствует, во взаимном образе, точка (центр пучка) как носитель прямых. В соответствии со сказанным и плоскость рассматривается с двух точек зрения: плоскость как носитель точек и плоскость как носитель прямых.

Перейдем теперь к примерам взаимных свойств [1]).

1. Три числа x_1, x_2, x_3, не равных одновременно нулю, определяют точку на плоскости. Две точки (x_1, x_2, x_3) и (x'_1, x'_2, x'_3) совпадают тогда и только тогда, когда ранг таблицы

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{matrix}$$

равен единице.

2. Точки, координаты которых удовлетворяют линейному однородному уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (*)$$

(при постоянных a_1, a_2, a_3), образуют прямолинейный ряд точек, расположенных на прямой (a_1, a_2, a_3). Уравнение (*) называется уравнением этой прямой.

3. Две различные точки $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ и $M''(x''_1, x''_2, x''_3)$ определяют одну и только одну прямую, с ними совмещенную. Координаты точек, совмещенных с этой прямой, даются формулами

$$x_1 = \lambda x'_1 + \mu x''_1, \quad x_2 = \lambda x'_2 + \mu x''_2, \quad x_3 = \lambda x'_3 + \mu x''_3,$$

1а. Три числа a_1, a_2, a_3, не равных одновременно нулю, определяют прямую на плоскости. Две прямые (a_1, a_2, a_3) и (a'_1, a'_2, a'_3) совпадают тогда и только тогда, когда ранг таблицы

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{matrix}$$

равен единице.

2а. Прямые, координаты которых удовлетворяют линейному однородному уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (*)$$

(при постоянных x_1, x_2, x_3), образуют пучок с центром в точке (x_1, x_2, x_3). Уравнение (*) называется уравнением этой точки.

3а. Две различные прямые $\Delta'(a'_1, a'_2, a'_3)$ и $\Delta''(a''_1, a''_2, a''_3)$ определяют одну и только одну точку, с ними совмещенную. Координаты прямых, совмещенных с этой точкой, даются формулами [2])

$$a_1 = \lambda a'_1 + \mu a''_1, \quad a_2 = \lambda a'_2 + \mu a''_2, \quad a_3 = \lambda a'_3 + \mu a''_3,$$

тельно на таких аксиомах, в которых термины „точка" и „прямая" входят симметрично. Ясно, что для этих геометрических истин имеет место принцип взаимности.

[1]) Все приводимые свойства доказаны в предыдущих параграфах.

[2]) Это следует из сказанного в § 166 [см. формулы (10)].

причем на положение точки влияет только отношение $\frac{\lambda}{\mu}$; каждому значению этого отношения соответствует вполне определенное положение точки на прямой, и обратно.

4. Для того чтобы три точки $M(x_1, x_2, x_3)$, $M'(x_1', x_2', x_3')$, $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$ были совмещены с некоторой прямой, необходимо и достаточно условие

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Это же условие можно выразить так: линейные формы

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ \varphi_2 &= a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3', \\ \varphi_3 &= a_1x_1'' + a_2x_2'' + a_3x_3'', \end{aligned}$$

где a_1, a_2, a_3 *рассматриваются как переменные,* должны быть линейно зависимы.

причем на положение прямой влияет только отношение $\frac{\lambda}{\mu}$; каждому значению этого отношения соответствует вполне определенное положение прямой пучка, и обратно[1]).

4а. Для того чтобы три прямые $\Delta(a_1, a_2, a_3)$, $\Delta'(a_1', a_2', a_3')$, $\Delta''(a_1'', a_2'', a_3'')$ были совмещены с некоторой точкой, необходимо и достаточно условие

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ a_1'' & a_2'' & a_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Это же условие можно выразить так: линейные формы

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \\ f_2 &= a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3, \\ f_3 &= a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3, \end{aligned}$$

где x_1, x_2, x_3 *рассматриваются как переменные,* должны быть линейно зависимы.

Рекомендуем читателю составить самостоятельно аналогичные примеры.

171. Координаты плоскости в пространстве. Взаимность между точками и плоскостями. Рассмотрим теперь уравнение плоскости в пространстве

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0. \qquad (1)$$

Аналогично координатам прямой на плоскости величины a_1, a_2, a_3, a_4 называются *однородными координатами плоскости.* Если в (1) рассматривать x_1, x_2, x_3, x_4 как постоянные, а a_1, a_2, a_3, a_4 — как переменные, то уравнение это дает все плоскости, проходящие через данную точку x_1, x_2, x_3, x_4, т. е. связку плоскостей. При постоянных x_1, x_2, x_3, x_4 уравнение (1) называется *уравнением точки* в координатах плоскости.

И здесь можно ввести в рассмотрение неоднородные координаты[2]) u, v, w плоскости, переписав ее уравнение в виде

$$ux + vy + wz + 1 = 0; \qquad (2)$$

при этом (если ограничиться рассмотрением конечных значений u, v, w) приходится исключать плоскости, проходящие через начало координат.

---

[1]) Это последнее утверждение доказывается совершенно так же, как взаимное утверждение, помещевное слева и которое доказано в конце § 167.

[2]) Координаты плоскости (однородные и неоднородные) так же, как и координаты прямой, называют иногда *плюккеровыми* или *тангенциальными.*

Полная симметрия уравнения (1) или (2) и здесь приводит к принципу взаимности (см. предыдущий параграф), причем теперь взаимными элементами являются *точки* и *плоскости*. Прямая в пространстве не рассматривается обычно как самостоятельный элемент, а лишь как носитель прямолинейного ряда точек или как носитель плоскостей, через нее проходящих (как ось пучка плоскостей). В пространстве прямолинейному ряду точек соответствует пучок плоскостей. В первом образе прямая фигурирует как носитель точек, а во втором — как носитель плоскостей.

Читатель легко сам составит примеры взаимных предложений; в частности, все предложения и формулы, приведенные в § 168, попарно взаимны. Мы рекомендуем читателю еще раз просмотреть § 168 с этой точки зрения.

172. Основные геометрические образы проективной геометрии. В предыдущих параграфах мы установили взаимность между точками и прямыми на плоскости, между точками и плоскостями в пространстве. Аналогичную взаимность можно установить и между другими образами, например, между прямыми, принадлежащими связке, плоскостями, принадлежащими связке, точками на плоскости и прямыми на плоскости. Мы не будем здесь на этом подробно останавливаться, а отметим только, что в проективной геометрии (понятие о которой будет дано ниже) принята классификация основных геометрических образов на образы различных *ступеней*; к одной и той же ступени относят образы, между которыми можно установить взаимность (в указанном выше смысле). Проективная геометрия имеет дело с такими свойствами, для которых справедлив принцип взаимности. Поэтому предложения проективной геометрии, доказанные для данного образа, автоматически переносятся на другие образы той же ступени.

Вот эти *основные образы и их классификация*:

Основные элементы образов: *точки*, *прямые*, *плоскости*.

I. *Основные образы первой ступени.* 1°. Прямолинейный ряд точек (совокупность точек прямой). 2°. Пучок прямых (на плоскости). 3°. Пучок плоскостей.

II. *Основные образы второй ступени.* 1°. Плоская система точек (совокупность точек плоскости). 2°. Плоская система прямых (совокупность прямых на плоскости). 3°. Связка прямых. 4°. Связка плоскостей.

III. *Основные образы третьей ступени.* 1°. Пространственная система точек (совокупность точек пространства). 2°. Пространственная система плоскостей (совокупность плоскостей пространства).

173. Преобразование однородных декартовых координат. Начнем для простоты с координат точки *на плоскости*. Однородные координаты x_1, x_2, x_3 точки M связаны с неоднородными декартовыми координатами x, y той же точки соотношениями (мы имеем в виду пока собственные точки)

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{1}$$

При замене системы Oxy другой системой $O'x'y'$ новые и старые координаты (x', y') и (x, y) одной и той же точки связаны соотношениями вида

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + a, \\ y &= m_1x' + m_2y' + b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если через x'_1, x'_2, x'_3 обозначим однородные координаты собственной точки M, связанные с новой системой $O'x'y'$, то будем иметь

$$x' = \frac{x'_1}{x'_3}, \quad y' = \frac{x'_2}{x'_3},$$

и соотношения (2) примут вид

$$\frac{x_1}{x_3} = l_1\frac{x'_1}{x'_3} + l_2\frac{x'_2}{x'_3} + a, \quad \frac{x_2}{x_3} = m_1\frac{x'_1}{x'_3} + m_2\frac{x'_2}{x'_3} + b.$$

Но так как координаты x'_1, x'_2, x'_3 можно всегда умножить на одно и то же число, мы всегда можем считать, что $x'_3 = x_3$, и тогда предыдущие формулы примут более простой вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_1x'_1 + l_2x'_2 + ax'_3, \\ x_2 &= m_1x'_1 + m_2x'_2 + bx'_3, \\ x_3 &= x'_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Эти формулы остаются справедливыми и для несобственных точек, когда $x_3 = x'_3 = 0$. Действительно, в этом случае несобственная точка M удалена в бесконечность на плоскости Oxy в направлении вектора (x_1, x_2). Координаты этого вектора (x'_1, x'_2) в новой системе связаны с предыдущими координатами соотношениями

$$x_1 = l_1x'_1 + l_2x'_2, \quad x_2 = m_1x'_1 + m_2x'_2,$$

которые совпадают с соотношениями (3), если в этих последних положить $x_3 = x'_3 = 0$. Таким образом однородные координаты $(x_1, x_2, 0)$ и $(x'_1, x'_2, 0)$, связанные соотношениями (3), представляют одну и ту же несобственную точку.

В случае *пространства* формулы преобразования имеют, как мы знаем, в неоднородных координатах следующий вид

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + a, \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + b, \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + c. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Аналогично предыдущему получим следующие формулы для преобразования однородных координат точки в пространстве

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_1x'_1 + l_2x'_2 + l_3x'_3 + ax'_4, \\ x_2 &= m_1x'_1 + m_2x'_2 + m_3x'_3 + bx'_4, \\ x_3 &= n_1x'_1 + n_2x'_2 + n_3x'_3 + cx'_4, \\ x_4 &= x'_4. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Перейдем теперь к преобразованию однородных *координат прямой на плоскости*. Пусть

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{6}$$

уравнение прямой в старых однородных координатах точки. Подставляя на место x_1, x_2, x_3 их выражения (3), получим уравнение той же прямой в новой системе:

$$a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + a'_3x'_3 = 0, \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= l_1a_1 + m_1a_2, \\ a'_2 &= l_2a_1 + m_2a_2, \\ a'_3 &= aa_1 + ba_2 + a_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Величины a'_1, a'_2, a'_3 (или всякие пропорциональные им три величины) представляют однородные координаты нашей прямой относительно новой системы. Поэтому формулы (8) представляют собою формулы преобразования координат прямой на плоскости.

Мы видим, что формулы эти, так же как и в случае координат точки, линейны и однородны.

Аналогичные формулы получим для преобразования координат плоскости в пространстве.

Замечание. Для *преобразования однородных координат точки на прямой* служат, очевидно, формулы вида

$$x_1 = lx'_1 + ax'_2, \quad x_2 = x'_2. \tag{9}$$

174. Уравнения алгебраических кривых и поверхностей в однородных координатах. Некоторые общие предложения. Заметим прежде всего, что все сказанное об однородных координатах и несобственных элементах распространяется, конечно, и на случай мнимых точек, прямых и плоскостей. Мы будем говорить, что однородные координаты x_1, x_2, x_3 на плоскости определяют мнимую точку с неоднородными координатами $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$, если величины x_1, x_2, x_3 — комплексные, причем их нельзя сделать одновременно действительными умножением на общий множитель (в противном случае точка будет действительной). Совершенно аналогично определяются однородные координаты мнимых точек в пространстве, а также координаты прямых и плоскостей.

В предыдущих параграфах мы представили уравнения прямых и плоскостей в однородных координатах. Таким же образом можно поступать в случае любой алгебраической кривой или поверхности. Начнем с уравнения кривой на плоскости. Пусть

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

есть уравнение кривой n-го порядка на плоскости, где $F(x, y)$ — полином n-й степени. Вводя в него вместо x и y их выражения через однородные координаты

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

получим уравнение

$$F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0. \tag{2}$$

Переменная x_3 будет фигурировать в знаменателях различных членов, происходящих от членов полинома $F(x, y)$. Например, член вида

$$Ax^p y^q$$

даст член

$$\frac{Ax_1^p x_2^q}{x_3^{p+q}}.$$

Так как в полиноме $F(x, y)$ есть по крайней мере один член n-й степени, т. е. член вида $Ax^l y^m$, где $l+m=n$, то этот последний даст член вида

$$\frac{Ax_1^l x_2^m}{x_3^n};$$

выше чем в n-й степени x_3 нигде в знаменателях фигурировать не будет. Умножая обе части (2) на x_3^n, получим, очевидно, уравнение вида

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{3}$$

где

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_3^n F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \tag{4}$$

— однородный полином (форма) n-го порядка относительно x_1, x_2, x_3, т. е. сумма членов вида $Ax_1^p x_2^q x_3^r$, где $p+q+r=n$ во всех членах[1]). Легко видеть, что полином Φ можно составить по следующему правилу: в каждом члене $Ax^p y^q$ полинома $F(x, y)$ переменные x, y заменяются на x_1, x_2 и, кроме того, этот член умножается на такую степень x_3, чтобы получить член n-го порядка.

В свою очередь полином $F(x, y)$ получим, полагая $x_3=1$ в $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ и заменяя x_1, x_2 соответственно на x, y, т. е.

$$F(x, y) = \Phi(x, y, 1). \tag{5}$$

Например, уравнение $x^2+y^2-2x+1=0$ в однородных координатах представится в виде $x_1^2+x_2^2-2x_1x_3+x_3^2=0$. Полагая в этом последнем $x_3=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, вернемся к первоначальному уравнению.

Заметим, что если мы имеем произвольно заданный однородный полином $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ порядка n, то, полагая в нем $x_3=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, можно получить полином $F(x, y)$ степени низшей, чем n; это, очевидно, будет иметь место в том только случае, когда x_3 входит множителем во все члены полинома Φ. В нашем случае этого быть не может, ибо в полиноме Φ есть по крайней мере один член, не содержащий x_3 (этим свойством обладают все члены, происходящие от членов степени n полинома F).

---

[1]) Действительно, если умножим $\frac{Ax_1^p x_2^q}{x_3^{p+q}}$ на x_3^n, получим $Ax_1^p x_2^q x_3^{n-p-q} = Ax_1^p x_2^q x_3^r$, где $r=n-p-q$, т. е. $p+q+r=n$.

Вернемся к уравнению (3), которое получено из (2) умножением на x_3^n. Эта операция вполне законна, покуда мы ограничиваемся собственными точками, ибо в этом случае $x_3 \neq 0$.

Относительно же несобственных точек мы *условимся* считать их принадлежащими данной кривой в том и только в том случае, когда их однородные координаты удовлетворяют уравнению линии, уже приведенному к целому однородному виду (3).

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о приводимости и неприводимости алгебраических линий, вскользь затронутый в § 86.

Приводимым полиномом мы будем называть такой полином, который может быть разложен на множители, представляющие собою также полиномы, отличные от постоянных [1]).

Легко видеть, что если полином $F(x, y)$ приводим, то приводим и соответствующий однородный полином $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, и обратно. Действительно, из тождества

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y), \tag{6}$$

где F_1 и F_2 — полиномы степеней n_1 и n_2 (причем $n_1 + n_2 = n$), следует, очевидно, тождество

$$F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = F_1\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \cdot F_2\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

Умножая обе части на $x_3^n = x_3^{n_1} \cdot x_3^{n_2}$ и полагая

$$x_3^n F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \Phi(x_1, x_2, x_3), \quad x_3^{n_1} F_1\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) =$$
$$= \Phi_1(x_1, x_2, x_3), \quad x_3^{n_2} F_2\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \Phi_2(x_1, x_2, x_3),$$

получаем тождество

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi_1(x_1, x_2, x_3) \cdot \Phi_2(x_1, x_2, x_3), \tag{6a}$$

где Φ_1 и Φ_2 — однородные полиномы степеней n_1 и n_2. Обратно, если имеем разложение вида (6а), то, полагая в нем $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ и вводя обозначения $\Phi_1(x, y, 1) = F_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y, 1) = F_2(x, y)$, получим разложение вида (6), где F_1 и F_2 — полиномы степеней n_1 и n_2 [2]).

На основании сказанного, при рассмотрении вопросов приводимости достаточно оперировать с уравнением в однородных координатах.

В алгебре [3]) доказывается следующее предложение: если полином $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ приводим, то его можно, единственным образом, разложить на неприводимые множители, т. е. представить в виде

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1^{\alpha_1} \cdot \varphi_2^{\alpha_2} \dots \varphi_k^{\alpha_k}, \tag{7}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1, 2, \dots, k)$ — различные [4]) однородные

[1]) Постоянную можно считать частным случаем полинома (полином нулевой степени); но здесь мы это исключаем.

[2]) Степени не могут понизиться, так как тогда их сумма сделалась бы меньше n.

[3]) См., например, М. Бохер, Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1934 г.

[4]) Различными мы считаем полиномы, различающиеся не только постоянным множителем. Например полиномы $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ и $3(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$ мы не считаем здесь различными.

неприводимые полиномы, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — целые положительные числа. Полиномы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ суть неприводимые множители, входящие в Φ; говорят, что φ_1 входит множителем α_1 раз (или α_1-кратно), φ_2 входит α_2 раз и т. д.

Говоря, что разложение (7) возможно только одним способом, мы подразумеваем, что все другие разложения полинома Φ на неприводимые множители совпадают с предыдущим, если не считать того, что вместо $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ можно взять $A_1\varphi_1, \ldots, A_k\varphi_k$, где $A_1, \ldots, A_k$ — постоянные (такие, что $A_1^{\alpha_1} \ldots A_k^{\alpha_k} = 1$).

Если n — порядок полинома Φ, а $n_1, \ldots, n_k$ — порядки полиномов $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, то, очевидно, $n = \alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_k n_k$.

В алгебре доказывается еще следующее предложение: если два уравнения

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ и } \Psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

эквивалентны [т. е. удовлетворяются одинаковыми значениями [1]) переменных], то неприводимые множители, входящие в Φ и Ψ, — одни и те же (но могут, конечно, входить различное число раз в Φ и Ψ). В частности, если полином Ψ неприводим, то он содержится множителем в Φ; если же Φ и Ψ — оба неприводимы, то они могут отличаться только постоянным множителем.

(Предыдущие алгебраические предложения справедливы для любого числа переменных.)

Вернемся теперь к вопросу о порядке алгебраической линии (см. § 85). Пусть алгебраическая линия задана уравнением (3) в однородных координатах

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где Φ — однородный полином n-го порядка. Если полином Φ неприводим, то и линия (3) называется неприводимой или нераспадающейся. Если же полином Φ приводим, то его можно представить в виде (7) и уравнение линии принимает вид:

$$\varphi_1^{\alpha_1} \cdot \varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_k^{\alpha_k} = 0, \tag{8}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — неприводимые однородные полиномы. Это последнее уравнение, очевидно, эквивалентно следующему:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \ldots \varphi_k = 0, \tag{9}$$

и данная линия распадается на k неприводимых линий

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_k = 0. \tag{10}$$

Если не все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ равны единице, то степень уравнения (9), очевидно, ниже степени уравнения (8); легко также видеть, что уравнение (9) нельзя заменить эквивалентным уравнением $\Psi = 0$ еще более низкой степени, ибо, на основании сказанного выше, полином Ψ должен содержать те же неприводимые множители $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$.

---

[1]) Имеются в виду как действительные, так и мнимые значения.

Естественно поэтому порядком данной линии называть не n, а порядок полинома левой части (9).

Однако в большинстве случаев, когда имеют дело с уравнением вида (3), целесообразнее под порядком линии понимать именно n, т. е. считать порядок по уравнению в том виде, как оно дано; при этом говорят, что данная линия состоит из неприводимых частей $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ..., $\varphi_k = 0$, которые входят в нее соответственно α_1 раз (α_1-кратно), α_2 раз и т. д.

Например, линия, заданная уравнением

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = 0, \tag{11}$$

состоит из тех же точек, что и прямая $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Однако часто предпочитают говорить, что линия (11) есть линия второго порядка, представляющая собою двойную (двукратную) прямую или „две совпадающие прямые". На первый взгляд это может показаться бесполезным усложнением. Но при ближайшем рассмотрении оказывается, что такой способ выражения чрезвычайно целесообразен. Дело по существу заключается в следующем. Имеется ряд общих предложений и формул, которые относятся ко *всем* линиям, представляемым уравнением второго порядка, независимо от частных значений, которые могут иметь коэфициенты этого уравнения. Эти предложения остаются в силе, в частности, и тогда, когда коэфициенты уравнения таковы, что полином $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2$, т. е. когда данная линия приводится к совокупности двух совпадающих прямых. Если бы мы с самого начала устранили из рассмотрения эти частные случаи, то при формулировке упомянутых общих предложений были бы вынуждены каждый раз делать ряд оговорок, усложняющих и загромождающих изложение и лишающих предложения их общности.

Аналогичные замечания относятся и к общему случаю. А именно, когда мы изучаем *одну определенную* кривую, представленную уравнением (3), то естественно заменить это уравнение уравнением низшей степени (9), которое представляет ту же кривую, что и данное (т. е. состоит из тех же точек), и под порядком кривой понимать степень левой части последнего уравнения.

Но если мы изучаем линии n-го порядка *вообще* и если среди них оказалась приводимая линия, представляемая уравнением (8), где некоторые из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ больше единицы, то нецелесообразно заменять это уравнение уравнением низшей степени (9) и приписывать линии порядок низший, чем n.

В дальнейшем, когда мы будем иметь дело с уравнением вида (3), где Φ — полином n-й степени, мы будем приписывать соответствующей линии порядок n, независимо от того, можно или нет привести данное уравнение к уравнению низшей степени.

Обратим внимание еще на следующее обстоятельство. Как уже было отмечено, в полиноме $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, полученном из $F(x, y)$ указанным выше путем, не все члены содержат множителем x_3. Благодаря этому, полагая $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, мы получаем из полинома $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ степени n полином $F(x, y)$ также степени n. Но во многих вопросах уравнение кривой задается непосредственно в однородных координатах

в виде (3), причем может оказаться, что x_3 входит множителем во все члены, так что уравнение линии имеет вид

$$x_3^{\alpha}\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где Φ_1 — однородный полином степени $n-\alpha$, не все члены которого содержат множителем x_3.

Если положить в этом полиноме $x_3 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, мы получим уравненне степени $n-\alpha$:

$$\Phi_1(x, y, 1) = 0.$$

В этом случае говорят, что данная линия распадается на две: на несобственную прямую $x_3 = 0$, входящую α-кратно, и на линию порядка $(n-\alpha)$, даваемую предыдущим уравнением.

Все сказанное выше о приводимости и неприводимости алгебраических линий может быть перенесено, с очевидными изменениями, на случай алгебраических *поверхностей*. Разница будет только та, что вместо однородного полинома трех переменных мы будем иметь дело с однородным полиномом

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

четырех переменных и вместо уравнения (3) — с уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \tag{12}$$

Введенные выше обобщенные понятия позволяют установить с полною общностью предложения, высказанные нами раньше о пересечении алгебраических линий с прямыми и алгебраических поверхностей с прямыми и плоскостями (§ 100 и 140).

Начнем с последнего. Легко видеть, что пересечение поверхности n-го порядка с плоскостью есть всегда линия n-го порядка, если только плоскость не является частью данной поверхности. Действительно, пусть сперва рассматриваемая плоскость — собственная. Приняв ее за плоскость Oxy, мы найдем искомую линию пересечения, положив в (12) $x_3 = 0$, что даст уравнение $\Phi(x_1, x_2, 0, x_4) = 0$ или, вводя обозначение $\Phi(x_1, x_2, 0, x_4) = \Psi(x_1, x_2, x_4)$,

$$\Psi(x_1, x_2, x_4) = 0,$$

которое есть однородное уравнение n-го порядка, если только не обращается в тождество [1]).

Таким образом мы имеем линию n-го порядка на плоскости Oxy (причем роль однородной координаты x_3 исполняет теперь координата x_4).

Может случиться, что x_4 входит множителем во все члены однородного полинома $\Psi(x_1, x_2, x_4)$. Тогда уравнение примет вид

$$x_4^{\alpha}\Psi_1(x_1, x_2, x_4) = 0,$$

---

[1]) В этом случае плоскость Oxy есть составная часть рассматриваемой поверхности.

т. е. линия пересечения распадается на две: несобственную прямую $x_4 = 0$, входящую α-кратно, и на линию порядка $n - \alpha$:

$$\Psi_1(x_1, x_2, x_4) = 0.$$

Если бы мы с самого начала оперировали с неоднородными координатами, то получили бы для линии пересечения уравнение порядка $n - \alpha$:

$$\Psi_1(x, y, 1) = 0.$$

Теперь мы видим чем объяснить, что иногда линия пересечения может оказаться порядка меньшего n, если не пользоваться однородными координатами: в этом случае не учитывается несобственная прямая, входящая в линию, как α-кратная часть.

Точки пересечения поверхности (12) с несобственной плоскостью даются уравнениями

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad x_4 = 0.$$

Первое из этих уравнений может обратиться в тождество. Это будет означать, что несобственная плоскость является составной частью поверхности. Если же этого не будет и первое уравнение будет порядка n, то мы условимся говорить, что предыдущие уравнения определяют несобственную линию n-го порядка.

Перейдем теперь к вопросу о пересечении данной алгебраической линии n-го порядка (на плоскости) с прямою. Пусть (3) — уравнение данной линии. Поставленный вопрос можно решить совершенно аналогично предыдущему, взяв данную прямую в случае, когда она собственная, за ось Oy и исследуя отдельно случай, когда данная прямая — несобственная. Предоставляя читателю рассмотреть вопрос указанным способом, мы укажем другой метод, имеющий то преимущество, что он применяется и к вопросу о пересечении поверхности с прямою.

Возьмем на данной прямой две какие-либо различные точки

$$M'(x_1', x_2', x_3') \text{ и } M''(x_1'', x_2'', x_3'').$$

Тогда координаты точек этой прямой даются формулами (§ 167):

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3''; \tag{13}$$

каждой точке прямой соответствует определенное отношение $\frac{\lambda}{\mu}$, и обратно. Внеся выражения (13) в (3), получим уравнение, которому должны удовлетворять значения λ, μ, соответствующие точкам пересечения. Так как $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — однородный полином n-й степени, то упомянутое уравнение будет, очевидно, иметь следующий вид

$$A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1}\mu + \ldots + A_{n-1}\lambda\mu^{n-1} + A_n\mu^n = 0, \tag{14}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ — постоянные.

Может случиться, что все коэфициенты этого уравнения равны нулю, т. е. $A_0 = A_1 = \ldots = A_n = 0$. Тогда оно удовлетворяется при всех значениях λ и μ. В этом случае данная прямая целиком принадлежит линии, т. е. является ее составной частью. Мы знаем, что в этом случае данная линия — распадающаяся.

Если не все коэфициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$ равны нулю, то, разделив обе части уравнения (14) на μ^n, получим уравнение n-й степени для отношения $h = \frac{\lambda}{\mu}$:

$$A_0 h^n + A_1 h^{n-1} + \ldots + A_{n-1} h + A_n = 0, \qquad (14a)$$

имеющее ровно n корней. Корни эти могут быть действительными, мнимыми, различными или совпадающими. Уравнение (14a) может иметь также бесконечный корень, простой или кратный; а именно, оно будет иметь α-кратный корень $h = \infty$, если $A_0 = A_1 = \ldots = A_{\alpha-1} = 0$, $A_\alpha \neq 0$ (см. § 164). Каждому корню h соответствует вполне определенная точка пересечения. Если h есть корень кратности α, то говорят, что этому корню соответствует α „совпадающих" точек пересечения, или что пересечение α-кратное. В частности, если имеется α-кратный корень $h = \infty$, это значит, что точка $M'(x_1', x_2', x_3')$ является α-кратной точкой пересечения (при $h = \infty$ имеем $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$, а этим значениям соответствует точка M').

Итак, алгебраическая линия n-го порядка на плоскости пересекается с любой прямой ровно в n точках; исключение может представить только тот случай, когда данная линия — распадающаяся и данная прямая является ее составною частью.

Совершенно аналогичным образом доказывается, что алгебраическая поверхность n-го порядка пересекается с прямой ровно в n точках; исключение может представить только тот случай, когда прямая целиком принадлежит поверхности [1]).

175. Циклические точки и сферическая окружность. Рассмотрим несколько применений введенных выше обобщенных понятий. Начнем с вопроса о пересечении данной окружности с несобственной прямой.

Будем считать координаты прямоугольными. Мы знаем, что уравнение окружности с центром в (a, b) и радиусом r имеет в этом случае вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

или

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0, \qquad (1)$$

где

$$A = -a, \quad B = -b, \quad C = a^2 + b^2 - r^2.$$

В однородных координатах это уравнение представится так:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2Ax_1x_3 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2 = 0.$$

Точки пересечения этой окружности с несобственной прямой даются уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

[1]) Поверхность может содержать целиком прямую (и даже бесчисленное множество прямых), не будучи распадающейся; вспомним, например, конус или цилиндр.

что дает два решения

$$\frac{x_2}{x_1} = +i, \quad x_3 = 0 \text{ и } \frac{x_2}{x_1} = -i, \quad x_3 = 0.$$

Так как нас интересуют не сами x_1, x_2, x_3, а их отношения, то мы можем взять $x_1 = 1$; тогда будет $x_2 = \pm i$, и искомые точки пересечения будут

$$J_1 = (1, i, 0), \quad J_2 = (1, -i, 0). \tag{2}$$

Мы видим, что всякая окружность плоскости Oxy проходит через эти две точки, одновременно мнимые и несобственные. Поэтому точки эти называются *круговыми* или *циклическими*. Они представляют собою, как легко видеть, несобственные точки изотропных прямых, т. е. прямых

$$y = ix + b \quad \text{и} \quad y = -ix + b,$$

имеющих угловые коэфициенты $+i$ и $-i$ (§ 162).

Теперь нам становится понятным, почему две окружности на плоскости могут пересекаться только в двух (действительных) точках, хотя две линии второго порядка пересекаются, вообще говоря, в четырех точках. Мы видим, действительно, что всякие две окружности имеют общими обе циклические точки и, значит, могут иметь еще только две другие общие точки.

Решим теперь задачу о пересечении двух окружностей, уравнения которых напишем в однородных координатах:

$$\left.\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + 2A_1x_1x_3 + 2B_1x_2x_3 + C_1x_3^2 = 0 \\ \text{и} \quad &x_1^2 + x_2^2 + 2A_2x_1x_3 + 2B_2x_2x_3 + C_2x_3^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Для этого следует решить систему предыдущих уравнений. Вычитая, получим

$$x_3\{2(A_1 - A_2)x_1 + 2(B_1 - B_2)x_2 + (C_1 - C_2)x_3\} = 0,$$

откуда видим, что искомые точки пересечения должны находиться на одной из двух прямых

$$x_3 = 0$$

и

$$2(A_1 - A_2)x_1 + 2(B_1 - B_2)x_2 + (C_1 - C_2)x_3 = 0. \tag{4}$$

Точки пересечения, принадлежащие первой из этих прямых, суть, как мы уже видели, две циклические точки J_1 и J_2. Исключая эти точки, т. е. считая $x_3 \neq 0$, можно переписать уравнение (4) в обычном виде

$$2(A_1 - A_2)x + 2(B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0. \tag{4a}$$

Это есть уравнение радикальной оси наших двух окружностей (§ 100, упражнение 3). Точки пересечения этой прямой с любой из двух данных окружностей дадут нам две другие искомые точки пересечения.

Эти две точки могут быть действительными и различными, мнимыми, а также действительными и совпадающими (когда окружности касаются друг друга).

Рассмотрим, наконец, вопрос о пересечении сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

или

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$$

с несобственной плоскостью $x_4=0$.

Написав уравнение сферы в однородных координатах и положив $x_4=0$, увидим, что искомое геометрическое место характеризуется уравнениями

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \quad x_4=0. \tag{5}$$

Совокупность этих уравнений представляет собою несобственную мнимую линию, которая называется *сферической окружностью*. Мы видим, что всякая сфера проходит через эту линию.

Легко видеть, что точки пересечения сферической окружности с любой собственной плоскостью суть циклические точки этой плоскости.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что подобное преобразование на плоскости не перемещает циклических точек или только переставляет их друг с другом.

Доказательство. Однородные координаты (x_1', x_2', x_3') циклических точек, до преобразования, определяются уравнениями (мы считаем координаты прямоугольными)

$$x_1'^2+x_2'^2=0, \quad x_3'=0.$$

При гомотетическом преобразовании плоскости имеем в однородных координатах

$$x_1-ax_3=k(x_1'-ax_3'), \quad x_2-bx_3=k(x_2'-bx_3'),$$
$$x_3=x_3'.$$

Для точек несобственной прямой $(x_3=0, x_3'=0)$ это дает

$$x_1=kx_1', \quad x_2=kx_2',$$

откуда

$$x_1^2+x_2^2=k^2(x_1'^2+x_2'^2), \quad x_3=x_3'=0.$$

Значит, если $x_1'^2+x_2'^2=0$, то и $x_1^2+x_2^2=0$, а отсюда и следует наше утверждение в случае гомотетического преобразования.

При движении

$$x_1=x_1'\cos\varphi \mp x_2'\sin\varphi+ax_3',$$
$$x_2=x_1'\sin\varphi \pm x_2'\cos\varphi+bx_3'$$

также имеем при $x_3=x_3'=0$

$$x_1^2+x_2^2=x_1'^2+x_2'^2,$$

а отсюда и следует наше утверждение в случае движения.

Так как подобное преобразование состоит из гомотетического преобразования, сопровождаемого движением, то наше предложение доказано.

2. Доказать, что при подобном преобразовании пространства, сферическая окружность (мы считаем координаты прямоугольными)

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=0,$$
$$x_4'=0,$$

переходит сама в себя.

Доказательство совершенно аналогично доказательству в предыдущем упражнении.

3. Нетрудно доказать, что и обратно: всякое аффинное преобразование, сохраняющее сферическую окружность (или циклические точки, в случае двух измерений), есть подобное преобразование.

III. ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

176. Предварительные замечания. Целесообразность применения обобщенных декартовых координат для изучения аффинных свойств фигур заключается в том, что положение точки в этих координатах определяется при помощи таких величин и таких свойств, которые остаются инвариантными (неизменными) при аффинных преобразованиях (параллельность между прямыми, отношение параллельных векторов).

Нам предстоит в дальнейшем познакомиться с так называемыми проективными преобразованиями (являющимися обобщением аффинных), при которых прямые остаются прямыми, как и при аффинных, но параллельность между прямыми уже нарушается, а также изменяется отношение параллельных отрезков.

Для изучения свойств, остающихся неизменными при таких преобразованиях, целесообразно ввести координаты более общего типа, чем декартовы, определение которых было бы также основано на свойствах, остающихся неизменными при проективных преобразованиях. Основной величиной, остающейся неизменной при проективных преобразованиях, является так называемое *двойное* (или *ангармоническое*) *отношение* четырех элементов основных образов первой ступени (§ 172), к определению которого мы и переходим, пока в применении к точкам на прямой (т. е. к элементам прямолинейного ряда).

В начале этого отдела (до § 187) мы будем иметь в виду только действительные элементы, хотя большая часть сказанного может быть непосредственно обобщена и на мнимые элементы.

177. Двойное отношение четырех точек. Начнем с определения *простого отношения трех точек*, с которым мы уже, в сущности, встречались раньше (§ 41). Пусть M_1, M_2, M — точки прямой Δ. Приписав этой прямой какое-либо положительное направление (безразлично какое), составим отношение алгебраических значений отрезков M_1M и MM_2:

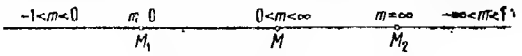
$$m = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

Это отношение имеет определенный знак, не зависимый от того, какое направление на Δ выбрано в качестве положительного (ибо при изменении направления на обратное и числитель и знаменатель изменяют знак на обратный). А именно $m > 0$, когда M находится между M_1, M_2, и $m < 0$, когда M находится вне отрезка M_1M_2. С таким отношением мы уже имели дело в § 41 („отношение, в котором точка M делит отрезок M_1M_2“). Теперь мы назовем его *простым отношением*

трех точек M_1, M_2, M (рассматриваемых в указанном порядке) и будем обозначать через (M_1, M_2, M), так что

$$m = (M_1, M_2, M) = \frac{M_1M}{MM_2}. \tag{1}$$

Непосредственно очевидно, что если точки M_1 и M_2 остаются неподвижными, а M пробегает прямую Δ, то m изменяется следующим образом (черт. 113): когда M пробегает отрезок M_1M_2, m изменяется от 0 до $+\infty$; когда M переходит через M_2, m из $+\infty$ обращается в $-\infty$ и затем непрерывно возрастает, стремясь к -1, когда M удаляется в бесконечность. Наконец, когда точка M движется от M_1 в противоположную сторону, m убывает от нуля до -1; таким образом несобственной точке прямой Δ соответствует значение $m = -1$. Вообще каждому значению m соответствует одно положение точки m, и обратно. В частности, при $m = \pm\infty$ имеем также только одну точку M_2; поэтому нет надобности различать значений $m = +\infty$ и $m = -\infty$.



Черт. 113.

Если взять на Δ определенную систему декартовых координат, то положение любой точки на ней определяется абсциссой x; если x_1, x_2, x суть абсциссы точек M_1, M_2, M, то, очевидно,

$$m = (M_1, M_2, M) = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \tag{2}$$

Последнюю величину называют также простым отношением трех чисел и обозначают через (x_1, x_2, x), так что

$$(x_1, x_2, x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x}. \tag{2a}$$

Эта формула еще раз показывает, что каждому положению точки M, т. е. каждому значению x, соответствует одно значение m, и обратно.

Перейдем теперь к определению *двойного* (или *ангармонического*) отношения четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4. Так называется величина, которую получим следующим образом: составим сперва простое отношение двух первых точек и третьей (M_1, M_2, M_3); затем составим простое отношение опять двух первых точек и четвертой (M_1, M_2, M_4) и, наконец, разделим первое на второе. Двойное отношение λ четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 мы будем обозначать символом (M_1, M_2, M_3, M_4). Таким образом согласно определению

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{(M_1, M_2, M_3)}{(M_1, M_2, M_4)}, \tag{3}$$

или

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{M_1M_3}{M_3M_2} : \frac{M_1M_4}{M_4M_2}, \tag{4}$$

или еще

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{M_1M_3}{M_3M_2} \cdot \frac{M_4M_2}{M_1M_4}. \tag{4a}$$

Легко выяснить, какой знак имеет величина λ. Числитель и знаменатель в (3) одновременно положительны или отрицательны, когда точки M_3 и M_4 находятся одновременно внутри или вне отрезка M_1M_2. Если же одна из двух точек M_3, M_4 находится внутри отрезка M_1M_2, а другая вне, то числитель и знаменатель в (3) — различных знаков. Последний случай можно характеризовать, говоря, что *пары точек* (M_1, M_2) и (M_3, M_4) *разделяют друг друга* (т. е. между двумя точками любой из двух пар имеется точка другой). Итак, мы можем сказать: $\lambda > 0$, если пары (M_1, M_2) и (M_3, M_4) не разделяют друг друга; $\lambda < 0$, если эти пары разделяют друг друга.

До сих пор мы подразумевали, что точки M_1, M_2, M_3, M_4 — различны; но в дальнейшем мы будем допускать и случаи, когда две из этих точек совпадают; при этом для λ может получиться и значение ∞, как, например, в случае, когда M_4 совпадает с M_1. Это надо понимать в том смысле, что если точка M_4 стремится совпасть с M_1, то λ стремится к бесконечности (мы и здесь не различаем $+\infty$ и $-\infty$).

Посмотрим теперь, как изменяется λ, когда точки M_1, M_2, M_3 остаются неподвижными, а M_4 пробегает прямую Δ; мы считаем точки M_1, M_2, M_3 — различными. Обозначая временно M_4 через M, будем иметь на основании (4a)

$$\lambda = k \cdot \frac{MM_2}{M_1M} \quad \left(\text{где } k = \frac{M_1M_3}{M_3M_2}\right), \tag{4b}$$

откуда следует [1]), что λ пробегает все действительные значения, включая $\lambda = \infty$, когда M пробегает Δ, и что каждому значению λ соответствует одно и только одно положение M.

В частности, когда M совпадает с точками M_1, M_2, M_3, величина λ принимает следующие значения: ∞, 0, 1; это надо хорошо запомнить.

Вводя абсциссы точек на прямой Δ и обозначая через x_1, x_2, x_3, x_4 абсциссы точек M_1, M_2, M_3, M_4, будем, очевидно, иметь

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}; \tag{5}$$

последнюю величину называют также *двойным отношением четырех чисел* x_1, x_2, x_3, x_4 и обозначают символом (x_1, x_2, x_3, x_4), так что, по определению,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4}. \tag{6}$$

---

[1]) Формула (4b) дает

$$\lambda = \frac{k}{m}, \quad \text{где } m = \frac{M_1M}{MM_2};$$

отсюда и следует утверждение текста.

Этот символ применяют и к случаю, когда одно из чисел x_1, x_2, x_3, x_4 — бесконечность. Например, если $x_1 = \infty$, будем иметь [1])

$$(\infty, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}. \tag{7}$$

Отметим равенства, которые нам будут часто встречаться (их получим, полагая $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, или $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = k$):

$$(\infty, 0, \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (\infty, 0, 1, k) = k. \tag{8}$$

Двойное отношение четырех данных точек зависит, конечно, от порядка, в котором они рассматриваются. Переставляя в символе (M_1, M_2, M_3, M_4) всевозможным образом элементы M_1, M_2, M_3, M_4, мы будем получать различные значения. Так как существуют $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ перестановки четырех элементов, то на первый взгляд может показаться, что получатся 24 различных значения.

На самом же деле может получиться всего 6 различных значений; это вытекает из следующего простого предложения: *двойное отношение не изменяется, если поменять местами два какие-либо элемента и одновременно два другие.* Например:

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M_3, M_4, M_1, M_2).$$

Это предложение читатель легко докажет непосредственной проверкой при помощи формулы (4а).

Поэтому, чтобы получить все возможные значения, которые принимает символ (M_1, M_2, M_3, M_4) при перестановке элементов, достаточно переставлять, например, элементы, M_2, M_3, M_4, оставляя на месте M_1; действительно, если мы имеем какую-либо перестановку, то всегда можно, не изменяя значения символа, поставить M_1 на первое место, поменяв его местом с элементом, стоящим на этом месте, и поменяв одновременно местами два другие элемента. Поэтому наш символ может иметь только $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ различных значений. Легко показать (см. ниже, упражнения), что если

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \lambda,$$

то, переставляя всевозможным образом элементы, мы будем получать следующие 6 значений:

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

[1]) На основании (6) имеем

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}.$$

Переходя к пределу при $x_1 \to \infty$, получим формулу текста, ибо, очевидно,

$$\lim_{x_1 \to \infty} \frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_1} = 1.$$

В частности, из (4) непосредственно вытекает, что *если поменять местами два первых или два последних элемента, то значение двойного отношения изменится на обратное*, т. е.

$$(M_2, M_1, M_3, M_4) = (M_1, M_2, M_4, M_3) = \frac{1}{\lambda}.$$

Упражнения и дополнения

1. Доказать тождество

$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_1)(x_3 - x_4) = (x_2 - x_3)(x_1 - x_4).$$

Доказательство получается непосредственной проверкой. Еще проще получить указанный результат так: имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ибо в определителе первая строка пропорциональна третьей. Вычитая вторую строку из первой, получим

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_1 - x_3 & x_1 - x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, получим требуемое тождество.

2. Пользуясь предыдущим тождеством, доказать, что если в символе (M_1, M_2, M_3, M_4) переставить два средних элемента, то получим значение, дополняющее предыдущее до 1, т. е.

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) + (M_1, M_3, M_2, M_4) = 1.$$

Доказательство непосредственно вытекает из формул

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}, \quad (x_1, x_3, x_2, x_4) = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

3. Применяя предыдущие результаты, доказать, что если

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \lambda,$$

то

$$(M_1, M_2, M_4, M_3) = \frac{1}{\lambda}, \quad (M_1, M_3, M_2, M_4) = 1 - \lambda, \quad (M_1, M_3, M_4, M_2) = \frac{1}{1 - \lambda},$$

$$(M_1, M_4, M_2, M_3) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad (M_1, M_4, M_3, M_2) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Так как мы произвели все возможные перестановки трех последних элементов, то этим исчерпываются все возможные значения для двойного отношения четырех данных точек, в зависимости от порядка рассмотрения этих точек.

4. Если обозначить через λ^* одну из величин (см. предыдущее упражнение)

$$\lambda, \ \frac{1}{\lambda}, \ 1 - \lambda, \ \frac{1}{1 - \lambda}, \ \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \ \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \tag{A}$$

то величины

$$\lambda^*, \ \frac{1}{\lambda^*}, \ \frac{1}{1 - \lambda^*}, \ \frac{\lambda^* - 1}{\lambda^*}, \ \frac{\lambda^*}{\lambda^* - 1} \tag{A*}$$

суть те же величины (*A*), только в ином порядке. Действительно, $\lambda^* = (M_i, M_j, M_k, M_l)$, где i, j, k, l обозначают значки 1, 2, 3, 4 в некотором

порядке. Переставляя эти значки, мы получим величины (A^*); кроме того, мы знаем, что при этом получаются величины (A).

5 Каково должно быть расположение четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 для того, чтобы среди величин (A) предыдущего упражнения не все были различны? Предполагается, что рассматриваемые точки — различны.

Решение. На основании сказанного в предыдущем упражнении, достаточно исследовать случай, когда λ равно одному из остальных чисел (A).

а) Пусть $\lambda = \frac{1}{\lambda}$; тогда $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$. Если $\lambda = +1$, то две из рассматриваемых точек должны совпадать [1]); но мы исключили случай совпадения. Следовательно, $\lambda = -1$; числа ряда (A) сводятся к следующим:

$$-1, \quad -1, \quad 2, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad \frac{1}{2};$$

эти числа равны попарно. В случае $\lambda = -1$ говорят, что пары точек (M_1, M_2) и (M_3, M_4) разделяют друг друга *гармонически* (см. следующий параграф).

b) При $\lambda = 1 - \lambda$, имеем $\lambda = \frac{1}{2}$ и числа (A) сводятся к следующим:

$$\frac{1}{2}, \quad 2, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad -1, \quad -1;$$

мы имеем такие же числа, что в случае а), только в другом порядке. Следовательно, переставляя порядок элементов M_1, M_2, M_3, M_4, приходим к предыдущему случаю.

c) $\lambda = \frac{1}{1-\lambda}$, т. е. $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Этот случай невозможен, если ограничиться рассмотрением действительных точек.

d) $\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, т. е. $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$; тот же случай, что и c).

e) $\lambda = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, т. е. $\lambda = 0$ или $\lambda = 2$. При $\lambda = 0$ две из рассматриваемых точек очевидно, совпадают. При $\lambda = 2$, числа ряда (A) сводятся к следующим:

$$2, \quad \frac{1}{2}, \quad -1, \quad -1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2;$$

мы, таким образом, приходим к случаю а).

Итак, если ограничиться рассмотрением действительных несовпадающих точек, числа ряда (A) могут быть не все различными только тогда, когда рассматриваемые четыре точки представляют собою две пары, разделяющие друг друга гармонически.

178. Гармоническое разделение.

Если

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = -1, \tag{1}$$

то говорят, что *точки* M_1, M_2 *разделяются точками* M_3, M_4 *гармонически* или, что *точки* M_3, M_4 *гармонически сопряжены относительно точек* M_1, M_2.

На основании сказанного в предыдущем параграфе, соотношение (1) не нарушается, если поменять местами пары M_1, M_2 и M_3, M_4; оно также

---

[1]) Если, например, M_1 и M_2 различны, то, как показывает формула (3), при $\lambda = 1$ точки M_3 и M_4 совпадают.

не нарушится, если переставить элементы в одной из пар [1]). Поэтому, не обращая внимания на порядок элементов в каждой паре, мы можем просто говорить, что *пары точек* (M_1, M_2) и (M_3, M_4) *разделяют друг друга гармонически*. То, что они действительно *разделяют* друг друга следует из того, что двойное отношение точек M_1, M_2, M_3, M_4 — отрицательно.

Из самого определения гармонического разделения следует, что если пара M_3, M_4 гармонически разделяет пару M_1, M_2, то точки M_3, M_4 разделяют отрезок M_1M_2 в одном и том же (по абсолютной величине) отношении, причем одна точка разделяет отрезок внутренним образом, а другая — внешним. Будем считать точки M_1 и M_2 неподвижными и различными. Легко видеть, что если точка M_4 уходит в бесконечность, гармонически сопряженная с ней точка M_3 попадает на середину отрезка M_1M_2. Действительно, как легко видеть на основании формулы (4а) предыдущего параграфа, если M_4 уходит в бесконечность, то

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = -\frac{M_1M_3}{M_2M_3},$$

откуда, на основании (1)

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2} = 1,$$

т. е. M_3 есть середина M_1M_2.

Далее, если M_3 приближается к M_1 (или M_2), то и M_4 приближается к M_1 (или M_2); это следует из той же формулы (4а) предыдущего параграфа. Действительно, если в числителе M_1M_3 стремится к нулю, то и в знаменателе M_1M_4 должно стремиться к нулю, иначе λ не могло бы оставаться конечным (в нашем случае $\lambda = -1$); так же докажем, что если M_2M_3 стремится к нулю, то и M_2M_4 стремится к нулю.

Итак, точка M_1 сопряжена сама с собой (относительно пары M_1, M_2); точно так же точка M_2 сопряжена сама с собой; других „самосопряженных" точек (относительно пары M_1, M_2) очевидно нет.

179. Инвариантность двойного отношения при гомографической подстановке. Главным свойством двойного отношения, благодаря которому оно играет основную роль в проективной геометрии, является его инвариантность (неизменность) по отношению к *гомографическим* или *дробно линейным* подстановкам. Мы сейчас поясним приведенные термины.

Если переменные x и y связаны соотношением

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \tag{1}$$

то говорят, что y есть *дробно-линейная* функция от x или, что y получается из x путем дробно-линейной или *гомографической* подстановки [2]).

---

[1]) Мы знаем, что в этом случае (см. предыдущий параграф) λ заменяется на $\frac{1}{\lambda}$; но при $\lambda = -1$, $\lambda = \frac{1}{\lambda}$.

[2]) В частном случае, когда $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$, получаем подстановку:

$$y = \frac{\alpha}{\delta} x + \frac{\beta}{\delta} = ax + b,$$

которую, в отличие от дробно-линнейной, мы будем называть целой линейной, или просто линейной, как мы это делали и раньше.

Подстановка называется *неособенной*, если определитель („определитель дробно-линейной подстановки")

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

отличен от нуля; в противном случае подстановка — *особенная* или *вырodившаяся*. Если подстановка особенная (мы подразумеваем все же, что и в числителе и в знаменателе есть коэфициенты отличные от нуля), то $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ и мы получаем

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta},$$

т. е. y сохраняет одно и то же значение для всех x.

В дальнейшем мы будем заниматься только неособенными подстановками. В этом случае уравнение (1) можно решить относительно x, что дает

$$x = \frac{-\delta y + \beta}{\gamma y - \alpha},$$

т. е. опять неособенную гомографическую подстановку. Таким образом соотношение (1) устанавливает между x и y взаимно-однозначное соответствие.

В частности, значению $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ соответствует $y = \infty$, а значению $y = \frac{\alpha}{\gamma}$ соответствует $x = \infty$.

Докажем теперь предложение, высказанное в начале параграфа: если x_1, x_2, x_3, x_4 — четыре значения переменной x, а y_1, y_2, y_3, y_4 — соответствующие значения переменной y, получаемые по формуле (1), то

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{2}$$

Рассмотрим сперва простое отношение

$$(y_1, y_2, y) = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

Элементарное вычисление дает

$$y - y_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} - \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)(\gamma x_1 + \delta)}(x - x_1),$$

$$y_2 - y = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)(\gamma x_2 + \delta)}(x_2 - x).$$

Откуда

$$(y_1, y_2, y) = k \cdot (x_1, x_2, x), \tag{3}$$

где величина

$$k = \frac{\gamma x_2 + \delta}{\gamma x_1 + \delta}$$

зависит только от x_1 и x_2. Мы видим, между прочим, что простое отношение трех точек *не инвариантно* относительно гомографической

подстановки[1]). Подставляя в (3) последовательно $x = x_3$, $x = x_4$, получим

$$(y_1, y_2, y_3) = k(x_1, x_2, x_3), \quad (y_1, y_2, y_4) = k(x_1, x_2, x_4),$$

откуда

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{(y_1, y_2, y_3)}{(y_1, y_2, y_4)} = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1, x_2, x_4)} = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

а это и требовалось доказать. Читатель легко проверит, что доказательство останется в силе и тогда, когда одно из чисел x_1, x_2, x_3, x_4 или y_1, y_2, y_3, y_4 обращается в бесконечность.

Легко видеть, что имеет место и обратное предложение, а именно: если x и y две переменные, связанные друг с другом так, что двойное отношение (x_1, x_2, x_3, x) равно двойному отношению (y_1, y_2, y_3, y), где x_1, x_2, x_3 — три какие-либо различные частные значения x, а y_1, y_2, y_3 — соответствующие значения y, то x и y связаны дробно-линейной подстановкой. Действительно, имеем по условию

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \cdot \frac{y_2 - y}{y_1 - y},$$

т. е.

$$\frac{x_2 - x}{x_1 - x} = k \frac{y_2 - y}{y_1 - y},$$

где k — некоторая постоянная. Решая предыдущее уравнение относительно y (или x), получим дробно-линейную функцию от x (или y), которая, в частности, может быть и целой линейной.

Упражнения и дополнения

1. Исследовать изменение y в зависимости от изменения x в формуле (1).

Решение. Мы решим эту задачу, пользуясь понятием производной (хотя легко обойтись и без этого). Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}.$$

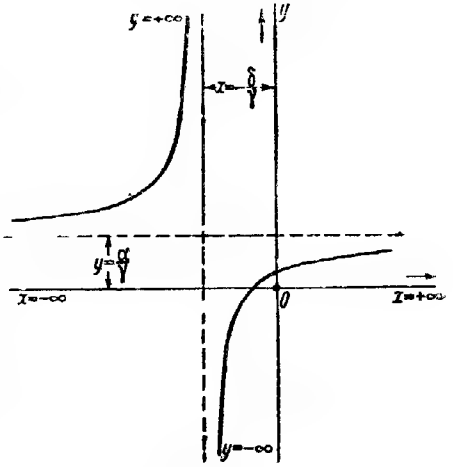
Следовательно, если $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, то y всегда возрастает с возрастанием x, а если $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, то y все время убывает; мы пока исключаем значение $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, при котором $y = \infty$. В случае особенной подстановки ($\alpha\delta - \beta\gamma = 0$), y остается постоянным, что мы видели и раньше.

Исследуем более подробно случай $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ (случай $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ исследуется аналогично). Будем считать также, что $\gamma \neq 0$, ибо в противном случае мы имели бы дело с целой линейной подстановкой, исследование которой совершенно элементарно. Когда x возрастает от $-\infty$ до $-\frac{\delta}{\gamma}$, величина y возрастает от $\frac{\alpha}{\gamma}$ до $+\infty$; при переходе x через значение $-\frac{\delta}{\gamma}$, y перескакивает от значения $+\infty$ к значению $-\infty$.

---

[1]) Но оно инвариантно относительно (целой) линейной подстановки, т. е. подстановки вида $y = lx + a$, выражающей аффинное преобразование точек прямой. Это следует из известных нам свойств аффинных преобразований, а также из формулы (3), ибо при $\gamma = 0$ (в этом случае дробно-линейная подстановка обращается в линейную) имеем $k = 1$.

При дальнейшем возрастании x, значение y возрастает и при x стремящемся к $+\infty$ снова стремится к $\frac{\alpha}{\gamma}$. Таким образом мы имеем следующий график изменения y (черт. 114).



Черт. 114.

Мы видим, что каждому значению x соответствует одно значение y и обратно. Мы не различаем здесь значений $x = +\infty$, $-\infty$ и $y = +\infty$, $-\infty$.

2. Показать, что совокупность неособенных гомографических подстановок составляет группу (см. § 78).

Доказательство. Как было уже показано, подстановка, обратная гомографической есть гомографическая. Остается показать, что последовательность двух неособенных гомографических подстановок есть тоже неособенная гомографическая подстановка. Это доказывается непосредственной проверкой: пусть $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ — гомографическая подстановка, вслед за которой производится другая: $z = \frac{\alpha' y + \beta'}{\gamma' y + \delta'}$. Внося в последнюю формулу предыдущее значение y, получаем

$$z = \frac{\alpha' \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + \beta'}{\gamma' \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} + \delta'} = \frac{(\alpha'\alpha + \beta'\gamma)x + (\alpha'\beta + \beta'\delta)}{(\gamma'\alpha + \delta'\gamma)x + (\gamma'\beta + \delta'\delta)}.$$

Это — гомографическая подставовка с определителем

$$\begin{vmatrix} \alpha'\alpha + \beta'\gamma & \alpha'\beta + \beta'\delta \\ \gamma'\alpha + \delta'\gamma & \gamma'\beta + \delta'\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

180. Двойное отношение четырех прямых и четырех плоскостей пучка. Мы определили двойное отношение для точек прямолинейного ряда. Распространим теперь это понятие на элементы двух других образов первой ступени (т. е. на элементы пучка прямых и пучка плоскостей).

Пусть дан *пучок прямых*, т. е. совокупность прямых, расположенных в одной плоскости и проходящих через одну точку. Пересечем пучок прямою δ, не проходящей через центр (черт. 115). Двойным отношением $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$ четырех прямых $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, принадлежащих пучку, называется двойное отношение четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 пересечения этих прямых с δ. Таким образом, по определению,

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4). \qquad (1)$$

Это определение имеет смысл ибо, как мы сейчас покажем, двойное отношение четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 не зависит от выбора прямой δ.

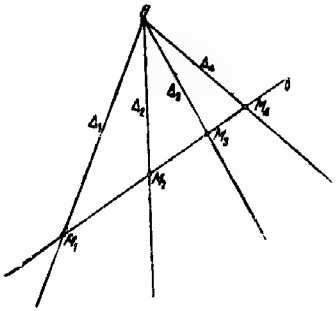
Проще всего убедиться в этом так. Будем пока считать, что центр

пучка O — собственная точка (черт. 116). Опустим из O перпендикуляр на δ и примем основание A этого перпендикуляра за начало отсчета абсцисс на прямой δ, которую будем рассматривать как ось, приписав ей определенное положительное направление (безразлично какое); в качестве координатного вектора возьмем, для простоты, орт.

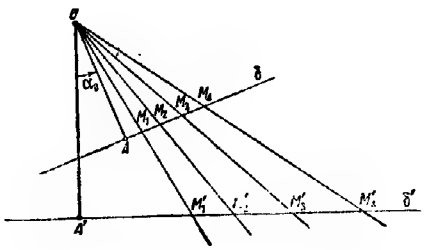
Если x есть абсцисса точки пересечения прямой Δ пучка с δ (эта абсцисса, очевидно, вполне определяет прямую Δ и обратно), то

$$x = h \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где $|h| = |OA|$, а α — угол, который прямая Δ составляет с $\overrightarrow{OA}$, причем этот угол отсчитывается в определенном положительном направлении (а именно в том, которое согласуется с положительным направлением, выбранном на δ).



Черт. 115.



Черт. 116.

Вводя обозначение

$$\operatorname{tg} \alpha = m,$$

будем иметь $x = h \cdot m$, откуда ясно, что величина m вполне характеризует положение прямой Δ и обратно. Величину m можно назвать *тангенс-координатой* прямой пучка.

Имеем, при очевидных обозначениях,

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4),$$

откуда

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4). \qquad (2)$$

Если теперь пересечь пучок другой прямой δ' и через m' обозначить соответствующую тангенс-координату прямой Δ пучка, то для новых точек пересечения будем иметь аналогично

$$(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4) = (m'_1, m'_2, m'_3, m'_4),$$

причем $m' = \operatorname{tg} \alpha'$, где α' — угол, который прямая Δ составляет с $\overrightarrow{OA'}$, где A' — основание перпендикуляра, опущенного из O на δ' (черт. 116). Легко видеть, что $\alpha' = \alpha_0 + \alpha$, где α_0 — угол, который составляет $\overrightarrow{OA}$ с $\overrightarrow{OA'}$ (мы выбираем для отсчета всех углов одно и то же положитель-

ное направление и отбрасываем слагаемое кратное π, не имеющее значения) и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha) = (\operatorname{tg}\alpha_0 + \operatorname{tg}\alpha)/(1 - \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha), \text{ откуда}$$

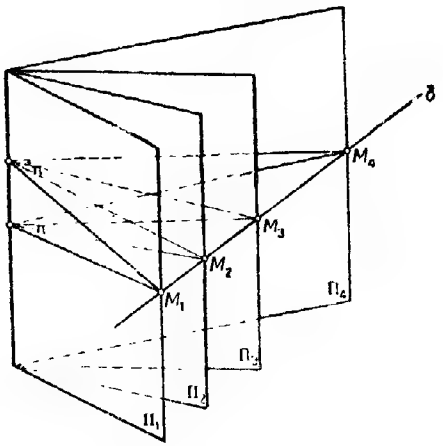
$$m' = \frac{m_0 + m}{1 - m_0 m}, \tag{3}$$

причем $m_0 = \operatorname{tg}\alpha_0$.

Таким образом m' есть дробно-линейная функция m и, на основании сказанного в предыдущем параграфе, $(m_1', m_2', m_3', m_4') = (m_1, m_2, m_3, m_4)$.

Потому $(M_1', M_2', M_3', M_4') = (M_1, M_2, M_3, M_4)$, а это и требовалось доказать.

Последнее наше заключение остается в силе и тогда, когда центр пучка — несобственная точка, т. е. прямые пучка параллельны между собою. В этом случае равенство $(M_1', M_2', M_3', M_4') = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ устанавливается непосредственно, ибо отрезки прямых δ и δ', отсекаемые параллельными прямыми — пропорциональны.



Черт. 117.

Пусть теперь дан *пучок плоскостей*. Пересечем его какой-нибудь плоскостью π, не принадлежащей пучку. В пересечении получим пучок прямых (центр которого — точка пересечения π с осью пучка). Двойным отношением $(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$ четырех плоскостей $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ пучка называется двойное отношение прямых, получающихся при пересечении этих плоскостей с плоскостью π.

Это отношение не зависит от выбора плоскости π. Действительно, пусть π' другая плоскость, пересекающая пучок и пусть δ — прямая пересечения плоскостей π и π' (черт. 117). Тогда двойное отношение четырех прямых, получающихся при пересечении пучка плоскостями π или π' равно двойному отношению четырех точек пересечения прямой δ с плоскостями $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$; значит оно одинаково для обеих плоскостей π и π'. Мы подразумевали, что прямая δ не пересекает оси пучка. В противном случае, для доказательства нашего утверждения достаточно взять третью плоскость π'', которая пересекается как с π, так и с π' по прямым, не пересекающим оси пучка. Наше заключение справедливо и в том случае, когда ось пучка — несобственная прямая, т. е. когда плоскости пучка параллельны между собою.

Понятие *гармонического разделения*, введенное выше для точек прямолинейного ряда, переносится без всяких изменений на элементы двух других образов первой ступени.

Замечание. Определяя в § 177 двойное отношение четырех

точек на данной прямой, мы считали, что эта прямая — собственная. Теперь мы можем обобщить понятие двойного отношения и на случай точек, расположенных на несобственной прямой. А именно, под двойным отношением четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4, расположенных на данной несобственной прямой, мы будем подразумевать двойное отношение четырех прямых OM_1, OM_2, OM_3, OM_4, где O — произвольно выбранная собственная точка. Эти последние прямые принадлежат пучку, находящемуся в плоскости, которая проходит через O и через данную несобственную прямую.

Аналогично определяется двойное отношение четырех прямых, принадлежащих пучку, расположенному на несобственной плоскости.

Упражнения и дополнения

1. Доказать следующую формулу для двойного отношения четырех прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, принадлежащих пучку с собственным центром:

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \frac{\sin(\Delta_1, \Delta_3)}{\sin(\Delta_3, \Delta_2)} : \frac{\sin(\Delta_1, \Delta_4)}{\sin(\Delta_4, \Delta_2)}. \qquad (4)$$

где через (Δ_i, Δ_k) обозначен угол, отсчитываемый от Δ_i до Δ_k. При этом предполагается, что на плоскости пучка выбрано определенное направление отсчета углов (безразлично какое) и что прямые Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 рассматриваются (при отсчете углов), как оси (так что этим прямым приписываются определенные положительные направления, безразлично какие).

Доказательство. Прежде всего ясно, что значение правой части (4) не изменится, если изменить направление отсчета углов на обратное (ибо тогда изменят знаки все четыре синуса) или если изменить на обратное положительное направление любой из прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 (ибо тогда изменят знаки два синуса).

На основании (2) имеем, обозначая через α_1, α_2, α_3, α_4 значения α, соответствующие прямым Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4:

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (\operatorname{tg}\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2, \operatorname{tg}\alpha_3, \operatorname{tg}\alpha_4) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3} : \frac{\operatorname{tg}\alpha_4 - \operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_4}$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{\sin\alpha_3}{\cos\alpha_3} - \dfrac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\cos\alpha_3 \cos\alpha_1}$; написав аналогичные формулы для других разностей тангенсов и подставив в предыдущую формулу, получим (так как все косинусы сократятся)

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)} : \frac{\sin(\alpha_4 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_4)},$$

откуда непосредственно следует требуемая формула (4).

2. Доказать, что для двойного отношения четырех плоскостей пучка с собственной осью получается формула, совершенно аналогичная (4).

Для доказательства достаточно пересечь пучок плоскостью, перпендикулярной оси.

181. Проектирования и сечения. Введем теперь некоторые элементарные понятия, которые окажутся для нас полезными в дальнейшем. Мы имеем в виду так называемые основные проективные операции: *проектирования* и *сечения*.

1°. *Проектирование из данного центра* данной фигуры, состоящей из точек и прямых, заключается в том, что из данной точки („центра") проводятся прямые и плоскости, проходящие через точки и прямые фигуры.

Например, проектируя из данного центра данный прямолинейный ряд точек, получаем пучок прямых. Проектируя из данного центра плоскую систему точек (или прямых), получим связку прямых (или плоскостей).

2°. *Проектирование из данной прямой* данной фигуры, состоящей из точек, заключается в том, что через данную прямую проводятся плоскости, проходящие через точки данной фигуры.

Например, проектируя из данной прямой данный прямолинейный ряд точек, получим пучок плоскостей.

Операциями, взаимными по отношению к двум предыдущим, являются следующие:

3°. *Сечение плоскостью* фигуры, состоящей из прямых и плоскостей, заключается в пересечении элементов данной фигуры данной плоскостью (в пересечении получим точки и прямые).

4°. *Сечение прямою* данной фигуры, состоящей из плоскостей, заключается в пересечении данной фигуры прямою (в пересечении получаются точки).

Два данных основных образа (§ 172) называются *перспективными* (или находящимися в *перспективном соответствии*), если один из них получается из другого проектированием или сечением, или если два данных образа получаются в результате проектирования, или сечения одного и того же образа.

Например, прямолинейный ряд точек и проектирующий его пучок прямых (черт. 115) — перспективны. Также перспективны прямолинейный ряд точек и проектирующий его пучок плоскостей. Далее, два прямолинейных ряда, получаемых сечением одного и того же пучка прямых двумя прямыми δ и δ' — перспективны (черт. 116) и т. д.

Если два прямолинейных ряда представляют собою сечения одного и того же пучка прямых двумя прямыми δ и δ' (черт. 116), то говорят, что второй ряд получен из первого (или первый из второго) путем проектирования ряда δ на ряд δ' (или δ' на δ) из центра O, где O — центр пучка.

Аналогично говорят о проектировании одного прямолинейного ряда на другой из прямой Δ, если эти ряды суть сечения одного и того же пучка плоскостей с осью Δ.

Также говорят о проектировании из центра O одной плоской системы точек на другую, если обе плоские системы суть сечения одной и той же связки прямых с центром в O двумя плоскостями Π и Π'.

182. Проективное соответствие между образами первой ступени. Рассмотрим, в частности, основные образы первой ступени. На основании сказанного в § 180 ясно, что если два основных образа первой ступени находятся в обратимо-однозначном перспективном соответствии, то двойное отношение четырех элементов одного образа равно двойному отношению соответствующих элементов другого.

Перспективное соответствие является частным случаем *проективного* соответствия, которое мы определим пока только для образов первой ступени, следующим образом:

Проективным соответствием между двумя образами первой ступени называется такое обратимо-однозначное соответствие, при

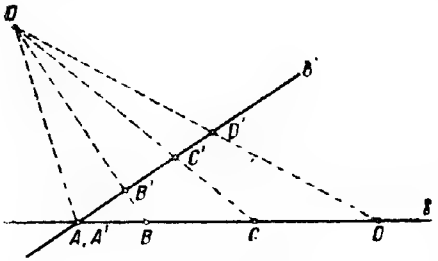
котором двойное отношение любых четырех элементов одного образа равно двойному отношению соответствующих элементов другого.

О двух образах находящихся в проективном соответствии говорят еще, что один из них получается из другого путем *проективного преобразования.*

Проективное соответствие между двумя образами первой ступени вполне определяется заданием трех элементов A', B', C' одного образа, которые соответствуют трем заданным различным элементам A, B, C другого. Действительно, пусть M — какой-либо элемент последнего образа, а M' — соответствующий элемент первого. Имеем, по определению, проективного соответствия,

$$(A', B', C', M') = (A, B, C, M),$$

что вполне определяет элемент M', если задан элемент M и обратно. В зависимости от того, какие образы первой ступени мы рассматриваем, буквы могут здесь обозначать или точки прямолинейного ряда, или прямые пучка или плоскости пучка.



Черт. 118а.

Геометрический смысл проективного преобразования выясняется следующим предложением:

Если два образа первой ступени находятся в проективном соответствии, то любой из них может быть получен из другого путем конечного числа последовательных проектирований и сечений; обратное предложение также справедливо.

Справедливость обратного предложения очевидна, ибо при каждом проектировании и сечении, двойные отношения соответствующих элементов равны между собою.

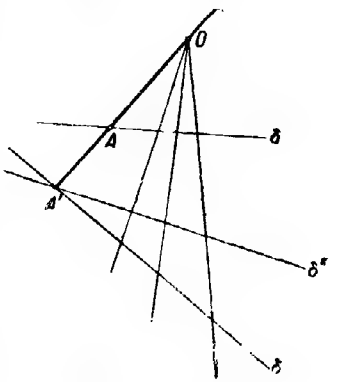
Доказательство прямого предложения достаточно провести для двух прямолинейных рядов точек, расположенных на одной и той же плоскости. Действительно, от всякого пучка прямых или плоскостей, при помощи сечения, можно перейти к прямолинейному ряду точек. Далее, если два прямолинейных ряда не расположены на одной плоскости, то проектируя оба ряда из какой-либо точки (не принадлежащей ни одному из рядов) и пересекая полученные два пучка плоскостью, получим два прямолинейных ряда на одной плоскости. Наконец, мы можем всегда считать, что данные ряды не расположены на одной и той же прямой (ибо путем проектирования и сечения мы можем заменить один из данных рядов другим, расположенным на другой прямой).

Рассмотрим сперва тот частный случай, когда точки A и A' двух данных прямолинейных рядов, совпадающие с точкой пересечения прямых δ и δ', на которых данные ряды расположены, соответствуют друг другу. Пусть B, C две другие точки первого ряда, а B',C' — соответствующие точки второго. Проведем прямые BB' и CC' и пусть O — точка

их пересечения[1]) (черт. 118a). Докажем теперь, что наши ряды получаются путем проектирования δ' на δ из O. Действительно, пусть D какая-либо точка первого ряда, а D' соответствующая точка второго. Имеем, по определению проективного соответствия,

$$(A', B', C', D') = (A, B, C, D). \qquad (1)$$

Докажем, что D и D' находятся на одной прямой с O. Пусть D'' точка пересечения прямой OD с прямой δ', на которой расположен второй ряд. Имеем, на основании свойств двойного отношения: $(A', B', C', D'') = (A, B, C, D)$; следовательно, на основании (1), $(A', B', C', D'') = (A', B', C', D')$. Отсюда следует, что D'' совпадает с D', ибо существует только одна точка D' прямой, для которой двойное отношение (A', B', C', D') имеет данное значение при неизменных A', B', C'. Таким образом наше предложение доказано для рассматриваемого частного случая.



Черт. 118b.

Рассмотрим теперь самый общий случай двух прямолинейных рядов на прямых δ и δ', расположенных на одной плоскости (черт. 118b). Пусть A и A' какие-либо соответствующие точки этих рядов. Проведем через эти точки прямую AA' и возьмем на ней какую-либо точку O, не совпадающую с A и A'. Спроектируем, далее, первый ряд из O на какую-либо прямую δ'', проходящую через A', но не совпадающую с δ'. Тогда мы получим, вместо ряда на δ, новый ряд на δ'', который расположен по отношению к ряду на δ' так, как в предыдущем частном случае.

Из этого вытекает справедливость высказанного предложения.

183. Проективные координаты на прямой. Пусть M — точка оси Ox и x_1, x_2 — ее однородные декартовы координаты. При изменении начала и координатного вектора мы имеем следующие формулы преобразования (§ 173, замечания):

$$x_1 = lx_1' + ax_2', \quad x_2 = x_2'.$$

Мы видим, что координаты x_1 и x_2 входят в эти формулы не равноправно. Это и понятно, ибо как в одной, так и в другой системе координат равенство $x_2 = 0$ или $x_2' = 0$ характеризует несобственную точку. Мы можем, однако, достигнуть полной симметрии, если вместо координат x_1 и x_2 введем новые величины

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad y_2 = \gamma x_1 + \delta x'_2, \qquad (1)$$

где α, β, γ, δ — постоянные, подчиненные единственному условию

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

[1]) Точка O может быть и несобственной.

выражающему что подстановка (1) — неособенная. Тогда x_1 и x_2 можно в свою очередь, выразить через y_1 и y_2:

$$x_1 = \alpha' y_1 + \beta' y_2, \quad x_2 = \gamma' y_1 + \delta' y_2. \tag{2}$$

Из этого следует, что каждому значению отношения $x = \frac{x_1}{x_2}$ соответствует вполне определенное значение отношения $y = \frac{y_1}{y_2}$; а именно мы имеем

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x = \frac{\alpha' y + \beta'}{\gamma' y + \delta'}. \tag{3}$$

Мы видим, что x и y связаны дробно-линейной подстановкой. Величину y также можно назвать координатой точки M, ибо она вполне определяет положение точки на прямой. Эта величина называется *неоднородной проективной координатой*; величины же y_1 и y_2 называются *однородными проективными координатами*. Положение точки на прямой характеризуется их отношением $y = \frac{y_1}{y_2}$.

Проективная координата y имеет весьма простое геометрическое значение. Прежде всего отметим, что если M, M', M'', M''' — четыре точки нашей прямой с (неоднородными) декартовыми координатами x, x', x'', x''' и проективными y, y', y'', y''', то

$$(M, M', M'', M''') = (x, x', x'', x''') = (y, y', y'', y'''),$$

ибо переменные y и x связаны дробно-линейной подстановкой. Возьмем теперь на нашей прямой три точки A, B, E, соответствующие следующим значениям y: ∞, 0, 1, т. е. следующим значениям однородных координат y_1, y_2: (1, 0), (0, 1), (1, 1), или всяким, им пропорциональным. Тогда [см. § 177, формула (8)]

$$(A, B, E, M) = (\infty, 0, 1, y) = y.$$

Итак, *проективной неоднородной координатой y точки M является двойное отношение трех постоянных точек A, B, E и точки M*:

$$y = \frac{y_1}{y_2} = (A, B, E, M). \tag{4}$$

Обратно, взяв на прямой три произвольные точки A, B, E и определяя y равенством (4), получим, что y есть дробно-линейная функция x, т. е. y есть (неоднородная) проективная координата в том смысле, как было определено нами это понятие с самого начала.

Точки A и B называются *основными точками*, а E — *единичной точкой* данной системы проективных координат.

Для дальнейшего важно отметить, что (неоднородные) *координаты y и y' точек M и M', гармонически сопряженных относительно основных точек A и B равны по величине и обратны по знаку*. Действительно из условия $(A, B, M, M') = -1$ следует:

$$(\infty, 0, y, y') = \frac{y'}{y} = -1,$$

т. е.

$$y' = -y. \qquad (*)$$

Вопрос о *преобразовании проективных координат* на данной прямой решается очень просто.

Возьмем вместо A, B, E новые точки A', B', E' и пусть z проективная координата точки M в этой новой системе

$$z = (A', B', E', M).$$

Если y', y'', y''' — проективные координаты точек A', B', E' относительно старой системы, то

$$z = (y', y'', y''', y),$$

т. е. z есть дробно-линейная функция от y:

$$z = \frac{ay + b}{cy + d}, \qquad (5)$$

где a, b, c, d — постоянные. Обратно, меняя ролями y и z, получим y как дробно-линейную функцию от z. Из этого следует, что подстановка (5) неособенная (что также легко доказать непосредственно).

Переходя к однородным координатам и полагая $z = \frac{z_1}{z_2}$, $y = \frac{y_1}{y_2}$, получаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ay_1 + by_2}{cy_1 + dy_2}.$$

Имея в виду, что важно только отношение z_1 к z_2, можно положить

$$z_1 = ay_1 + by_2, \quad z_2 = cy_1 + dy_2. \qquad (6)$$

Следовательно, однородные проективные координаты преобразуются линейной однородной неособенной подстановкой.

Замечание. Разумеется, в качестве одной из основных точек можно взять и несобственную точку прямой. Если, например, A несобственная точка, то при $x = \infty$ мы должны иметь $y = \infty$, т. е. при $x_2 = 0$ должно быть $y_2 = 0$.

Поэтому в формулах (1) $\gamma = 0$ и мы будем иметь

$$y = \frac{\alpha}{\delta} x + \frac{\beta}{\delta} = lx + a \left(l = \frac{\alpha}{\delta}, \quad a = \frac{\beta}{\delta} \right),$$

т. е. в этом случае y есть обычная абсцисса в некоторой системе декартовых координат на нашей прямой.

184. Двойное отношение четырех точек на прямой, заданной параметрически. Пусть прямая Δ на плоскости задана своими двумя точками $M'(x_1', x_2', x_3')$ и $M''(x_1'', x_2'', x_3'')$; тогда однородные координаты ее точек даются формулами (§ 167)

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'', \qquad (1)$$

где λ и μ — параметры, отношение которых

$$h = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (2)$$

определяет положение прямой на плоскости. Докажем теперь, что *двойное отношение четырех точек* M_1, M_2, M_3, M_4 *этой прямой равно двойному отношению соответствующих значений* h, т. е.

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (h_1, h_2, h_3, h_4); \tag{3}$$

здесь h_1, h_2, h_3, h_4 обозначают значения h, соответствующие точкам M_1, M_2, M_3, M_4.

Действительно, считая пока, что рассматриваемая прямая — собственная, введем неоднородные декартовы координаты $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$; тогда (1) дает

$$x = \frac{hx_1' + x_1''}{hx_3' + x_3''}, \quad y = \frac{hx_2' + x_2''}{hx_3' + x_3''}. \tag{1a}$$

Не нарушая общности, можно считать, что прямая Δ не параллельна оси Oy (ибо в противном случае мы провели бы рассуждения, поменяв ролями оси Ox и Oy). В этом случае двойное отношение $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (N_1, N_2, N_3, N_4)$, где N_1, N_2, N_3, N_4 — проекции точек M_1, M_2, M_3, M_4 на ось Ox, взятые параллельно оси Oy. Но $(N_1, N_2, N_3, N_4) = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$, где $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$ значения x, которые получим, подставляя в первую формулу (1а), последовательно h_1, h_2, h_3, h_4. Но так как x есть дробно-линейная функция от h, то $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, и наше предложение доказано.

Из (3) следует, что *параметр* $h = \frac{\lambda}{\mu}$, *определяющий положение точки* M *на* Δ, *есть проективная координата, если за основные точки принять* M' *и* M'', *а за единичную точку — точку* E, *которая соответствует значению* $h = 1$ (т. е. $\lambda = \mu$). Действительно, точкам M' и M'' соответствуют значения $h = \infty$ и $h = 0$; поэтому

$$(M', M'', E, M) = (\infty, 0, 1, h) = h.$$

Предыдущие результаты останутся справедливыми и в том случае, когда прямая Δ — несобственная, т. е. когда $x_3' = x_3'' = 0$. Тогда имеем параметрическое представление

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим наряду с несобственной прямой (4) собственную прямую (1), где x_3' и x_3'' отличны от нуля, а в остальном — произвольны. Легко видеть, что прямая δ, соединяющая начало координат с некоторой точкой прямой (4), проходит и через точку прямой (1), соответствующую тому же значению $\frac{\lambda}{\mu} = h$; действительно, прямая, соединяющая начало с точкой прямой (4), соответствующей данному значению h, имеет угловой коэфициент равный $(hx_2' + x_3'')/(hx_1' + x_1'')$; но такой же угловой коэфициент имеет и прямая, соединяющая начало с точкой прямой (1), соответствующей данному h. Поэтому, двойное отношение четырех прямых пучка с центром в O, проходящих через данные четыре точки несобственной прямой Δ (а это двойное отношение и есть двойное отношение четырех данных точек), равно двойному отношению четырех

точек прямой (1), соответствующих тем же значениям h. Отсюда и следует наше утверждение.

Совершенно аналогичные результаты получаем для *точек прямой в пространстве, заданной параметрически* (§ 169).

Замечание. Из того, что h является проективной координатой при основных точках M' и M'', вытекает, на основании сказанного в предыдущем параграфе, что если h_1 и h_2 обозначают значения параметра h, соответствующие двум точкам A и B, сопряженным гармонически относительно M' и M'', то

$$h_1 + h_2 = 0.$$

185. Двойное отношение четырех прямых (плоскостей) пучка, заданного параметрически. Проективные координаты в пучке. Переходя от прямолинейного ряда точек к взаимному образу — пучку прямых, можем ввести понятие проективной координаты прямой пучка.

Пусть пучок определяется двумя своими прямыми $\Delta'(a_1', a_2', a_3')$ и $\Delta''(a_1'', a_2'', a_3'')$, где буквы в скобках обозначают однородные координаты соответствующих прямых. Всякая прямая $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ пучка представится параметрически так (см. § 170, стр. 270):

$$a_1 = \lambda a_1' + \mu a_1'', \quad a_2 = \lambda a_2' + \mu a_2'', \quad a_3 = \lambda a_3' + \mu a_3''. \tag{1}$$

Положение Δ вполне характеризуется отношением

$$h = \frac{\lambda}{\mu}; \tag{2}$$

в частности, при $h = \infty$ прямая Δ совпадает с Δ', а при $h = 0$ — с Δ''.

Легко показать, что двойное отношение четырех прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 пучка, равно двойному отношению значений h_1, h_2, h_3, h_4 параметра h, соответствующих этим прямым, т. е.

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (h_1, h_2, h_3, h_4). \tag{3}$$

Действительно, уравнение прямой $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ есть

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

или, на основании (1),

$$(\lambda a_1' + \mu a_1'')x_1 + (\lambda a_2' + \mu a_2'')x_2 + (\lambda a_3' + \mu a_3'')x_3 = 0,$$

или еще, переходя к неоднородным координатам $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$,

$$(\lambda a_1' + \mu a_1'')x + (\lambda a_2' + \mu a_2'')y + (\lambda a_3' + \mu a_3'') = 0.$$

Абсциссу x точки пересечения этой прямой с осью Ox получим, полагая в предыдущем уравнении $y = 0$, что дает [1])

$$x = -\frac{\lambda a_3' + \mu a_3''}{\lambda a_1' + \mu a_1''} = -\frac{ha_3' + a_3''}{ha_1' + a_1''}.$$

[1]) Мы считаем, что ось Ox не принадлежит пучку. Если это не так, то мы можем провести аналогичные рассуждения, взяв вместо Ox ось Oy. Наконец, если O является центром пучка, то мы можем рассмотреть пересечение прямых пучка с какой-либо прямою, параллельною одной из осей, например с прямою $y = c$, где $c \neq 0$. Окончательный результат будет тот же.

Двойное отношение четырех прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 равно двойному отношению четырех точек пересечения этих прямых с осью Ox, т. е. величине $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$, где $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ обозначают значения x, которые получим, подставляя в предыдущую формулу h_1, h_2, h_3, h_4 вместо h. Но так как x есть дробно-линейная функция от h, как это показывает предыдущая формула, то мы будем иметь

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = (h_1, h_2, h_3, h_4),$$

откуда и следует формула (3).

В частности, применяя формулу (3) к прямым Δ', Δ'', E, Δ, где E обозначает прямую пучка, соответствующую $h = 1$ (т. е. $\lambda = \mu$), а Δ — произвольную прямую, будем иметь

$$(\Delta', \Delta'', \mathrm{E}, \Delta) = (\infty, 0, 1, h) = h.$$

Итак,

$$h = \frac{\lambda}{\mu} = (\Delta', \Delta'', \mathrm{E}, \Delta). \tag{4}$$

Величина $h = \frac{\lambda}{\mu}$ называется (*неоднородной*) *проективной координатой прямой* Δ, *принадлежащей пучку*, а λ, μ — *однородными проективными координатами* той же прямой.

Прямые Δ' и Δ'', соответствующие значениям $h = \infty$ и $h = 0$ суть „*основные прямые*“, а E, соответствующая $h = 1$, — „*единичная прямая*“ принятой системы координат. Прямые Δ', Δ'', E могут быть выбраны совершенно произвольно; они только должны быть различны.

Совершенно аналогично можно ввести *проективную координату* h *плоскости, принадлежащей пучку*, или *однородные проективные координаты* λ, μ. А именно, здесь мы будем иметь

$$h = \frac{\lambda}{\mu} = (\Pi', \Pi'', \mathrm{E}, \Pi), \tag{5}$$

где Π', Π'' — постоянные „*основные плоскости*“, E — „*единичная плоскость*“, соответствующая $h = 1$, а Π — плоскость, которой соответствует h.

Замечание. Если α обозначает угол, составляемый прямою Δ пучка с некоторым постоянным направлением, то величину $m = \operatorname{tg}\alpha$ (тангенс-координату) можно рассматривать, как проективную координату. Действительно, пусть Δ', Δ'', E — три прямые пучка, соответствующие значениям: $m = \infty$, $m = 0$ и $m = 1$ $\left(\text{т. е. } \alpha = \frac{\pi}{2},\ \alpha = 0 \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда [1])

$$(\Delta', \Delta'', \mathrm{E}, \Delta) = (\infty, 0, 1, m) = m;$$

следовательно, m есть проективная координата, если за основные прямые взять Δ', Δ'', а за единичную — прямую E.

---

[1]) На основании формулы (2) § 180, двойное отношение четырех прямых пучка равно двойному отношению соответствующих значений m.

186. Аналитическое выражение проективного соответствия двух образов первой ступени. Пусть даны два образа первой ступени, элементы которых приведены в проективное соответствие.

Рассмотрим, для определенности, два прямолинейных ряда точек, расположенных на прямых Δ и Δ'. Пусть h и h' проективные координаты точек M и M' на Δ и Δ', соответствующих друг другу. По определению проективного соответствия имеем

$$(M_1,\ M_2,\ M_3,\ M) = (M_1',\ M_2',\ M_3',\ M'), \tag{1}$$

где M_1, M_2, M_3 — три какие-либо различные точки прямой Δ, а M_1', M_2', M_3' — соответствующие точки прямой Δ'. Из (1) следует

$$(h_1,\ h_2,\ h_3,\ h) = (h_1',\ h_2',\ h_3',\ h'),$$

откуда заключаем, что h' есть дробно-линейная функция h, и обратно:

$$h' = \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta}, \quad h = \frac{\alpha' h' + \beta'}{\gamma' h' + \delta'}. \tag{2}$$

Вводя вместо неоднородных координат h и h' однородные (λ, μ) и (λ', μ'):

$$h = \frac{\lambda}{\mu}, \quad h' = \frac{\lambda'}{\mu'},$$

подставляя их в предыдущие формулы и приняв во внимание, что однородные координаты можно заменять пропорциональными им величинами (ср. конец § 183), получим

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \alpha\lambda + \beta\mu, \\ \mu' &= \gamma\lambda + \delta\mu, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \lambda &= \alpha'\lambda' + \beta'\mu', \\ \mu &= \gamma'\lambda' + \delta'\mu', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

т. е. однородные проективные координаты соответствующих точек, при проективном соответствии, связаны линейной однородной неособенной подстановкой.

Обратно, если имеет место (2) или (3), то соответствие проективное, ибо тогда имеет место (1) для любых четырех точек одного прямолинейного ряда и соответствующих точек другого.

Сказанное, очевидно, непосредственно переносится и на другие образы первой ступени (пучок прямых или плоскостей) и мы получаем следующее предложение:

Если два образа первой ступени находятся в проективном соответствии, то неоднородные проективные координаты соответствующих элементов связаны (неособенной) *дробно-линейной подстановкой, и обратно.* (*Однородные координаты связаны линейной однородной подстановкой.*)

Вернемся к случаю прямолинейных рядов. Если A, B, E основные и единичная точки системы координат на первой прямой, а A', B', E' — аналогичные точки на второй, то, по определению проективной координаты,

$$h = (A,\ B,\ E,\ M), \quad h' = (A',\ B',\ E',\ M').$$

Пусть рассматриваемые ряды находятся в проективном соответствии и пусть в качестве A', B', E' взяты точки, соответствующие точкам

A, B, E'; если M, M' — соответствующие точки, то $(A, B, E, M) = (A', B', E', M')$ и, следовательно,

$$h = h'. \tag{4}$$

Итак, в этом случае, соотношения (2) сводятся просто к равенству проективных координат соответствующих точек.

Это непосредственно распространяется на другие образы первой ступени.

Например, если данный прямолинейный ряд и пучок прямых приведены в проективное соответствие, то координаты h и h' соответствующих элементов (точки ряда и прямой пучка) равны между собою, если в качестве основных и единичных элементов в обоих образах взяты соответствующие друг другу элементы.

187. Распространение основных понятий проективной геометрии на мнимые элементы. Понятие двойного отношения, проективных координат и другие понятия, введенные в предыдущих параграфах, могут быть естественно распространены на случай мнимых элементов. Исходным пунктом для этого распространения могут служить формулы, выражающие аналитически двойное отношение и другие величины, связанные с введенными выше геометрическими понятиями. Ввиду полной аналогии с тем, что было сказано в первом отделе этой главы, мы на этом не будем здесь останавливаться.

188. Наложенные образы первой ступени. Инволюция. Рассмотрим для определенности сперва два прямолинейных ряда точек. Эти ряды могут быть расположены на двух различных прямых Δ и Δ' или на одной и той же прямой.

В этом последнем случае говорят, что рассматриваемые ряды наложены друг на друга. И здесь удобно представлять себе (как мы делали это и раньше в подобных случаях), что мы имеем две наложенные друг на друга прямые Δ и Δ', на которых расположены рассматриваемые ряды. Дело в следующем. Пусть точки M и M' рассматриваемых рядов приведены в обратимо-однозначное соответствие, так что

$$x' = \varphi(x) \quad \text{и} \quad x = \psi(x'), \tag{1}$$

где x и x' абсциссы точек M и M', а φ, ψ — однозначные функции. Пусть теперь N какая-либо точка прямой, на которой расположены оба ряда. Если не указано, какому из двух рядов эта точка принадлежит, то мы не будем знать, по какой из двух формул (1) следует вычислять абсциссу соответствующей точки; поэтому-то и удобно рассматривать наложенные ряды, как расположенные на наложенных друг на друга двух прямых: указывая, на какой из прямых находится N, мы тем самым указываем, какому ряду она принадлежит.

Но есть весьма важный случай, когда такое различие излишне — это когда соответствие между двумя рядами таково, что точка M', соответствующая данной точке M, занимает одно и то же положение независимо от того, рассматривается ли M как точка первого или второго ряда. Аналитически это выражается тем, что функции φ и ψ — одинаковые (если точки обоих рядов отнесены к одной и той же системе координат). В этом случае нет надобности отличать прямые Δ и Δ' и, вообще

первый ряд от второго: можно просто говорить, что точки одного и того же ряда приведены в соответствие попарно, таким образом, что если точке M соответствует точка M', то, обратно, точке M' соответствует точка M.

Такое соответствие называется *инволюторным*. В дальнейшем мы будем называть *инволюцией* проективное инволюторное соответствие.

Найдем общее аналитическое выражение для инволюции. Пусть h — проективная координата точки M рассматриваемого ряда; если M' — соответствующая точка, а h' — ее координата относительно той же системы, то

$$h' = \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

ибо, по условию, соответствие проективное.

Соотношение это можно переписать и так:

$$\gamma h h' - \alpha h + \delta h' - \beta = 0.$$

Так как соответствие между M и M' — инволюторное, то это соотношение должно быть эквивалентно соотношению

$$\gamma h' h - \alpha h' + \delta h - \beta = 0,$$

получаемому перестановкой h и h'. Вычитая два предыдущие равенства, получим

$$(\alpha + \delta)(h' - h) = 0.$$

Если $\alpha + \delta \neq 0$, то мы имеем

$$h' = h,$$

т. е. наша инволюция состоит попросту в том, что каждая точка соответствует самой себе. Отбрасывая этот случай, не представляющий интереса, мы должны считать

$$\alpha + \delta = 0,$$

и соотношение между h и h', выражающее инволюцию, принимает вид

$$\gamma h h' + \delta(h + h') - \beta = 0,$$

или, полагая для симметрии $\gamma = a$, $\delta = -\alpha = b$, $-\beta = c$,

$$a h h' + b(h + h') + c = 0, \tag{2}$$

где a, b, c — постоянные, такие что

$$ac - b^2 \neq 0$$

(это последнее условие вытекает из условия $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$).

Найдем теперь *двойные точки инволюции*, т. е. такие, которые соответствуют самим себе. Если точка M' совпадает с соответствующей ей точкой M, то $h' = h$ и (2) дает

$$a h^2 + 2bh + c = 0, \tag{3}$$

откуда находим для h два значения:

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{4}$$

Значит всегда имеются две двойные точки A и B; эти точки действительны, если $b^2 - ac > 0$, мнимые сопряженные, если $b^2 - ac < 0$.

Если двойные точки совпадают с основными точками $A(h = \infty)$ и $B(h = 0)$ системы координат, то уравнение (3) должно иметь корни $h = 0$ и $h = \infty$, откуда следует, что $a = c = 0$ и соотношение (2) принимает вид

$$h + h' = 0,$$

т. е. координаты соответствующих точек равны по величине и противоположны по знаку. Из этого следует (§ 183), что точки M и M' гармонически сопряжены относительно точек A и B. Итак, всякая инволюция представляет собою гармоническое сопряжение относительно двух действительных или мнимых точек. Очевидно, что и обратно, попарное соответствие точек, гармонически сопряженных относительно двух заданных точек A, B есть инволюция с двойными точками A и B.

Все сказанное здесь может быть в точности перенесено на другие образы первой ступени, т. е. на пучок прямых и пучок плоскостей.

Два пучка прямых (или плоскостей) называются наложенными друг на друга, если их центры (или оси) совпадают. К этим пучкам можно применить все сказанное выше, заменив всюду слово „точка“ словом „прямая“ (или „плоскость“).

Рассмотрим, в качестве примера, *ортогональную инволюцию прямых пучка*, при которой каждой прямой соответствует прямая, к ней перпендикулярная. Для аналитического выражения этой инволюции, возьмем в качестве проективной координаты тангенс-координату $m = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, который прямая пучка составляет с постоянною прямою (см. § 185, замечание). Условие того, чтобы две прямые Δ и Δ' пучка, соответствующие значениям m и m' были перпендикулярны, заключается, как мы знаем, в следующем: $m = -\frac{1}{m'}$, или

$$mm' + 1 = 0.$$

Это — частный случай соотношения (2); следовательно, мы действительно имеем дело с инволюцией.

Двойными прямыми нашей инволюции являются прямые, угловые коэфициенты которых удовлетворяют уравнению: $m^2 + 1 = 0$, откуда $m = \pm i$; следовательно, как и следовало ожидать, двойные прямые мнимые. Это, как мы видим, изотропные прямые плоскости, на которой расположен пучок (см. § 162).

Обратно, инволюция, определяемая изотропными прямыми пучка есть ортогональная инволюция.

Таким образом взаимно перпендикулярные направления на плоскости могут быть определены, как направления, гармонически сопряженные относительно изотропных прямых этой плоскости.

Замечание. Легко видеть, что если в двух наложенных образах первой ступени три каких-либо различных элемента A, B, C одного

образа совпадают с тремя соответствующими элементами A', B', C' другого [1]), то это совпадение имеет место и для всех элементов.

Действительно, если M и M' какие-либо соответствующие элементы наших образов, то, по определению проективного соответствия,

$$(A, B, C, M) = (A', B', C', M'),$$

откуда $(A, B, C, M) = (A, B, C, M')$, ибо A', B', C' совпадают с A, B, C. Отсюда вытекает, что M' совпадает с M.

189. Проективные координаты на плоскости. Пусть x_1, x_2, x_3 — однородные декартовы координаты точки на плоскости. Введем вместо этих переменных новые: y_1, y_2, y_3, связанные с ними линейной однородной неособенной подстановкой,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) = m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3, \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) = m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3, \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) = m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где m_{ik} — постоянные коэфициенты, определитель которых отличен от нуля. Ввиду последнего условия, подстановку можно обратить и выразить x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}y_1 + l_{12}y_2 + l_{13}y_3, \\ x_2 &= l_{21}y_1 + l_{22}y_2 + l_{23}y_3, \\ x_3 &= l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + l_{33}y_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

Положение каждой точки M на плоскости определяется отношениями двух из величин x_1, x_2, x_3 к третьей. Из предыдущих формул следует, что положение точки M вполне определяется отношениями трех из величин y_1, y_2, y_3 к третьей [2]).

Величины y_1, y_2, y_3 называются *однородными проективными координатами* точки M. *Неоднородными* проективными координатами можно назвать отношения любых двух из величин y_1, y_2, y_3 к третьей.

Однородные проективные координаты можно применять совершенно аналогично тому, как мы применяли однородные декартовы координаты.

В частности, уравнение прямой в однородных проективных координатах — линейное и однородное, и обратно, всякое такое уравнение представляет прямую.

Действительно, если подставим в уравнение прямой

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \qquad (2)$$

выражения (1a), то получим уравнение вида

$$b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = 0, \qquad (2a)$$

---

[1]) Если элемент A одного образа совпадает с соответствующим элементом A' другого, то говорят, что элемент A соответствует самому себе.

[2]) Величины y_1, y_2, y_3 не могут быть равны одновременно нулю. Действительно, если в (1a) $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, то необходимо $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, что противоречит принятому условию.

где, как легко видеть,

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= l_{11}a_1 + l_{21}a_2 + l_{31}a_3, \\ b_2 &= l_{12}a_1 + l_{22}a_2 + l_{32}a_3, \\ b_3 &= l_{13}a_1 + l_{23}a_2 + l_{33}a_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Обратно, от уравнения вида (2а), при помощи подстановки (1), переходим к уравнению вида (2).

Величины b_1, b_2, b_3 суть *однородные проективные координаты прямой на плоскости.*

Важно отметить, что если прямая на плоскости задана параметрически

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'', \qquad (4)$$

где x_1', x_2', x_3' и x_1'', x_2'', x_3'' суть координаты двух постоянных точек A' и A'' прямой, то, в проективных координатах y_1, y_2, y_3, мы получим такое же представление

$$y_1 = \lambda y_1' + \mu y_1'', \quad y_2 = \lambda y_2' + \mu y_2'', \quad y_3 = \lambda y_3' + \mu y_3'', \qquad (4a)$$

где y_1', y_2', y_3' и y_1'', y_2'', y_3'' — проективные координаты тех же точек A' и A''; при этом, λ и μ, соответствующие данной точке прямой в представлении (4а) *те же самые*, что и в представлении (4).

Действительно, если подставить выражения (4) в правые части (1), то получим

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda(m_{11}x_1' + m_{12}x_2' + m_{13}x_3') + \mu(m_{11}x_1'' + m_{12}x_2'' + m_{13}x_3'') = \\ &= \lambda y_1' + \mu y_1'' \end{aligned}$$

и два аналогичных равенства, откуда и следует наше утверждение.

Совершенно аналогичным свойством обладает параметрическое представление пучка прямых

$$a_1 = \lambda a_1' + \mu a_1'', \quad a_2 = \lambda a_2'' + \mu a_2'', \quad a_3 = \lambda a_3' + \mu a_3'', \qquad (5)$$

которое преобразуется в

$$b_1 = \lambda b_1' + \mu b_1'', \quad b_2 = \lambda b_2' + \mu b_2'', \quad b_3 = \lambda b_3' + \mu b_3''. \qquad (5a)$$

Это следует также из того, что общее уравнение прямой, проходящей через пересечение двух данных прямых: $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ и $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$, имеющее вид: $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0$, преобразуется в уравнение

$$\lambda\psi_1(y_1, y_2, y_3) + \mu\psi_2(y_1, y_2, y_3) = 0, \qquad (5b)$$

где ψ_1 и ψ_2 — линейные формы, полученные из линейных форм φ_1, φ_2, заменой переменных x_1, x_2, x_3 их выражениями (1а).

На основании предыдущего легко выяснить *геометрическое значение проективных координат* на плоскости. Рассмотрим, с этой целью, три прямые [1])

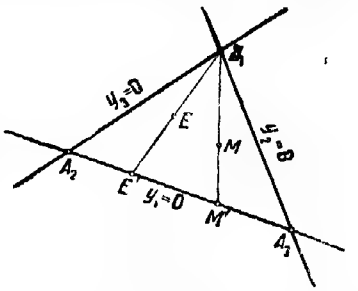
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (6)$$

[1]) Здесь f_1, f_2, f_3 обозначают то же, что и в формулах (1).

уравнения которых, в координатах y_1, y_2, y_3 имеют соответственно вид

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Эти прямые не пересекаются в одной точке (ибо, по условию, определитель, составленный из коэфициентов m_{ik} отличен от нуля) и, поэтому, образуют треугольник, который называется *основным треугольником* рассматриваемой *проективной системы координат*.



Черт. 119.

Обозначим вершины этого треугольника через A_1, A_2, A_3; а именно, через A_1 мы обозначим пересечение сторон $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$, через A_2 — пересечение сторон $y_3 = 0$, $y_1 = 0$ и через A_3 — пересечение сторон $y_1 = 0, y_2 = 0$. Таким образом проективные координаты этих точек будут [1]: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Введем еще в рассмотрение *единичную точку*, т. е. точку E с координатами (1, 1, 1) [2].

Вычислим теперь двойное отношение четырех прямых, проходящих через вершину A_1 и через точки A_2, A_3, E, M. Уравнение всякой прямой, проходящей через A_1, т. е. через пересечение прямых $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$ (черт. 119) имеет вид $\lambda y_2 + \mu y_3 = 0$, или, полагая $h = \frac{\mu}{\lambda}$,

$$y_2 + h y_3 = 0, \tag{7}$$

где h — параметр, определяющий положение рассматриваемой прямой. При $h = \infty$ получаем прямую A_1A_2 (т. е. прямую $y_3 = 0$), при $h = 0$ — прямую A_1A_3 (т. е. $y_2 = 0$), при $h = -1$ прямую A_1E. Поэтому, двойное отношение прямых A_1A_2, A_1A_3, A_1E, A_1M, которое мы, для краткости, обозначим символом

$$A_1(A_2, A_3, E, M),$$

будет дано формулой

$$A_1(A_2, A_3, E, M) = (\infty, 0, -1, h) = -h,$$

где через h обозначено то значение параметра в (7), которое соответствует прямой A_1M. Если y_1, y_2, y_3 обозначают координаты M и следовательно, на основании (7), $h = -\frac{y_2}{y_3}$, предыдущая формула дает первую из следующих формул:

$$\frac{y_2}{y_3} = A_1(A_2, A_3, E, M), \quad \frac{y_3}{y_1} = A_2(A_3, A_1, E, M),$$
$$\frac{y_1}{y_2} = A_3(A_1, A_2, E, M); \tag{8}$$

[1]) Для точки A_1 имеем, например, $y_1 \neq 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; так как мы можем заменить координаты пропорциональными им величинами, мы можем считать $y_1 = 1$.

[2]) Или, что все равно с координатами (k, k, k), где k — произвольное число, отличное от 0.

две последние формулы получены из первой круговой перестановкой значков 1, 2, 3.

Мы видим, таким образом, каково геометрическое значение отношений однородных координат y_1, y_2, y_3.

Смысл формул (8) сделается, пожалуй, еще более наглядным, если записать их так:

$$\frac{y_2}{y_3} = (A_2, A_3, E', M') \quad \text{(и две аналогичные)}, \tag{8a}$$

где E' и M' обозначают точки пересечения прямых A_1E и A_1M с прямою A_2A_3. Последняя формула показывает, что $\frac{y_2}{y_3}$ есть (неоднородная) проективная координата точки M' на прямой A_2A_3 при основных точках A_2A_3 и единичной точке E'.

Легко показать, что всякие три неколлинеарные точки A_1, A_2, A_3 могут быть взяты в качестве вершин основного треугольника и единичная точка E может быть также выбрана произвольно (лишь бы она не находилась на одной из сторон [1]) основного треугольника).

Действительно, пусть $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$, где f_1, f_2, f_3 — линейные однородные независимые формы переменных x_1, x_2, x_3, представляют уравнения сторон A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Так как, в координатах y_1, y_2, y_3 уравнения этих прямых должны иметь вид $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, то должно быть:

$$y_1 = \lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = \lambda_2 f_2(x_1, x_2, x_3), \quad y_3 = \lambda_3 f_3(x_1, x_2, x_3), \tag{9}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — постоянные. Остается подобрать эти постоянные из условия, чтобы $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ при $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, где x_1^0, x_2^0, x_3^0 — координаты заданной точки E. Это всегда возможно, так как $f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \neq 0$, ибо E не лежит на прямой A_2A_3; аналогично для f_2 и f_3. [Если бы мы заменили требование $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ требованием $y_1 = y_2 = y_3 = k$, где k — произвольное число, отличное от нуля, то вместо прежних $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ получили бы $k\lambda_1, k\lambda_2, k\lambda_3$, т. е. правые части (9) умножились бы на одно и то же число, что не имеет значения.]

Соотношения (9) имеют вид (1) и поэтому y_1, y_2, y_3 суть проективные координаты, удовлетворяющие всем поставленным требованиям.

Одна из сторон основного треугольника может быть и несобственной. Тогда мы опять придем к декартовым координатам. Действительно, если, например, A_1 и A_2 — несобственные точки и, следовательно, A_2A_3 — несобственная прямая, то уравнение ее есть $x_3 = 0$ и, следовательно, в формулах (9) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$. Мы можем также считать $\lambda_3 = 1$ (это сводится к умножению y_1, y_2, y_3 на одно и то же число) и соотношения (9) примут вид

$$y_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3, \quad y_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3, \quad y_3 = x_3,$$

где k_{ij} — постоянные, а это — формулы преобразования декартовых координат в декартовы (§ 173) и наше утверждение доказано. Легко доказать его также непосредственно, исходя из формул (8); см. ниже упражнения.

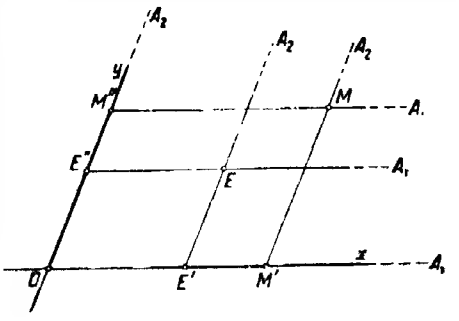
[1]) Под стороною подразумевается вся прямая, а не только отрезок между вершинами.

Проективные координаты прямой имеют весьма простое геометрическое значение, аналогичное значению координат точки, которое дается формулами (8). Чтобы выяснить это значение, достаточно перейти от координат точки к координатам прямой, пользуясь принципом взаимности (см. ниже, упражнения).

Упражнения и дополнения

1. Выяснить, пользуясь формулами (8), геометрическое значение проективных координат в случае, когда сторона A_1A_2 основного треугольника — несобственная прямая.

Решение. Обозначим A_3 через O, а через Ox, Oy — прямые, в направлении которых удалены точки A_1 и A_2. Пусть E произвольно выбранная единичная точка. Она должна быть собственной (не находиться на стороне A_1A_2) и не должна лежать на Ox и Oy. Пусть E', E'' — проекции E на оси Ox и Oy (взятые параллельно Oy и Ox), а M', M'' — проекции произвольной точки M на те же оси (черт. 120).



Черт. 120.

На основании второй формулы (8), отношение $\frac{y_3}{y_1}$ равно двойному отношению четырех прямых пучка с центром в A_2 (т. е. четырех прямых, параллельных Oy) и проходящих через точки O, A_1, E и M; но это двойное отношение равно двойному отношению точек O, A_1, E', M' прямой Ox. Следовательно [1]),

$$\frac{y_3}{y_1} = (O,\ A_1,\ E',\ M') = \frac{OE'}{OM'},$$

откуда

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{OM'}{OE'}.$$

Совершенно аналогично получим

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{OM''}{OE''}.$$

Итак, y_1, y_2, y_3 суть однородные декартовы координаты; началом является O, а координатными векторами $\mathbf{u} = \overrightarrow{OE'}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OE''}$.

2. Пусть b_1, b_2, b_3 — проективные координаты прямой Δ. Обозначим через Δ_1, Δ_2, Δ_3 стороны основного треугольника, противоположные вершинам A_1, A_2, A_3, а через E — единичную прямую, для которой $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ (или, просто

---

[1]) Если бы точка A_1 была собственной, то было бы

$$(O,\ A_1,\ E',\ M') = \frac{OE'}{E'A_1} : \frac{OM'}{M'A_1} = \frac{OE'}{OM'} \cdot \frac{M'A_1}{E'A_1}.$$

Но так как A_1 несобственная точка, то мы должны считать $\frac{M'A_1}{E'A_1} = 1$ (ибо отношение $\frac{M'A}{E'A}$ стремится к 1, когда собственная точка A удаляется в бесконечность).

$b_1 = b_2 = b_3 \neq 0$). Будем обозначать символом $\Delta_1(\Delta_2, \Delta_3, E, \Delta)$ двойное отношение точек пересечения прямых Δ_2, Δ_3, E, Δ с прямою Δ_1. Требуется доказать, что имеют место формулы

$$\frac{b_2}{b_3} = \Delta_1(\Delta_2, \Delta_3, E, \Delta) \quad \begin{matrix}(\text{и две аналогичные, получаемые}\\ \text{круговой перестановкой}).\end{matrix} \tag{10}$$

Эти формулы выясняют геометрический смысл проективных координат прямой.

Доказательство. Будем определять положение точки на прямой Δ_1 ($y_1 = 0$) неоднородной проективной координатой $y = \frac{y_2}{y_3}$ на этой прямой. Точкам A_2 и A_3 (это точки пересечения Δ_1 с Δ_2 и Δ_3) соответствуют значения $y = 0$ и $y = \infty$. Значение y, соответствующее точке пересечения Δ_1 с прямою Δ, получим полагая $y_1 = 0$ в уравнении $b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = 0$ прямой Δ, что дает

$$y = \frac{y_2}{y_3} = -\frac{b_3}{b_2}.$$

Наконец, значение y, соответствующее точке пересечения Δ_1 с E получим, полагая в последней формуле $b_2 - b_3 = 1$; это дает $y = -1$. Следовательно [1]),

$$\Delta_1(\Delta_2, \Delta_3, E, \Delta) = \left(0, \infty, -1, -\frac{b_3}{b_2}\right) = \frac{b_2}{b_3}.$$

а это и требовалось доказать [2]).

190. Проективные координаты в пространстве. Проективные координаты в пространстве определяются совершенно аналогично координатам на плоскости. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — однородные декартовы координаты точки в пространстве. Введем новые переменные y_1, y_2, y_3, y_4 линейной однородной неособенной подстановкой:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 + m_{14}x_4,\\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3 + m_{24}x_4,\\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{33}x_3 + m_{34}x_4,\\ y_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = m_{41}x_1 + m_{42}x_2 + m_{43}x_3 + m_{44}x_4. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Величины y_1, y_2, y_3, y_4, отношения которых вполне определяют положение точки M в пространстве, называются *однородными проективными координатами*. Если $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$, то мы опять возвращаемся к декартовым координатам.

Ввиду полной аналогии с предыдущим, мы ограничимся только краткими указаниями.

Уравнение плоскости в проективных однородных координатах имеет такой же вид, как и в однородных декартовых. Также и уравнения прямой.

Параметрическое представление прямой имеет вид

$$y_1 = \lambda y_1' + \mu y_1'', \quad y_2 = \lambda y_2' + \mu y_2'', \quad y_3 = \lambda y_3' + \mu y_3'', \quad y_4 = \lambda y_4' + \mu y_4'', \tag{2}$$

---

[1]) Имеем $(0, \infty, \alpha, \beta) = \frac{1}{(\infty, 0, \alpha, \beta)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

[2]) Доказательство это слегка (по внешнему виду) отличается от доказательства соответственного предложения для координат точки. Предлагаем читателю провести доказательство иначе, так чтобы оно получилось непосредственно из доказательства для координат точки, путем перехода ко взаимным образам.

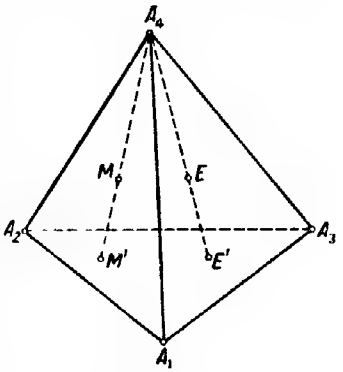
где λ и μ — параметры, которые могут рассматриваться как однородные проективные координаты на данной прямой.

Общее уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую пересечения плоскостей $\varphi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ и $\varphi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ имеет вид

$$\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0, \tag{3}$$

где λ и μ — произвольные параметры.

Легко выяснить геометрический смысл проективных координат в пространстве. Плоскости $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ или $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ образуют *основной тетраэдр*. Вершины этого тетраэдра, противолежащие граням $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ суть точки A_1 (1, 0, 0, 0), A_2 (0, 1, 0, 0), A_3 (0, 0, 1, 0), A_4 (0, 0, 0, 1); здесь в скобках стоят значения координат [1]) y_1, y_2, y_3, y_4 (черт. 121).



Черт. 121.

Введем в рассмотрение „единичную точку" E (1, 1, 1, 1) и проведем через какое-либо ребро A_iA_j (i, j два неравных между собою числа из чисел 1, 2, 3, 4) четыре плоскости, проходящие соответственно, через A_k, A_l, E и M; A_k и A_l обозначают две вершины, отличные от A_i и A_j, так что ребра A_iA_j и A_kA_l являются противоположными (как например ребра A_2A_4 и A_1A_3; черт. 121).

Двойное отношение этих четырех плоскостей обозначим символом: $A_iA_j(A_k, A_l, E, M)$. Тогда, как легко убедиться,

$$\frac{y_k}{y_l} = A_iA_j(A_k, A_l, E, M). \tag{4}$$

Действительно [2]), общее уравнение плоскостей, проходящих через ребро A_iA_j, которое является пересечением граней $y_k = 0$ и $y_l = 0$, имеет вид

$$y_k + hy_l = 0. \tag{5}$$

Грани $y_l = 0$ (проходящей через A_k) соответствует $h = \infty$, а грани $y_k = 0$ (проходящей через A_l), $h = 0$; наконец, плоскости, проходящей через E, соответствует $h = -1$. Следовательно,

$$A_iA_j(A_k, A_l, E, M) = (\infty, 0, -1, h) = -h,$$

где h обозначает то значение параметра в (5), которое соответствует плоскости, проходящей через M (y_1, y_2, y_3, y_4); на основании (5), $h = -\frac{y_k}{y_l}$, и мы получаем формулу (4).

Предоставляем читателю доказать следующее: если через вершину A_4

[1]) Для точки A_1 вместо (1, 0, 0, 0) можно взять (k, 0, 0, 0), где k — любое число, не равное нулю. Также и для остальных вершин.

[2]) Рекомендуем читателю провести приводимые рассуждения, взяв для i, j, k, l определенные значения, например $i = 2$, $j = 4$, $k = 1$, $l = 3$.

провести прямые A_4E и A_4M и если E', M' — точки пересечения этих прямых с гранью $A_1A_2A_3$, то y_1, y_2, y_3 суть проективные координаты точки M' на плоскости упомянутой грани при основном треугольнике $A_1A_2A_3$ и единичной точке E'; аналогично и для других граней.

Аналогично определяются *проективные координаты плоскости* и выясняется их геометрическое значение.

Легко, далее, видеть (ср. предыдущий параграф), что любой тетраэдр можно взять в качестве основного, и выбрать любую точку E в качестве единичной (лишь бы она не находилась ни на одной из граней тетраэдра).

191. Преобразование проективных координат на плоскости и в пространстве. Начнем со случая *координат на плоскости*. Пусть вместо проективных координат y_1, y_2, y_3, определяемых подстановкой (1) § 189, вводятся другие координаты z_1, z_2, z_3 определяемые другой неособенной подстановкой:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= m'_{11}x_1 + m'_{12}x_2 + m'_{13}x_3, \\ z_2 &= m'_{21}x_1 + m'_{22}x_2 + m'_{23}x_3, \\ z_3 &= m'_{31}x_1 + m'_{32}x_2 + m'_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Выразив обратно x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3 и подставив эти выражения в формулы (1) § 189 получим опять линейную однородную подстановку:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= n_{11}z_1 + n_{12}z_2 + n_{13}z_3, \\ y_2 &= n_{21}z_1 + n_{22}z_2 + n_{23}z_3, \\ y_3 &= n_{31}z_1 + n_{32}z_2 + n_{33}z_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Также точно можно выразить z_1, z_2, z_3 через y_1, y_2, y_3, откуда следует, что подстановка (3) — неособенная. Таким образом, *однородные проективные координаты одной и той же точки относительно двух различных систем координат связаны друг с другом линейной однородной неособенной подстановкой.*

Для того чтобы перейти от одной системы проективных координат к другой, нет, разумеется, надобности пользоваться декартовыми координатами, как промежуточной стадией. Переход можно произвести непосредственно, если задан новый основной треугольник и новая единичная точка. Для этого достаточно дословно повторить сказанное в § 189; действительно, все сказанное там останется в силе, если считать, что x_1, x_2, x_3 — произвольные проективные координаты, не обязательно декартовы.

Все сказанное, без всяких изменений, переносится на координаты прямых на плоскости.

Обобщение на случай *пространства трех измерений* настолько очевидно, что мы на нем не останавливаемся.

192. Уравнения алгебраических линий и поверхностей в однородных проективных координатах. Пусть

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где Φ — однородный полином, есть уравнение алгебраической линии в однородных декартовых координатах. Подставляя на место x_1, x_2, x_3

их выражения через однородные проективные координаты y_1, y_2, y_3 (мы знаем, что x_1, x_2, x_3 выражаются через y_1, y_2, y_3 линейными однородными функциями), получим уравнение такого же вида:

$$\Psi(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

где Ψ — однородный полином, того же порядка, что и Φ. Поэтому при определении порядка линии можно пользоваться не только декартовыми, но и проективными координатами.

Точно также, уравнение алгебраической поверхности в однородных проективиых координатах имеет вид:

$$\Psi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

где Ψ однородный полином, порядок которого есть порядок поверхности.

Все сказанное в § 174 относительно уравнения линии или поверхности, без всяких изменений переносится на уравнения в проективных координатах.

Следует только обратить внимание на то обстоятельство, что на плоскости уравнение $y_3 = 0$ уже не изображает, вообще говоря, несобственную прямую, а в пространстве, уравнение $y_4 = 0$ не изображает, вообще говоря, несобственную плоскость. Вообще, *при применении проективных координат, несобственные элементы ничем не выделяются среди собственных.*

193. Проективные точечные преобразования плоскости и пространства. Выше (§ 182) было введено понятие проективного соответствия образов первой ступени. Понятие это естественно распространяется на образы второй и третьей ступеней. В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением точечных проективных преобразований плоскости и пространства.

Начнем с определения *проективного точечного соответствия* между двумя плоскостями. Так называется обратимо-однозначное соответствие между двумя плоскостями Π и Π' (различными или наложенными друг на друга), при котором однородные проективные координаты точки одной плоскости суть линейные и однородные функции однородных проективных координат соответствующей точки другой.

Таким образом, если $M(x_1, x_2, x_3)$ и $M'(x_1', x_2', x_3')$ точки плоскостей Π и Π' соответствующие друг другу, то

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}x_1' + l_{12}x_2' + l_{13}x_3', \\ x_2 &= l_{21}x_1' + l_{22}x_2' + l_{23}x_3', \\ x_3 &= l_{31}x_1' + l_{32}x_2' + l_{33}x_3', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где l_{ik} — постоянные, причем определитель, составленный из них отличен от нуля (иначе соответствие не было бы обратимо однозначным). Величины x_1', x_2', x_3' выражаются через x_1, x_2, x_3 аналогичными формулами, полученными решением системы (1) относительно x_1', x_2', x_3':

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= l'_{11}x_1 + l'_{12}x_2 + l'_{13}x_3, \\ x_2' &= l'_{21}x_1 + l'_{22}x_2 + l'_{23}x_3, \\ x_3' &= l'_{31}x_1 + l'_{32}x_2 + l'_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

Проективное точечное соответствие называется также *гомографическим* соответствием (*гомографией*) или *коллинеарным соответствием* (*коллинеацией*); последнее название указывает на то, что при таком соответствии коллинеарным точкам одной плоскости соответствуют также коллинеарные точки другой, как это будет доказано ниже (пункт 2°).

Каждой фигуре плоскости Π соответствует определенная фигура плоскости Π' и обратно. Эти фигуры называются *гомографически* (или *коллинеарно*) *соответствующими*. Говорят также, что одна фигура получается из другой гомографическим (коллинеарным) преобразованием.

Отметим основные свойства гомографических преобразований.

1°. Два гомографических преобразования, произведенные одно за другим, дают опять гомографическое преобразование. Преобразование, обратное гомографическому — также гомографическое. Эти свойства, непосредственно вытекающие из свойств линейных подстановок (см. Добавление, § 9) показывают, что *совокупность гомографических преобразований образует группу*.

2°. Каждой прямой на одной плоскости соответствует прямая на другой, каждому пучку — пучок. Действительно, пусть

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{2}$$

есть прямая на плоскости Π. Уравнение соответствующей прямой на Π' получим, подставляя в (1), на место x_1, x_2, x_3 их выражения (1) через x_1', x_2', x_3', что дает уравнение такого же вида:

$$a_1'x_1' + a_2'x_2' + a_3'x_3' = 0, \tag{2a}$$

где a_1', a_2', a_3' определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= l_{11}a_1 + l_{21}a_2 + l_{31}a_3, \\ a_2' &= l_{12}a_1 + l_{22}a_2 + l_{32}a_3, \\ a_3' &= l_{13}a_1 + l_{23}a_2 + l_{33}a_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как a_1, a_2, a_3 не равны нулю одновременно (как коэфициенты уравнения определенной прямой), то и a_1', a_2', a_3' не равны одновременно нулю (ибо определитель подстановки отличен от нуля).

Следовательно, прямой (2) соответствует прямая (2а). Мы видим, кроме того, что координаты соответствующих прямых на Π и Π' связаны также линейной неособенной подстановкой [1]). Применяя к координатам прямой те же рассуждения, что и к координатам точки, мы легко покажем, что пучку прямых на плоскости Π соответствует пучок прямых на Π' и обратно.

3°. Гомографическое соответствие плоскостей Π и Π' приводит к проективное соответствие образы первой ступени, принадлежащие этим плоскостям.

Действительно, рассмотрим на Π прямолинейный ряд точек, заданный параметрически,

$$x_1 = \lambda y_1 + \mu z_1, \quad x_2 = \lambda y_2 + \mu z_2, \quad x_3 = \lambda y_3 + \mu z_3, \tag{4}$$

[1]) Сравнение подстановок (1) и (3) показывает, что координаты точек и прямых — контравариантны (§ 68).

где (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) — две какие-либо точки рассматриваемого прямолинейного ряда. Подставляя эти выражения в (1а) получим формулы такого же вида

$$x_1' = \lambda y_1' + \mu z_1', \quad x_2' = \lambda y_2' + \mu z_2', \quad x_3' = \lambda y_3' + \mu z_3', \tag{4а}$$

где (x_1', x_2', x_3'), (y_1', y_2', y_3'), (z_1', z_2', z_3') обозначают точки плоскости Π' соответствующие точкам (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) плоскости Π. Из (4) и (4а) снова заключаем, что прямолинейному ряду на Π соответствует прямолинейный ряд на Π'. Кроме того, мы видим, что эти ряды проективны, ибо двойное отношение четырех точек каждого ряда определяется двойным отношением четырех значений величины $h = \frac{\lambda}{\mu}$; соответствующие же точки обоих рядов определяются одним и тем же значением h, как это следует из (4) и (4а).

Точно также докажем предложение для двух соответствующих пучков на Π и Π'.

Этими свойствами и объясняется название „проективное соответствие". Кроме того, легко показать, что гомографическое соответствие между плоскостями можно всегда рассматривать, как результат конечного ряда проектирований и сечений (см. ниже, упражнения).

Перенесение понятия гомографии на *случай пространства* напрашивается само собою. Две фигуры пространства называются гомографически (или коллинеарно) соответствующими, если однородные координаты соответствующих точек связаны линейной однородной неособенной подстановкой. И здесь гомографические преобразования образуют группу, прямые переходят в прямые. Кроме того, как легко видеть, плоскости переходят в плоскости, пучки плоскостей — в пучки плоскостей. Образы первой и второй ступени, соответствующие друг другу — проективны. Мы предоставляем читателю доказать эти свойства.

Аффинные преобразования составляют подгруппу гомографических. В случае двух измерений эта аффинная подгруппа характеризуется тем, что несобственная прямая плоскости Π соответствует несобственной прямой плоскости Π' (если Π и Π' совмещены, то несобственная прямая переходит сама в себя). Действительно, будем применять теперь однородные *декартовы* координаты. Несобственная прямая плоскости Π характеризуется уравнением

$$x_3 = 0.$$

Соответствующая ей прямая имеет, в силу (1), уравнение

$$l_{31}x_1' + l_{32}x_2' + l_{33}x_3' = 0.$$

Для того чтобы и эта прямая была несобственной, т. е. имела уравнением $x_3' = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $l_{31} = l_{32} = 0$, $l_{33} \neq 0$; но тогда подстановка (1) сводится к следующей (мы можем положить $l_{33} = 1$, так как мы имеем право заменять однородные координаты пропорциональными им величинами):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}x_1' + l_{12}x_2' + l_{13}x_3', \\ x_2 &= l_{21}x_1' + l_{22}x_2' + l_{23}x_3', \\ x_3 &= x_3', \end{aligned}\right\}$$

которая и характеризует аффинное преобразование.

Аналогично, аффинные преобразования пространства выделяются среди гомографических тем, что при аффинных преобразованиях несобственная плоскость переходит сама в себя.

Свойства фигур, остающихся неизменными при гомографических преобразованиях называются *проективными*. Предметом проективной геометрии является изучение проективных свойств фигур.

В проективной геометрии несобственные элементы ничем не выделяются среди прочих. Наоборот, в аффинной геометрии несобственные элементы играют особую роль.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что если вершины A', B', C' основного координатного треугольника и единичная точка E' на плоскости Π' суть точки, соответствующие вершинам A, B, C координатного треугольника на плоскости Π и единичной точке E, то формулы (1) и (1а) сводятся к таким:

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'$$

(или, что сводится к тому же, $x_1 = \rho x_1'$, $x_2 = \rho x_2'$, $x_3 = \rho x_3'$, где ρ — произвольный множитель пропорциональности, отличный от нуля).

Доказательство непосредственно вытекает из геометрического значения проективных координат и из свойства двойного отношения оставаться неизменным при проективном преобразовании.

2. Доказать, что проективное соответствие между двумя плоскостями Π и Π' вполне определено, если заданы четыре точки A', B', C', D' плоскости Π', соответствующие четырем точкам A, B, C, D плоскости Π; предполагается, что никакие три из точек A, B, C, D не коллинеарны.

Доказательство. Возьмем A, B, C в качестве вершин основного треугольника на Π, а D — в качестве единичной точки; возьмем, далее A', B', C' в качестве вершин основного треугольника на Π', а D' — в качестве единичной точки.

Тогда соответствие между Π и Π' сводится к следующему:

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3',$$

т. е. вполне определено.

3. Доказать предложения, аналогичные двум предыдущим для случая пространства (во втором предложении, вместо четырех точек, будет теперь пять точек, из которых никакие четыре не компланарны).

4. Доказать, что всякая гомография между плоскостями Π и Π' есть результат конечного числа проектирований и сечений.

Доказательство. Мы можем всегда считать, что плоскости Π и Π' не совмещены, ибо, в противном случае, мы можем перейти, например, от плоскости Π' к другой, с ней несовмещенной, путем одного проектирования и сечения.

Рассмотрим теперь три случая 1°. Пусть все точки прямой пересечения[1]) Δ плоскостей Π и Π' соответствуют самим себе. Пусть A и B две какие-либо точки плоскости Π, а A', B' — соответствующие им точки плоскости Π'. Пусть M точка пересечения прямой AB с Δ. Точка M' пересечения $A'B'$ с Δ есть точка, соответствующая точке M (ибо M и M' суть точки пересечения соответствующих прямых). Следовательно, M и M' совпадают (ибо точки прямой Δ, по условию, соответствуют самим себе). Таким образом четыре точки A, B, A', B' расположены на одной плоскости (плоскости, проходящей через прямые MAB и $MA'B'$), откуда следует, что прямые AA' и BB', как компланарные, пересекаются в некоторой точке O (собственной или несобственной).

Если мы теперь возьмем на Π и Π' любую другую пару точек C и C', соответствующих друг другу, то прямая CC', на основании тех же соображений, должна будет пересечь обе прямые AA' и BB'. Очевидно, что если прямая CC'

[1]) Прямая Δ может быть и несобственной.

не находится в одной плоскости с AA' и BB', она необходимо пройдет через O. Она пройдет через O и в том случае, если находится в одной плоскости с AA' и BB'; действительно, возьмем еще прямую DD' (где D и D' соответствующие точки на Π и Π'), не находящуюся в одной плоскости с AA' и BB'. Тогда DD' пройдет через O и поэтому прямая CC', которая должна пересечь все три прямые AA', BB', CC', необходимо проходит через O.

Отсюда и следует, что плоскости Π и Π' — перспективны (центром перспективы является O) и что наша гомография получается проектированием Π на Π' из центра O.

2°. Пусть прямая Δ содержит одну точку M, такую, что соответствующая точка M' совпадает с M.

Проведем из M прямую на Π и возьмем на ней две произвольные точки A и B. Пусть A' и B' точки на Π, соответствующие A и B.

Как было показано выше, прямые AA' и BB' пересекутся в некоторой точке O. Спроектируем из этой точки плоскость Π' на вспомогательную плоскость Π_1, проходящую через прямую ABM.

Плоскости Π и Π_1, находящиеся, очевидно, в проективном соответствии, имеют общую прямую ABM; при этом три точки A, B, M этой прямой соответствуют самим себе. Следовательно, все точки этой прямой соответствуют самим себе[1]) и мы приходим к предыдущему случаю.

3°. Возьмем самый общий случай. Пусть A и A' какие-либо точки на Π и Π', соответствующие друг другу. Возьмем на прямой AA' какую-либо точку O и спроектируем из нее плоскость Π' на какую-либо плоскость Π_1, проходящую через A. Точка A прямой пересечения плоскостей Π и Π_1 будет соответствовать самой себе и мы приходим к предыдущему случаю.

194. Корреляция (взаимность). Выше мы рассмотрели тот вид проективного соответствия двух плоскостей, когда точкам соответствуют точки, а прямым — прямые. Рассмотрим еще один вид соответствия между плоскостями, тоже называемого проективным, при котором точкам соответствуют прямые, а прямым — точки. Этот вид соответствия, который будет сейчас точно определен, называется *корреляцией* или *взаимностью*.

А именно, корреляцией (взаимностью) называется соответствие, выражаемое формулами вида:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= m_{11}x_1' + m_{12}x_2' + m_{13}x_3', \\ a_2 &= m_{21}x_1' + m_{22}x_2' + m_{23}x_3', \\ a_3 &= m_{31}x_1' + m_{32}x_2' + m_{33}x_3', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где a_1, a_2, a_3 — координаты прямой на плоскости Π, а x_1', x_2', x_3' — координаты точки на Π'; при этом предполагается, что подстановка (1) — неособенная. Решая (1) относительно x_1', x_2', x_3', получим

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= m_{11}'a_1 + m_{12}'a_2 + m_{13}'a_3, \\ x_2' &= m_{21}'a_1 + m_{22}'a_2 + m_{23}'a_3, \\ x_3' &= m_{31}'a_1 + m_{32}'a_2 + m_{33}'a_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

Подстановка (1) приводит в обратимо-однозначное соответствие каждой точке $M'(x_1', x_2', x_3')$ плоскости Π' определенную прямую $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ плоскости Π.

Легко видеть, что точкам M' плоскости Π', расположенным на данной

[1]) См. § 188, замечание.

прямой Δ', соответствуют прямые плоскости II, проходящие через одну и ту же точку M. Действительно, пусть

$$a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + a'_3x'_3 = 0 \qquad (2)$$

уравнение прямой Δ', где a'_1, a'_2, a'_3 — постоянные. Внося в него выражения (1а), получим линейное уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

связывающее переменные a_1, a_2, a_3, где через x_1, x_2, x_3 — обозначены постоянные:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m'_{11}a'_1 + m'_{21}a'_2 + m'_{31}a'_3, \\ x_2 &= m'_{12}a'_1 + m'_{22}a'_2 + m'_{32}a'_3, \\ x_3 &= m'_{13}a'_1 + m'_{23}a'_2 + m'_{33}a'_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Следовательно, прямые (a_1, a_2, a_3) все проходят через точку $M(x_1, x_2, x_3)$.

Таким образом каждому прямолинейному ряду Δ' на Π' соответствует пучок прямых на II, центр которого $M(x_1, x_2, x_3)$ определяется формулами (3). Короче, можно сказать, что каждой прямой Δ' на Π' соответствует вполне определенная точка M на II.

Легко видеть, что прямолинейный ряд и соответствующий ему пучок — проективны; доказательство мы предоставляем читателю.

Корреляции не образуют группы; действительно, легко видеть, что две корреляции, произведенные одна за другой, приводят к гомографии. Наоборот, *совокупность всех гомографий и корреляций*, очевидно, *составляет группу*, называемую *группой проективности*.

Корреляция (*взаимность*) *в пространстве* определяется совершенно аналогичным образом. Только роль прямых играют здесь плоскости, так что в пространстве, при корреляции, точкам соответствуют плоскости и обратно.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

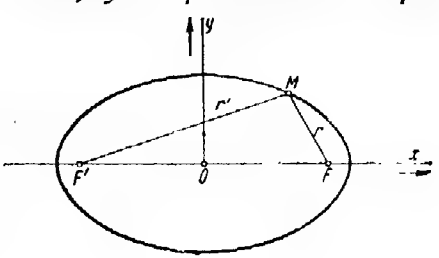
С точки зрения алгебраической, наиболее простыми линиями после линий первого порядка (прямых) являются линии второго порядка. Мы увидим в дальнейшем, что всякая (действительная) линия второго порядка, если только она не распадается на совокупность двух прямых, есть либо *эллипс*, либо *гипербола*, либо *парабола*, определения которых будут даны в ближайших параграфах. Эти три линии носят также общее название конических сечений, ибо, как будет показано в § 201 и 202, они могут быть получены пересечением обыкновенного кругового конуса плоскостями.

Мы начнем с простейших определений эллипса, гиперболы и параболы и вывода их простейших уравнений.

Во всей этой главе будет итти речь, если противное не оговорено особо, о линиях, расположенных в одной и той же плоскостн.

I. НОРМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

195. Определение эллипса и его нормальное уравнение. *Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная.* Упомянутые в определенин постоянные точки называются *фокусами* эллипса. Обозначим их через F и F', а расстояние между ними через $2c$. Наконец, пусть $2a$ обозначает постоянную (положительную) величину, которая должна равняться сумме расстояний какой-либо точки M эллипса до фокусов (черт. 122).



Черт. 122.

По определению имеем

$$r' + r = 2a, \tag{1}$$

где

$$r' = |F'M|, \; r = |FM|.$$

Ясно, что для возможности существования нашего геометрического места должно быть $2c \leqslant 2a$.

В случае, когда $2c = 2a$, наше геометрическое место, очевидно, есть отрезок прямой, заключенный между F' и F. Этот случай, как не представляющий интереса, мы исключим из рассмотрения, и будем всегда считать, что $2c < 2a$, т. е.

$$c < a. \tag{2}$$

Если $c = 0$, то точки F' и F совпадают, и

$$|F'M| = |FM| = a.$$

В этом случае наш эллипс обращается в окружность радиуса a. Таким образом окружность есть частный случай эллипса.

Возьмем начало прямоугольных координат в середине отрезка $F'F$ и направим ось Ox по этому отрезку так, чтобы точки F' и F имели, соответственно, координаты

$$(-c,\ 0),\ (+c,\ 0).$$

Расстояния r' и r точки $M(x, y)$ до этих точек будут даны формулами:

$$r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\quad r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3}$$

На основании (1) имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{4}$$

Это и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Его можно значительно упростить, избавившись от радикалов.

Перенося с этой целью второй радикал направо и возводя обе части в квадрат, получим:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

откуда, перенося радикал в левую часть, а остальные члены в правую и произведя сокращения, будем иметь

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{5}$$

Возведя снова в квадрат, получим после очевидных упрощений

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Величина $a^2 - c^2$ положительна, ибо $c < a$. Вводя обозначение

$$b^2 = a^2 - c^2,\ b = \sqrt{a^2 - c^2}\quad (b < a) \tag{6}$$

и разделяя обе части на a^2b^2, получим окончательно уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

называемое *нормальным уравнением эллипса.*

Прежде чем приступить к изучению формы эллипса при помощи этого уравнения, укажем простой способ, который дает возможность начертить эллипс непрерывным движением. Именно, можно с этой целью поступить так: закрепить концы нерастяжимой нити длины $2a$ в фоку-

сах F', F и, натягивая эту нить острием карандаша, водить им по бумаге, заставляя его скользить вдоль нити. Тогда это острие опишет эллипс, как следует из самого определения этой кривой.

Замечание. При выводе нормального уравнения эллипса нам пришлось уничтожить радикалы в уравнении (4); с этой целью мы дважды применяли операцию возведения в квадрат обеих частей уравнения. Как известно, такая операция может, вообще говоря, привести к уравнению, не эквивалентному исходному, а именно к уравнению, имеющему не только те решения, которые имеет исходное, но еще и другие „лишние" решения. Поэтому возникает вопрос: не содержит ли кривая, выражаемая уравнением (7) таких точек, которые не удовлетворяют исходному уравнению (4), т. е. условию $r' + r = 2a$. Легко показать, что это не так. Действительно, произведя операции преобразования в обратном порядке, увидим, что если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (7), то они удовлетворяют условию:

$$\pm r' \pm r = 2a.$$

Покажем, что это последнее уравнение может быть удовлетворено (действительными точками) только тогда, когда берутся верхние знаки. Действительно, уравнение $-r' - r = 2a$, очевидно, не имеет решений, ибо $r > 0$, $r' > 0$. Далее, по той же причине, уравнение $r' - r = 2a$ не имеет решений, если $r' < r$. Это последнее уравнение не имеет решений и при $r' \geqslant r$, ибо, как известно, разность сторон треугольника всегда не превосходит третьей стороны, откуда следует:

$$r' - r \leqslant 2c < 2a.$$

Точно так же можно показать, что и уравнение $r - r' = 2a$ не имеет решений. Итак, остается только одна возможность: $r' + r = 2a$, и наше утверждение доказано.

196. Исследование формулы эллипса. Нормальное уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

выведенное в предыдущем параграфе показывает, что если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то ему же принадлежат и точки $M(x, -y)$, $M(-x, y)$, $M(-x, -y)$, ибо в уравнение (1) входят только квадраты величин x и y, благодаря чему замена знака одной из координат на обратный не нарушает равенства.

Это показывает, что оси Ox и Oy являются *осями симметрии* [1]) эллипса. Сокращенно эти прямые называются *осями эллипса*.

Из сказанного выше также очевидно, что эллипс симметричен относительно точки O, называемой поэтому его *центром*.

---

[1]) Данная геометрическая фигура называется *симметричной относительно некоторой плоскости* П, если каждой точке M фигуры можно сопоставить другую точку M' той же фигуры так, чтобы отрезок MM' был перпендикулярен к плоскости П и делился ею пополам. Фигура называется *симметричной относительно некоторой прямой* Δ, если каждой точке M фигуры можно сопоставить другую точку M' той же фигуры так, чтобы отрезок MM' был перпендикулярен к Δ, пересекая эту прямую, и делился ею пополам. Наконец, фигура будет *симметричной относительно некоторой точки* C, если каждой точке M фигуры можно сопоставить другую точку M' той же фигуры так, чтобы отрезок MM' проходил через точку C и делился ею пополам. В первом случае П называется *плоскостью симметрии*, во втором — Δ — *осью симметрии*, а в третьем — C — *центром симметрии* или просто *центром*.

Легко видеть, что эллипс — кривая конечная. Действительно, из (1) следует, что

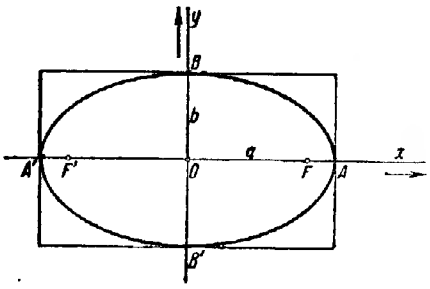
$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

откуда

$$-a \leqslant x \leqslant +a, \quad -b \leqslant y \leqslant +b.$$

Эти неравенства показывают, что эллипс целиком заключен в прямоугольнике, изображенном на черт. 123, в котором

$$|OA'| = |OA| = a, \quad |OB'| = |OB| = b.$$



Черт. 123

Изучим теперь более подробно форму кривой. Решая уравнение (1) относительно y, получим

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (2)$$

Ввиду симметрии кривой, достаточно изучить часть ее, заключенную в квадранте $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Поэтому достаточно оставить только знак $(+)$ перед радикалом, т. е. взять

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (2a)$$

При $x = 0$, имеем $y = b$. При возрастании x, ордината y убывает и при $x = a$ обращается в 0.

Мы получаем, таким образом, часть BA кривой; остальные части можно дополнить на основании симметрии.

Мы видим, что эллипс есть замкнутая кривая.

Максимально удаленные от оси Ox точки суть B и B', расположенные на оси Oy (расстояние равно b). Максимально удаленные от оси Oy точки суть A и A', расположенные на оси Ox (расстояние равно a).

Эти четыре точки A, A', B, B' называются *вершинами эллипса*.

Величина $2a$ называется *большой осью*, а $2b$ — *малой осью* эллипса [1]; величины a и b суть, соответственно, *большая* и *малая полуоси* эллипса.

Если $a = b$, то уравнение эллипса принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

т. е. эллипс обращается в окружность радиуса a. В этом случае величина

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(расстояние фокусов до центра) обращается в нуль.

[1]) Отметим, что слово ось применяется в двояком значении: выше оно было применено в смысле „ось симметрии" и относилось к целой прямой, здесь же оно применяется в смысле длины отрезка оси симметрии, заключенного между двумя вершинами. Такая двойственность не может, конечно, вызвать недоразумения, ибо всегда ясно, о чем идет речь.

При $a \neq b$ величина c не равна нулю и ее можно рассматривать как меру отклонения эллипса от круговой формы. Она называется *линейным эксцентриситетом* эллипса. В сущности, на форму эллипса влияет не сама величина c, а ее отношение к одной из полуосей, например к большой полуоси a.

Это отношение

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{3}$$

называется *численным эксцентриситетом* (ибо оно — величина отвлеченная) или просто *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет эллипса всегда меньше 1, как показывает формула (3).

Если даны a и c, то этим эллипс вполне определен, так как малую полуось можно определить по формуле

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2},$$

откуда

$$b = a\sqrt{1 - e^2}\ . \tag{4}$$

Упражнения и дополнения

1. Найти полуоси a, b, линейный эксцентриситет c и численный эксцентриситет e эллипса $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Ответ.

$$a = \frac{1}{2},\quad b = \frac{1}{3},\quad c = \frac{\sqrt{5}}{6},\quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. *Эллипсы, как результат аффинного преобразования окружности.* Показать, что эллипс можно рассматривать, как результат аффинного преобразования окружности, состоящего из двух растяжений по двум взаимно перпендикулярным направлениям [1]) (см. § 76).

Доказательство. Возьмем начало прямоугольных координат в центре окружности. Тогда уравнение окружности будет иметь вид:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

где r — раднус окружности.

Указанное выше аффинное преобразование имеет вид: $x' = kx$, $y' = ly$, где k, l — постоянные. Подставляя в уравнение окружности значения $x = \frac{x'}{k}$, $y = \frac{y'}{l}$, получим уравнение кривой, в которую обращается окружность:

$$\frac{x'^2}{k^2} + \frac{y'^2}{l^2} = r^2,$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

где $a = kr$, $b = lr$. Следовательно, кривая — эллипс.

3. *Эллипс как проекция круга.* Показать, что эллипс с полуосями a, b можно рассматривать как прямоугольную проекцию окружности радиуса a на плоскость, составляющую с плоскостью эллипса угол α, где

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}\left(\text{т. е. } \alpha = \arccos\frac{b}{a}\right).$$

[1]) Ниже (§ 234) будет показано, что при всяком аффинном преобразовании окружность обращается в эллипс (или остается окружностью).

Доказательство. Пусть Π' — плоскость круга, а Π — плоскость проекций. Пусть $O'x'y'$ — прямоугольная система осей на плоскости Π', выбранная так, чтобы ось $O'x'$ была параллельна плоскости Π. Пусть Oxy (также прямоугольная) система осей на плоскости Π, являющаяся проекцией системы $O'x'y$.

Пусть O' совпадает с центром проектируемой окружности. Если $M'(x', y')$ — какая-либо точка окружности, то координаты x, y ее проекции M на плоскость Π будут очевидно: $x = x'$, $y = y' \cos\alpha$. Но так как

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1,$$

то

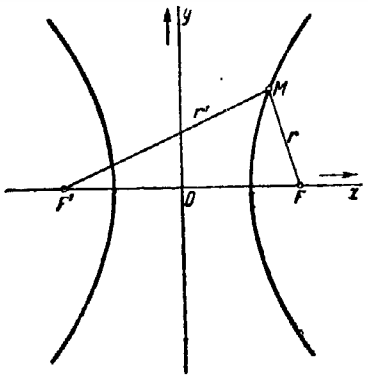
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha} = 1,$$

или

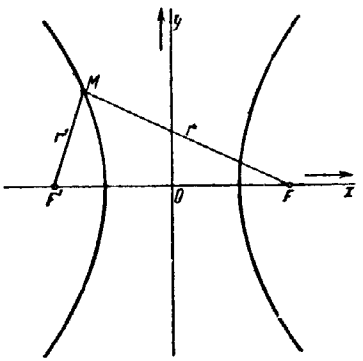
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

откуда и следует наше утверждение.

197. Определение гиперболы и ее нормальное уравнение. *Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная* (по абсолютной величине). Обозначим заданные точки, называемые *фокусами* гиперболы, через F и F', расстояние между ними — через $2c$, а абсолютное значение разности расстояний точек гиперболы до фокусов через $2a$. Ясно, что должно быть соблюдено условие: $2c \geqslant 2a$. Если $2c = 2a$, то очевидно, наше геометрическое место будет состоять из точек прямой, проходящей через F и F', расположенных вне отрезка FF'. Этот случай мы исключим из рассмотрения и будем всегда считать, что $c > a$.



Черт. 124a.



Черт. 124b

По определению имеем (черт. 124a, 124b):

$$r' - r = \pm 2a, \qquad (1)$$

где $r' = |F'M|$, $r = |FM|$; знак $(+)$ в правой части берется, когда $r' > r$ (черт. 124a), знак же $(-)$, когда $r' < r$ (черт. 124b).

Из самого определения гиперболы очевидно, что кривая эта состоит из двух отдельных ветвей, на одной из которых $r' > r$, а на другой $r' < r$.

Это следует также из уравнения гиперболы, которое мы сейчас выведем.

Направим ось Ox по прямой, соединяющей фокусы, и возьмем начало прямоугольных координат по середине между ними, так чтобы точки F' и F имели соответственно координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \tag{2}$$

Перенеся второй радикал в правую часть равенства и возведя обе части в квадрат, будем иметь, после очевидных приведений (ср. § 195):

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2. \tag{3}$$

Возведя еще раз обе части в квадрат и делая простые приведения, получим уравнение

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2),$$

совершенно такое же, как и в случае эллипса, с той только разницей, что теперь $a < c$. Вводя обозначение

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad b = \sqrt{c^2-a^2} \tag{4}$$

и разделяя обе части на величину $a^2(a^2-c^2) = -a^2b^2$, получим окончательно

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Это и есть уравнение гиперболы, называемое *нормальным*[1]).

Определение гиперболы дает нам простой способ построения ее непрерывным движением: возьмем две нити, разность длин которых равна $2a$, и прикрепим по одному концу этих нитей к точкам F' и F. Если держать рукой два других конца соединенными вместе и водить вдоль нитей острием карандаша, заботясь о том, чтобы нити были прижаты к бумаге, натянуты и соприкасались, начиная от чертящего острия до места соединения концов, то острие начертит часть одной из ветвей гиперболы (тем большую, чем длиннее взяты нити).

Поменяв ролями точки F' и F, получим часть другой ветви (черт. 125).

198. Исследование формы гиперболы. Асимптоты. Так же, как в случае эллипса, легко убеждаемся, что оси Ox, Oy являются осями симметрии гиперболы; они также называются ее *осями*; гипербола также симметрична относительно точки O, которая поэтому называется ее *центром*.

На основании сказанного, достаточно изучить только ту часть гиперболы, для которой $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

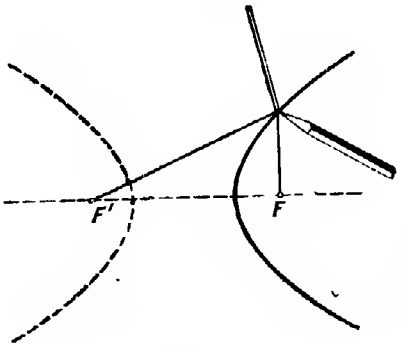
---

[1]) Предоставляем читателю показать, что преобразование уравнения (2) в уравнение (4) не вводит никаких лишних точек. Ср. замечание в конце § 195.

Решая уравнение (5) § 197 относительно y, получим

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (1)$$

Последняя формула показывает, что должно быть $x^2 \geqslant a^2$, т. е. $x \geqslant a$ или $x \leqslant -a$; иначе для y получилось бы мнимое выражение.



Черт. 125.

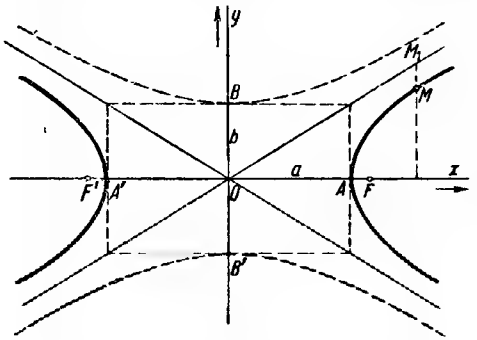
Таким образом гипербола целиком расположена вне полосы, заключенной между прямыми $x = -a$ и $x = +a$.

Рассмотрим теперь ту часть гиперболы, где $y \geqslant 0$, $x \geqslant a$. Тогда

$$y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

При $x = a$ имеем $y = 0$. При возрастании x от a до ∞, y также возрастает от 0 до ∞. Таким образом рассматриваемая часть простирается до бесконечности; остальные части получим, пользуясь симметрией относительно осей Ox и Oy (черт. 126).

Точки пересечения A и A' гиперболы с осью Ox называются *вершинами* ее; величина $AA' = 2a$ называется *продольной осью* гиперболы, а величина $2b$ — *поперечной осью* (геометрический смысл этой последней величины будет выяснен ниже).



Черт. 126.

Величины a и b называются, соответственно, *продольной и поперечной полуосями*.

Часто также величину $2a$ называют *действительной* осью гиперболы, а величину $2b$ — *мнимой* осью (a и b, в соответствии с этим, называют действительной и мнимой полуосями).

Название „мнимая ось" происходит от того, что если будем искать точки пересечения гиперболы с осью Oy, то получим, полагая в (1) $x = 0$: $y = \pm ib$. Таким образом можно сказать, что величина отрезка оси Oy, заключенного между (мнимыми) точками пересечения гиперболы с осью Oy, равны $2ib$; последнюю величину и следовало бы называть мнимой осью. Однако, как было уже сказано, мнимой осью обычно называют величину $2b$.

Величина $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *линейным эксцентриситетом* гиперболы, а величина

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \qquad (2)$$

— *численным эксцентриситетом* или просто *эксцентриситетом*. Ясно, что эксцентриситет гиперболы всегда больше 1.

Если $a = b$, то гипербола называется *равносторонней* (равнобочной).

Более точное представление о форме удаленных частей гиперболы дают нам *асимптоты* ее, существование которых сейчас покажем.

Напомним, что асимптотой данной линии называется прямая (если такая прямая существует), обладающая тем свойством, что точка, удаляющаяся по этой прямой в бесконечность, беспредельно приближается к точкам данной линии.

Легко догадаться, что гипербола имеет две асимптоты. Действительно, если обратим внимание на уравнение (1), то увидим, что при больших значениях x, мы сделаем только небольшую относительную ошибку, если под знаком радикала отбросим конечную величину a^2, т. е. вместо величины $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ возьмем величину

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2}$$

или

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{3}$$

Предыдущее уравнение определяет две прямые:

$$y = + \frac{b}{a} x \quad \text{и} \quad y = - \frac{b}{a} x$$

или

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \tag{3a}$$

Покажем теперь, что эти прямые действительно являются асимптотами нашей гиперболы. Имея в виду симметрию кривой, достаточно рассмотреть только ту часть ее, для которой $x > 0$, $y > 0$. Пусть $M(x, y)$ какая-либо точка этой части, а $M_1(x, y_1)$ — точка прямой $y_1 = + \frac{b}{a} x$, имеющая ту же абсциссу (черт. 126). Имеем

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y_1 = \frac{b}{a} x,$$

откуда

$$MM_1 = y_1 - y = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) > 0.$$

Далее имеем

$$\lim_{x \to \infty}(y_1 - y) = \frac{b}{a}\lim_{x \to \infty}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x \to \infty}\frac{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x \to \infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0,$$

ибо числитель последней дроби — величина конечная, а знаменатель стремится к ∞.

Мы видим, таким образом, что $MM_1 \to 0$, а это и доказывает, что наша прямая является асимптотой.

На основании симметрии, заключаем, что прямые (3) являются асимптотами обеих ветвей гиперболы, которые расположены в вертикальных углах между этими прямыми, заключающих ось Ox.

Угловые коэфициенты асимптот равны, соответственно, $+\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$. Если гипербола — равносторонняя (т. е. $a = b$), то асимптоты взаимно перпендикулярны (и обратно).

Очень часто бывает полезно, наряду с данной гиперболой, рассматривать гиперболу, определяемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{4}$$

или

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Последнее уравнение показывает, что мы имеем дело действительно с гиперболой, ибо оно может быть получено из уравнения данной гиперболы, если поменять ролями оси Ox и Oy и величины a, b. Эта гипербола, как легко видеть, имеет те же асимптоты, что и данная, но расположена в других углах, между ними (черт. 126, пунктир). Она называется гиперболой, *сопряженной* с данной.

Поперечная („мнимая") ось данной гиперболы может быть определена, как продольная („действительная") ось гиперболы, сопряженной с ней.

Упражнения

1. Найти полуоси a, b, линейный эксцентриситет c и численный эксцентриситет e гиперболы

$$x^2 - 2y^2 = 5.$$

Ответ.

$$a = \sqrt{5}, \quad b = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{15}{2}}, \quad e = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. Найти уравнение асимптот гиперболы

$$2x^2 - 3y^2 = 3.$$

Ответ.

$$\sqrt{2}\,x \pm \sqrt{3}\,y = 0.$$

199. Свойства фокальных расстояний. Директрисы эллипса и гиперболы. Новое определение этих линий. Прежде чем перейти к определению параболы, выведем еще одно замечательное свойство, общее эллипсу и гиперболе; свойство это послужит нам исходным пунктом для определения параболы.

В § 195 мы получили формулу (5), которую теперь напишем так:

$$ar = a^2 - cx$$

или

$$r = a - ex, \tag{1}$$

где r обозначает расстояние точки (x, y) эллипса до фокуса $F(+c, 0)$, который будем называть для краткости „правым". Аналогичную формулу получим для расстояния r' точки (x, y) до „левого" фокуса $F'(-c, 0)$. Действительно, по определению эллипса $r' + r = 2a$, откуда $r' = 2a - r$, т. е.

$$r' = a + ex. \tag{1a}$$

В случае гиперболы, мы имели в § 197 формулу (3), которую теперь напишем так (разделив на $\pm a$):

$$r = \pm(ex - a), \tag{2}$$

где r обозначает расстояние точки (x, y) гиперболы до правого фокуса; при этом для правой ветви надо брать знак $(+)$, а для левой — знак $(-)$.

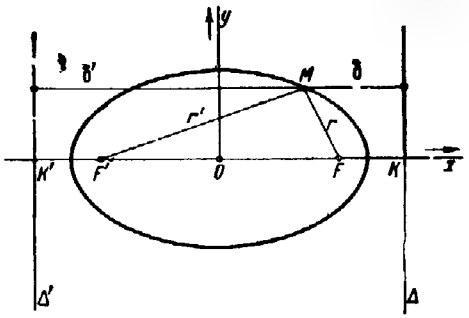
Расстояние до левого фокуса можно получить на основании формулы $r' - r = \pm 2a$ (где знаки $(+)$ и $(-)$ берутся по только что указанному правилу); эта формула дает

$$r' = r \pm 2a = \pm ex \mp a \pm 2a,$$

т. е.

$$r' = \pm(ex + a). \tag{2a}$$

В этой формуле, как и в (2), знак $(+)$ берется для правой ветви, а знак $(-)$ для левой.



Черт. 127.

Формулы (1) — (2a) доказывают следующее замечательное свойство фокусов рассматриваемых кривых: *расстояния точек этих кривых до их фокусов могут быть выражены в виде линейных функций декартовых координат* [1]).

Выведенные формулы имеют весьма простое геометрическое значение, к выяснению которого сейчас и перейдем.

Перепишем формулу (1), относящуюся к эллипсу, таким образом,

$$r = e\left(\frac{a}{e} - x\right). \tag{3}$$

Величина $\delta = \frac{a}{e} - x$ очевидно представляет собою расстояние точки $M(x, y)$ эллипса до прямой Δ, параллельной оси Oy и отстоящей от нее на расстоянии $\frac{a}{e}$ (так что абсцисса точки K пересечения прямой Δ с осью Ox равна $+\frac{a}{e}$). Прямая Δ очевидно расположена вне эллипса, ибо $e < 1$, а потому $\frac{a}{e} > a$ (черт. 127).

---

[1]) При данном выборе системы координат, расстояния эти являются функциями только координаты x.

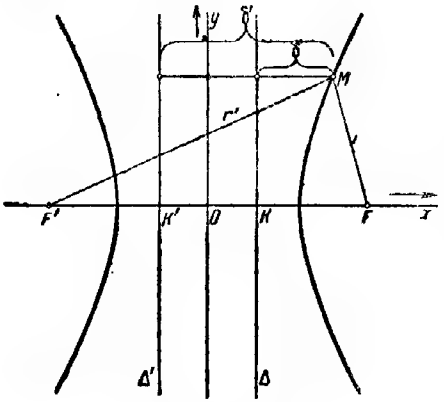
Формула (3) может быть переписана теперь так:

$$r = e\delta \quad \text{или} \quad \frac{r}{\delta} = e. \tag{4}$$

На основании симметрии заключаем, что и другая прямая Δ', соответствующая фокусу F', также параллельная оси Oy и пересекающая ось Ox в точке K' с абсциссой $-\frac{a}{e}$, обладает тем свойством, что

$$r' = e\delta' \quad \text{или} \quad \frac{r'}{\delta'} = e, \tag{4a}$$

где r' и δ' обозначают соответственно расстояния точки M до фокуса F' и прямой Δ'.



Черт. 128.

Прямые Δ и Δ' называются *директрисами* эллипса, соответствующими фокусам F и F'.

Прямые эти на основании (4) и (4а) обладают следующим свойством:

Отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и до соответствующей директрисы есть величина постоянная (равная эксцентриситету).

Таким же точно образом легко видеть, на основании формул (2) и (2а), что фокусам F и F' гиперболы соответствуют прямые Δ и Δ', называемые *директрисами*, параллельные оси Oy, пересекающие ось Ox, соответственно, в точках $x = +\frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$, и обладающие тем свойством, что *отношение расстояний точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная (равная эксцентриситету).*

Так как в нашем случае $e > 1$, $\frac{a}{e} < a$, то директрисы гиперболы расположены между ее ветвями (черт. 128).

Легко показать, что указанное свойство является характерным для эллипса и гиперболы, т. е. что геометрическое место точек, отношения расстояний которых до данной точки F и до данной прямой Δ есть величина постоянная, отличная от 1, представляет собою эллипс или гиперболу. Именно, если e обозначает упомянутое постоянное отношение, то при $e < 1$ будем иметь эллипс, а при $e > 1$ — гиперболу.

Действительно, выберем оси прямоугольных координат так, чтобы ось Oy была параллельна прямой Δ, а ось Ox проходила через точку F. Начало координат выберем так, чтобы точка F и точка пересечения K прямой Δ с осью Ox, имели бы, соответственно, следующие абсциссы

$$OF = ae, \quad OK = \frac{a}{e},$$

где a — некоторое положительное число, которое мы должны определить из следующего условия: если l есть расстояние F до Δ (эту величину, так же как и величину e, нужно считать заданной), то

$$l = |FK| = \left|\frac{a}{e} - ae\right| = \frac{a|1-e^2|}{e},$$

откуда

$$a = \frac{el}{|1-e^2|}. \qquad (5)$$

Если $M(x, y)$ обозначает какую-либо точку нашего геометрического места, то, по условию, должно быть $r = e\delta$, где

$$r = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2}$$

и

$$\delta = \left|\frac{a}{e} - x\right|.$$

Значит

$$\sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = \left|\frac{a}{e} - x\right| e.$$

Возводя обе части в квадрат, получим

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$$

или, после очевидных приведений,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

Если $e < 1$, то, полагая $a^2(1-e^2) = b^2$, получим уравнение эллипса, если же $e > 1$, то, полагая $a^2(e^2-1) = b^2$, получим уравнение гиперболы.

При $e = 1$, координатные оси не могут быть выбраны указанным способом, ибо по формуле (5), мы в этом случае получили бы $a = \infty$. Мы увидим, что при $e = 1$ получается линия — парабола — отличная от эллипса и гиперболы.

200. Определение параболы и ее нормальное уравнение. *Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (называемой фокусом) и данной прямой (называемой директрисой).*

Таким образом парабола занимает промежуточное место между эллипсом и гиперболой, в том смысле, что все три кривые могут быть определены свойством (см. § 199)

$$r = e\delta,$$

где r — расстояние точки кривой до фокуса, δ — расстояние до соответствующей директрисы, а e — постоянная величина. Именно при $e < 1$ имеем эллипс, при $e = 1$ — параболу, а при $e > 1$ — гиперболу.

Выведем теперь уравнение параболы. Пусть Δ — директриса, а F — фокус параболы. Обозначим через p расстояние фокуса до директрисы. Проведем ось Ox через фокус и направим ее перпендикулярно к директрисе. Начало прямоугольных координат возьмем по середине

расстояния между фокусом и директрисой, так чтобы координаты F были $\left(+\frac{p}{2}, 0\right)$, а координаты точки K пересечения Δ с Ox были $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

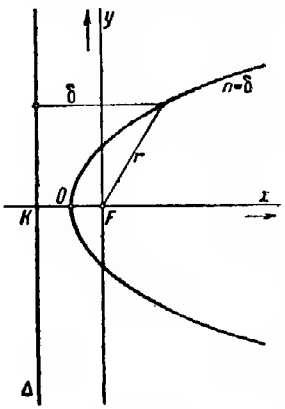
По определению

$$r = \delta, \tag{2}$$

где

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad \delta = x + \frac{p}{2}.$$

Следовательно, уравнение параболы будет



Черт. 129.

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

или, после возведения в квадрат и очевидных упрощений:

$$y^2 = 2px. \tag{3}$$

Это и есть простейшее уравнение параболы, называемое *нормальным*.

Мы видим, что парабола расположена целиком справа от оси Ox (ибо, очевидно, должно быть: $x \geqslant 0$). При $x = 0$ имеем $y = 0$, т. е. парабола проходит через начало координат. При возрастании x оба соответствующих значения $y = \pm\sqrt{2px}$ также беспредельно возрастают, и кривая имеет вид, указанный на черт. 129.

Ось Ox является, очевидно, осью симметрии параболы, и поэтому называется ее *осью*; точка O есть *вершина* параболы; величина p называется *параметром* параболы.

Непосредственно очевидно, что *парабола*, в отличие от эллипса и гиперболы, *не имеет центра*. Также в отличие от этих кривых, она имеет только один фокус и одну директрису.

Далее, легко убедиться, что *парабола не имеет асимптот*. Действительно, непосредственно ясно, что асимптота не может быть параллельна ни оси Oy, ни оси Ox, так что, если асимптота существует, то ее уравнение имеет вид

$$y = ax + b,$$

где a и b — постоянные, причем $a \neq 0$. Для точки, удаляющейся по этой прямой в бесконечность, будем иметь

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(a + \frac{b}{x}\right) = a.$$

Если эта прямая есть асимптота параболы, то для точки параболы (x, y_1), с той же абсциссой, что и точки (x, y), мы бы имели, по определению асимптоты

$$\lim_{x \to \infty} (y_1 - y) = 0,$$

откуда следует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=a.$$

Но для точек параболы, $y_1=\pm\sqrt{2px}$, откуда

$$\frac{y_1}{x}=\pm\frac{\sqrt{2px}}{x}=\pm\frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}}$$

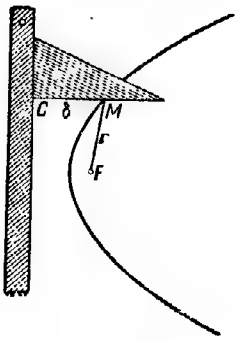
и значит

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_1}{x}=0,$$

что противоречит предыдущему.

Укажем, наконец, простой прием, помощью которого можно начертить параболу непрерывным движением.

Укрепим линейку так, чтобы ее край совместился с директрисой; приставим к этой линейке один из катетов угольника; к какой-либо точке другого катета прикрепим нить такой длины, чтобы при натяжении вдоль этого катета она кончалась в вершине C прямого угла; наконец, закрепим второй конец нити в фокусе (черт. 130). Если теперь вести угольник по линейке и вместе с тем натягивать нить острием M карандаша, прижимая ее к свободному катету, то острие это опишет часть параболы (тем большую, чем длиннее свободный катет и нить).



Черт. 130.

Действительно, очевидно, что все время будет

$$|MF|=|MC|.$$

Упражнения и дополнения

1. Показать, что кривая $y^2=3x+4$ есть парабола, и найти ее параметр и положение вершины. (Указание: следует перенести начало координат по оси Ox в такую точку, чтобы исчез свободный член.)

Ответ. $p=\frac{3}{2}$. Вершина расположена в точке $\left(-\frac{4}{3},\,0\right)$.

2. Показать, что кривая $y=ax^2+2bx+c$ $(a\neq 0)$ есть парабола, ось которой параллельна оси Oy.

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде

$$y=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+c-\frac{b^2}{a}$$

или

$$y-\beta=a(x-\alpha)^2,$$

где

$$\beta=c-\frac{b^2}{a},\quad \alpha=-\frac{b}{a}.$$

Если взять новую систему $O'x'y'$, оси которой параллельны старым, а начало находится в $O'(\alpha,\beta)$, то предыдущее уравнение примет вид (в новых координатах)

$$y'=ax'^2 \quad\text{или}\quad x'^2=\frac{1}{a}y'.$$

Если $a>0$, то, полагая $\frac{1}{a}=2p$, получим уравнение $x'^2=2py'$. Это есть, очевидно, уравнение параболы, с параметром p, ось которой направлена по $O'y'$. Если $a<0$, то, полагая $\frac{1}{a}=-2p$, получим $x'^2=-2py'$. Меняя направление оси Oy' на обратное, т. е. заменяя y' на $-y'$, получим опять уравнение параболы с параметром p, ось которой направлена по новой оси $O'y'$ (парабола эта будет обращена выпуклостью туда, куда направлена старая ось Oy). Значит, в обоих случаях получаем параболу с параметром

$$p=\frac{1}{2|a|}.$$

3. Доказать следующее предложение: Если расстояние переменной точки $M(x, y)$ некоторой линии до некоторой постоянной точки $F(a, b)$ может быть представлено, как значение (взятое со знаком + или −) некоторой линейной функции декартовых координат точки M, то эта линия есть либо эллипс, либо гипербола, либо парабола (либо представляет собою часть одной из этих кривых).

Доказательство. Пусть $r=|FM|$. По условию имеем

$$r=\pm(Ax+By+C), \qquad (*)$$

где A, B, C — постоянные. Рассмотрим прямую

$$Ax+By+C=0.$$

Будем считать координаты прямоугольными, что, очевидно, не нарушает общности. Расстояние δ точки M до прямой дается, как известно, формулой

$$\delta=\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

откуда

$$\pm(Ax+By+C)=\delta\sqrt{A^2+B^2}.$$

Поэтому будем иметь, на основании (*),

$$r=e\delta,$$

где

$$e=\sqrt{A^2+B^2}.$$

Отсюда ясно, что точка M принадлежит гиперболе, если $e>1$, параболе, если $e=1$, и эллипсу, если $e<1$.

4. *Общее определение фокусов и разыскание их.* Примем следующее определение фокуса кривой второго порядка: фокус F кривой — это такая точка, что отношение расстояний любой точки кривой до F и до некоторой постоянной прямой Δ есть величина постоянная. Найдем, исходя из этого определения, все фокусы эллипса, гиперболы и параболы. Начнем с эллипса, заданного уравнением (в прямоугольных координатах):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a\geqslant b). \qquad (**)$$

Пусть $F(\alpha, \beta)$ — искомый фокус и пусть уравнение Δ имеет вид: $A'x+B'y+C'=0$. Имеем, по определению: $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm k(A'x+B'y+C')$, где k — постоянный множитель. Обозначая kA', kB', kC' через A, B, C, будем иметь

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(Ax+By+C)^2$$

или по раскрытии скобок

$$(1-A^2)x^2+(1-B^2)y^2-2ABxy-2(\alpha+AC)x-2(\beta+BC)y=$$
$$=C^2-\alpha^2-\beta^2. \qquad (***)$$

Это уравнение должно удовлетворяться теми же значениями (x, y), что и урав-

нение (**); отсюда заключаем, что коэфициенты этих уравнений должны быть пропорциональны. Значит, должно быть

$$AB = 0, \quad \alpha + AC = 0, \quad \beta + BC = 0,$$
$$(1 - A^2)\, a^2 = (1 - B^2)\, b^2 = C^2 - \alpha^2 - \beta^2.$$

Первое из этих уравнений показывает, что либо $A = 0$, либо $B = 0$. Пусть сперва $B = 0$. Тогда $\beta = 0$. Из предыдущих уравнений легко получаем

$$A = \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \pm e; \quad C = \pm a, \quad \alpha = \pm ae = \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Мы получили фокусы, известные нам раньше, расположенные на большой оси.

Рассмотрим теперь случай $A = 0$. Совершенно аналогично предыдущему получим

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pm i\sqrt{a^2 - b^2};$$

т. е. два мнимых фокуса, „расположенных" на малой оси. Итак, эллипс имеет четыре фокуса, но только два из них — действительные.

Предоставляем читателю доказать, что и гипербола имеет четыре фокуса, два из которых — действительные (известные нам раньше).

В случае параболы, сравнивая уравнение (***) с уравнением

$$y^2 - 2px = 0,$$

заключаем

$$1 - A^2 = 0, \quad AB = 0, \quad \beta + BC = 0,$$
$$C^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0, \quad 1 - B^2 = \frac{\alpha + AC}{p}.$$

Первое из этих равенств дает $A = \pm 1$; из второго заключаем $B = 0$; значит $\beta = 0$. Наконец, два последних равенства дают $\alpha = p \pm C$ и $\alpha^2 = C^2$. Это возможно только при $\alpha = \frac{p}{2}$, $\pm C = -\frac{p}{2}$. Следовательно, мы получаем (уже известный нам) один фокус.

II. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА КАК КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

201. Пересечение прямого кругового конуса с плоскостью. Мы уже упоминали о том, что эллипс, гипербола и парабола представляют собою линии пересечения кругового конуса с плоскостями. Под круговым конусом мы разумеем здесь прямой круговой конус, представляющий собою геометрическое место прямых, проходящих через данную точку (вершину) и данную окружность, плоскость которой перпендикулярна к прямой, соединяющей ее центр с вершиной (эта прямая называется осью конуса). В элементарной геометрии рассматривается обычно только часть конуса, заключенная между вершиной и направляющей окружностью, здесь же мы рассматриваем весь конус, простирающийся в бесконечности по обе стороны от вершины. Мы видели в главе V, что прямой круговой конус есть поверхность второго порядка [1]).

Рассмотрим пересечение конуса какой-нибудь плоскостью П (плоскость, проходящая через A, M и A' на черт. 131), не проходящей через вершину. Проведем через ось конуса плоскость, перпендикулярную к секущей плоскости (плоскость чертежа). Эта последняя плоскость пересечет конус по двум образующим Δ и Δ', а плоскость П — по некоторой прямой AA'.

Рассмотрим отдельно три случая.

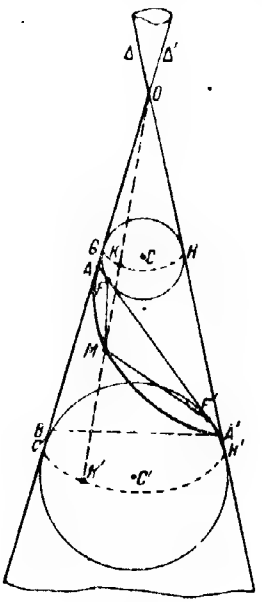
1. Пусть *плоскость* П *пересекает только одну полость конуса, не будучи параллельна ни одной из образующих* (черт. 131). Тогда точки пересечения A и A' прямой AA' с образующими находятся по одну и ту же сторону от вершины O. Построим, далее, окружности, находящиеся внутри конуса и касаю-

[1]) Наклонный круговой конус есть так же, как мы увидим ниже, поверхность второго порядка и его сечения плоскостями не отличаются от сечений прямого кругового конуса.

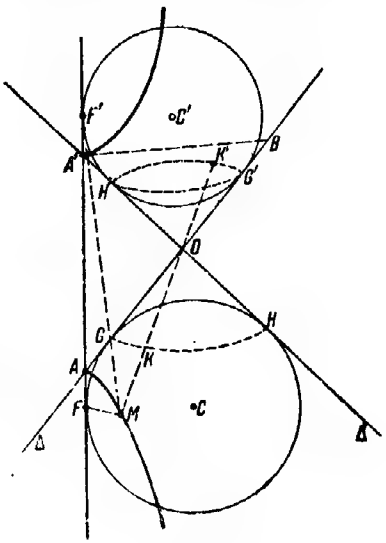
щиеся образующих OA, OA' и прямой AA'. Таких окружностей будет две: одна, вписанная в треугольник OAA', а другая, „вневписанная", находящаяся вне треугольника OAA', внутри конуса. Центры C и C' этих окружностей находятся, очевидно, на оси конуса. Пусть F и F' — точки касания этих окружностей с прямой AA'. Если вращать эти окружности вокруг оси конуса, то они опишут две сферы, касающиеся конуса вдоль окружностей GH и $G'H'$, плоскости которых перпендикулярны к оси (G, H, G', H' обозначают в то же время точки касания сфер с образующими OA, OA').

Сферы эти касаются плоскости П в точках F и F'.

Пусть теперь M есть точка линии пересечения плоскости П с конусом. Проведем через эту точку образующую конуса, которая пересечет окружности GH и $G'H'$ в точках K и K'. Очевидно, что длина $|KK'| = |GG'| = |HH'|$ не зависит от положения точки M на линии пересечения.



Черт. 131.



Черт. 132.

Далее, очевидно, что $|MF| = |MK|$, ибо MF и MK суть две касательные, проведенные из точки M к первой сфере; точно так же очевидно, что $|MF'| = |MK'|$.

Поэтому $|MF| + |MF'| = |MK| + |MK'| = |KK'|$, т. е. сумма расстояний точки M до точек F и F' есть величина постоянная. Таким образом наша линия есть эллипс с фокусами F и F' и большою осью $2a = |KK'|$.

Если из точки A' провести прямую, параллельную прямой GH, и если B есть точка ее пересечения с образующей OA, то длина отрезка AB этой образующей равна фокальному расстоянию $|FF'|$. Действительно, длина $|FF'|$ получается из большой оси $|AA'|$ вычитанием длин $|AF|$ и $|A'F'|$. С другой стороны,

$$|AA'| = |GG'|, \quad |AF| = |AG|, \quad |A'F'| = |A'H'| = |BG'|,$$

и значит то же фокальное расстояние равно

$$|GG'| - |AG| - |BG'| = |AB|.$$

Читателю предоставляется доказать, что прямые D и D' (не изображенные на чертеже), по которым плоскость П пересекает плоскости окружностей GH и $G'H'$, суть директрисы эллипса.

2. Рассмотрим теперь случай, когда *плоскость* П *пересекает обе полости конуса* (черт. 132), так что точки A и A' лежат на разных полостях конуса.

В этом случае плоскость П параллельна двум образующим конуса, которые получим, если пересечем конус плоскостью, параллельной П и проходящей через вершину.

Проведем снова две окружности, находящиеся внутри конуса и касающиеся образующих OA, OA' и прямой AA'. Пусть F и F' — точки касания с прямой AA'.

Центры C и C' этих окружностей находятся на оси конуса.

Если вращать окружности вокруг оси конуса, то получим две сферы, касающиеся плоскости П в точках F и F', а конуса — вдоль окружностей GH и $G'H'$, плоскости которых перпендикулярны к оси (G, H, G', H' обозначают на чертеже в то же время точки касания сфер с образующими OA и OA').

Линия пересечения плоскости П с конусом состоит, очевидно, из двух раздельных ветвей, расположенных на разных его полостях. Пусть — M любая точка этой линии.

Проведем образующую конуса через эту точку. Она пересечет окружности GH и $G'H'$ в точках K и K', причем длина $|KK'| = |GG'| = |HH'|$ есть, очевидно, величина постоянная, не зависящая от положения точки M.

Имеем

$$|MF| = |MK|; \quad |MF'| = |MK'|,$$

а потому

$$|MF'| - |MF| = |MK'| - |MK| = |KK'|.$$

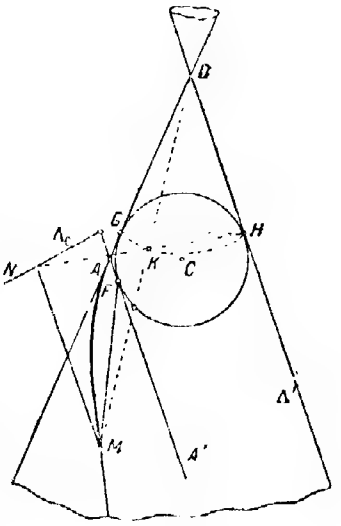
Мы взяли точку M на той полости, где расположена точка A; если бы мы взяли M на другой полости, то получили бы

$$|MF| - |MF'| = |KK'|.$$

Итак, разность расстояний точки M до точек F и F' есть величина постоянная. Значит наша линия — гипербола. Продольная ось $|AA'| = 2a$ этой гиперболы равна, как видно из предыдущих формул, величине $|KK'| = |GG'| = |HH'|$.

Если из A' провести прямую $A'B$, параллельную GH, до пересечения с образующей OA, то длина отрезка AB этой образующей равна фокальному расстоянию $|FF'|$. Доказательство совершенно аналогично доказательству для случая эллипса.

Предоставляем читателю доказать, что прямые пересечения плоскостей окружностей GH и $G'H'$ с плоскостью П (не изображенные на чертеже) суть директрисы нашей гиперболы.



Черт. 133.

3. Пусть *плоскость* П *пересекает только одну полость, будучи параллельна одной из образующих*, например, Δ'. Тогда прямая AA' пересечет только образующую Δ в некоторой точке A (черт. 133).

Проведем окружность, находящуюся внутри конуса и касающуюся прямых Δ, Δ', AA'. Пусть G, H, F суть соответствующие точки касания. Центр C окружности находится на оси конуса.

Вращая окружность вокруг этой оси, получим сферу, касающуюся конуса вдоль окружности GH, плоскость которой перпендикулярна к оси. Пусть Δ_0 есть прямая пересечения плоскости П с плоскостью окружности GH.

Линия пересечения плоскости П с конусом простирается, очевидно, в бесконечность и состоит из одной ветви. Пусть M — любая точка этой линии.

Проведем через M образующую конуса (она пересечет окружность GH в некоторой точке K) и, кроме того, опустим из M перпендикуляр MN на прямую Δ_0. Прямая MN параллельна AA' и поэтому также и образующей Δ'. Значит прямые MN, Δ' находятся в одной плоскости, и в той же плоскости будет находиться образующая OM. Поэтому точки N, K, H расположены на одной и той же прямой пересечения только что упомянутой плоскости и плоскости окружности GH.

Ясно, что треугольники MNK и KOH подобны и, т. к. $|OK| = |OH|$. то $|MN| = |MK|$ и, значит, $|MN| = |MF|$. Таким образом расстояния точки M до точки F и прямой Δ_0 равны между собою; это показывает, что наша линия есть парабола, с фокусом F и директрисой Δ_0.

Эллипс, гипербола и парабола как линии пересечения кругового конуса с плоскостями были известны еще древним грекам. Аполлонию принадлежит трактат о коинческих сечениях (около 225 г. до нашей эры), в котором изложены основные свойства этих линий, известные до него, а также свойства, открытые им самим.

Изложенный в этом параграфе способ построения фокусов и директрис и доказательство свойств конических сечений по отношению к фокусам и директрисам даны в 1822 г. Данделеном (Dandelin). Мы воспроизвели здесь (с некоторыми незначительными изменениями) изложение, данное в известном курсе Briot et Bouquet [1]).

202. Получение данного коинческого сечения из данного конуса. Нетрудно показать, что любой эллипс и любая парабола могут быть получены как пересечение любого данного конуса подходящей плоскостью. В случае же гиперболы существует некоторое ограничение, которое будет указано ниже.

Начнем со случая эллипса. Будем считать заданными большую ось $2a$ его и фокальное расстояние $2c < 2a$. Пользуясь обозначениями предыдущего параграфа, мы видим, что в треугольнике $AA'B$ нам известны стороны $|AB| = 2c$, $|AA'| = 2a$ и угол ABA', равный $\frac{\pi}{2} - \alpha$, где α — острый угол, составляемый образующими конуса с его осью. Такой треугольник всегда можно построить. Действительно, проведем из любой точки B плоскости чертежа полупрямую BA' и отрезок BA, длины $2c$, составляющий угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$ с BA'; наконец, опишем из A радиусом, равным $2a$, окружность, которая непременно пересечет полупрямую в некоторой точке A' (ибо, по условию, $2a > |BA| = 2c$).

Построив треугольник $AA'B$, восставим из середины его стороны $A'B$ перпендикуляр до пересечения O с продолжением стороны BA.

Мы получим таким образом все элементы треугольника OAA' (черт. 131), которые удовлетворяют поставленным условиям.

Перейдем к случаю гиперболы, считая заданным $2a$ (продольную ось) и $2c$ (фокальное расстояние). На этот раз вопрос сводится к построению треугольника $AA'B$ по сторонам $|AA'| = 2a$, $|AB| = 2c$ и углу $ABA' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, противолежащему стороне AA' (черт. 132). Так как теперь $2c > 2a$, то построение не всегда возможно. Для возможности построения, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы сторона $|AA'| = 2a$ была больше чем длина перпендикуляра, опущенного из A на прямую $A'B$. Длина последнего, очевидно, равна $|AB| \cos\alpha = 2c\cos\alpha$. Итак, для возможности построения необходимо и достаточно, чтобы $2a > 2c\cos\alpha$, или

$$\cos\alpha < \frac{a}{c}.$$

Если 2β обозначает угол между асимптотами гиперболы (тот, внутри которого она заключена), то $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Значит, предыдущее неравенство дает $\cos\alpha < \cos\beta$, т. е. $\alpha > \beta$. Таким образом для возможности получения данной гиперболы путем пересечения данного конуса плоскостью необходимо и достаточно, чтобы угол 2β между асимптотами данной гиперболы был меньше угла 2α растворения конуса.

Рассмотрим, наконец, случай параболы. Будем считать заданным ее параметр p. Соединив центр C сферы с точками A и G (обозначения те же, что и на черт. 133), получим прямоугольный треугольник CAG, катет AG которого равен $\frac{p}{2}$, а угол CAG равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Таким образом задача сводится ко всегда воз-

[1]) Leçons de géométrie analytique, 4-e édition, Paris, 1893.

можному элементарному построению прямоугольного треугольника по катету и острому углу.

Если этот треугольник построен, то для построения отрезка OA, который характеризует положение секущей плоскости, достаточно восставить из C перпендикуляр к AC до пересечения O с прямой AG.

III. НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ. ПОДОБИЕ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Укажем некоторые другие простейшие виды уравнений эллипса, гиперболы и параболы, которые бывают очень полезны в различных вопросах.

203. Уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам. Уравнение гиперболы получает замечательно простой вид, если за оси координат приняты ее асимптоты.

Действительно, нормальное уравнение гиперболы можно написать так:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1. \qquad (*)$$

Если возьмем асимптоты

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

за оси декартовых координат $Ox'y'$, то будем иметь формулы преобразования вида (§ 99)

$$x'=k_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right), \quad y'=k_2\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right), \qquad (**)$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные множители, отличные от нуля. Поэтому в новых координатах уравнение (*) гиперболы примет вид

$$x'y'=k, \qquad (1)$$

где $k=k_1k_2$ — постоянная. Координатные векторы новой системы, вообще говоря, не суть орты. Если мы захотим иметь необобщенную систему, мы должны надлежащим образом подобрать k_1 и k_2. Решим с этой целью (**) относительно x, y, что дает

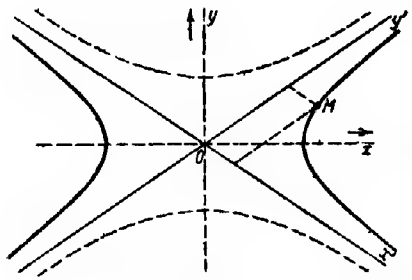
$$x=l_1x'+l_2y', \quad y=m_1x'+m_2y',$$

где $(l_1, m_1)=\left(\frac{a}{2k_1}, \frac{b}{2k_1}\right)$, $(l_2, m_2)=\left(\frac{a}{2k_2}, -\frac{b}{2k_2}\right)$ суть, как известно, координатные векторы новых осей. Для того, чтобы новая система была необобщенной, должно быть $l_1^2+m_1^2=1$, $l_2^2+m_2^2=1$, откуда получаем $k_1^2=k_2^2=\frac{a^2+b^2}{4}$. Беря k_1 и k_2 положительными, будем иметь $k_1=k_2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ и, следовательно,

$$k=\frac{a^2+b^2}{4}. \qquad (2)$$

Легко видеть, что уравнение гиперболы, сопряженной с данной и отнесенной к той же системе, будет иметь вид

$$x'y' = -k. \tag{3}$$



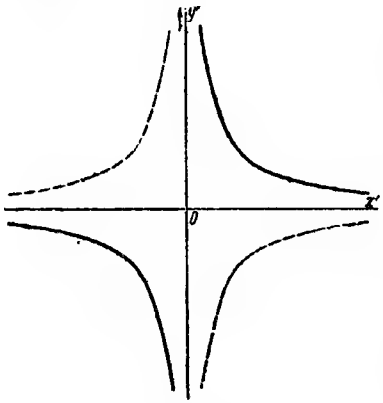
Черт. 134.

Гиперболы (1) и (3) изображены на черт. 134 соответственно сплошной чертой и пунктиром.

Из уравнения (1) еще раз с очевидностью вытекает, что оси координат Ox', Oy' являются асимптотами кривой. Действительно, имеем, например,

$$y' = \frac{k}{x'},$$

откуда следует, что если x' стремится к бесконечности, то y' стремится к нулю, т. е. точки кривой беспредельно приближаются к оси Ox'. Аналогично докажем, что если y' стремится к бесконечности, то x' стремится к нулю.



Черт. 135.

Уравнение (1) имеет следующее простое геометрическое содержание: если из какой-либо точки M гиперболы провести прямые, параллельные асимптотам, то площадь параллелограма, заключенного между этими прямыми и асимптотами, есть величина постоянная, не зависящая от положения точки M на кривой. Действительно, площадь эта, очевидно, равна $x'y' \sin \nu = k \sin \nu$, где ν—угол между асимптотами.

В случае равносторонней гиперболы ($a = b$) угол между асимптотами — прямой, и поэтому система осей $Ox'y'$ будет прямоугольной (черт. 135).

204. Параметрическое представление конических сечений. Построение по точкам. Решая уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

относительно какой-нибудь из переменных x или y, мы получим ее выражение через другую переменную в виде двузначной функции; например, решая относительно y, получим

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{2}$$

Поэтому представляется иногда желательным выразить x и y через

новую вспомогательную переменную (параметр) при помощи однозначных функций [1]).

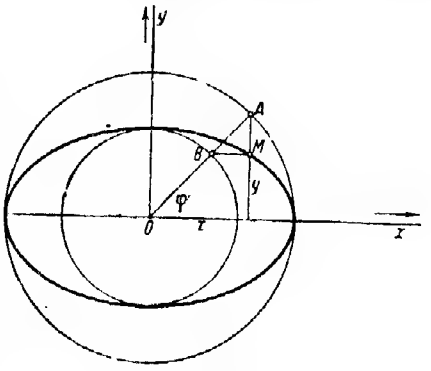
Одним из простейших способов достижения этой цели служит следующий. Замечая, что для всех точек эллипса $\left|\frac{x}{a}\right| \leqslant 1$, мы можем положить

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \quad \text{т. е.} \quad x = a\cos\varphi,$$

причем величину φ можно всегда предполагать заключенной в пределах $(0, \pi)$; этим вполне определится значение φ, соответствующее данному x. Тогда формула (2) даст $y = \pm b\sin\varphi$. Так как, при условии $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, будем иметь $\sin\varphi > 0$, то верхний знак мы должны брать для „верхних" точек ($y > 0$), а нижний — для нижних. Однако можно избавиться от двойного знака, допустив изменение φ в промежутке $(0, 2\pi)$ и взяв только верхний знак; действительно, из предыдущего очевидно, что точка, определяемая координатами

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi, \tag{3}$$

описывает, двигаясь в одном направлении, верхнюю часть эллипса, когда φ пробегает значения от 0 до π, а затем нижнюю часть эллипса, когда φ пробегает значения от π до 2π.



Черт. 136.

Параметр φ имеет весьма простое геометрическое значение. Действительно, опишем из O, как из центра, две окружности радиусов a и b (черт. 136). Проведем из O луч, составляющий с осью Ox угол, равный φ. Пусть он пересекает меньшую и бóльшую окружности соответственно в точках B и A. Проведем еще из B прямую, параллельную оси Ox, до пересечения с перпендикуляром, опущенным из A на эту ось. Пусть $M(x, y)$ есть эта точка. Тогда, очевидно, будем иметь $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$; значит точка $M(x, y)$ есть точка, принадлежащая нашему эллипсу и соответствующая данному значению параметра φ. Геометрическое значение параметра φ в уравнениях (3) становится, таким образом, ясным: φ есть угол, составляемый с осью Ox лучом OA, где A есть точка бóльшей окружности, имеющая ту же абсциссу, что и M, расположенная с той же стороны от Ox, что и M.

Вместе с тем мы получили один из простейших способов построения с помощью циркуля и линейки любого числа точек эллипса. Для этого достаточно придавать лучу OA различные направления и производить построение соответствующей точки M указанным только что способом.

[1]) Этим, как принято говорить, достигается униформизация функциональной зависимости (1).

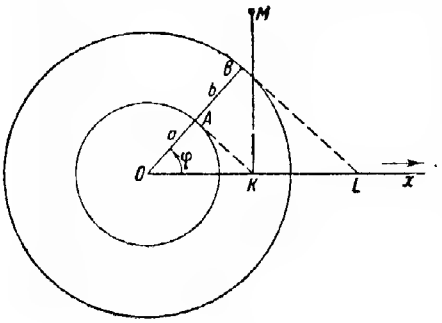
Предоставляем читателю показать, что гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

может быть представлена параметрически следующим образом:

$$x=\frac{a}{\cos\varphi},\quad y=b\operatorname{tg}\varphi. \tag{5}$$

При этом, для получения всех точек гиперболы достаточно изменять φ в пределах $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, или, что сводится к тому же, в пределах $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$. А именно при возрастании φ от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ точка (x, y) описывает правую ветвь гиперболы, а при возрастании φ от $+\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ — левую ветвь. Значениям φ, равным $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, соответствуют „бесконечно удаленные" точки гиперболы; иными словами, при приближении φ к одному из этих значений, точка (x, y) удаляется в бесконечность.



Черт. 137.

Геометрическое значение угла φ станет ясным из следующего способа построения точки гиперболы, соответствующей данному значению φ.

Опишем из O, как из центра, окружности радиусами a и b (в нашем случае b может быть и больше, и меньше, и равно a; черт. 137). Проведем из O луч, составляющий с Ox угол φ; пусть A и B — точки пересечения его с первой и второй окружностями и пусть AK, BL — перпендикуляры, восставленные к этому лучу, пересекающие ось Ox в точках K и L. Если теперь восставить из K перпендикуляр к оси Ox и на этом перпендикуляре взять, с той же стороны от Ox, что A и B, точку M такую, что $|KM|=|LB|$, то точка M принадлежит нашей гиперболе и соответствует данному значению параметра φ.

Вместе с тем мы получили простой способ построения любого числа точек нашей гиперболы.

Рассмотрим теперь уравнение параболы

$$y^2=2px. \tag{6}$$

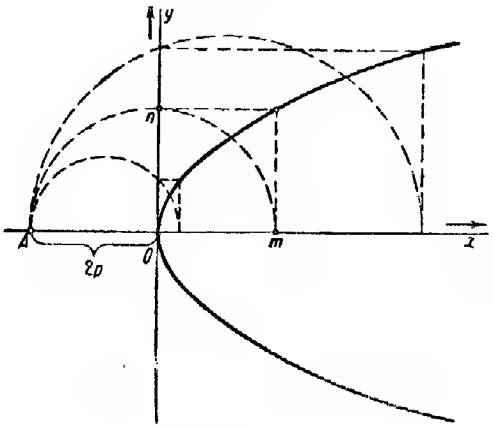
Оно дает x как однозначную функцию от y, так что, если положим $y=t$, получим следующее простое параметрическое представление параболы при помощи однозначных функций:

$$x=\frac{t^2}{2p},\quad y=t. \tag{7}$$

Чтобы получить все точки параболы, надо измеиять t от $-\infty$ до $+\infty$.

Уравнение (6) непосредственно приводит к следующему способу построения любого числа точек параболы при помощи циркуля и линейки,

Пусть A обозначает (постоянную) точку оси Ox с абсциссой $-2p$. Для построения точки параболы с абсциссой $Om = x$ можно поступить так: построим на Am, как на диаметре, окружность. Пусть n — одна из точек пересечения ее с осью Oy (черт. 138). Тогда пересечение перпендикуляров к осям координат, восставленных из m и n, даст одну из двух искомых точек (другая будет симметрична относительно Ox).



Черт. 138.

Действительно, из элементарной геометрии известно, что высота прямоугольного треугольника есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы. В нашем случае $|On| = |y|$ есть высота треугольника Anm (не изображенного на чертеже), с прямым углом в точке n. Следовательно, $|On|^2 = 2p|Om|$, т. е. $y^2 = 2px$.

Замечание. Очевидно, что данную линию можно представить в параметрической форме бесчисленным множеством способов. В частности, существует бесчисленное множество параметрических представлений эллипса, гиперболы и параболы, кроме приведенных выше. Обратим внимание на то, что параметрическое представление (7) параболы выражает координаты точек кривой с помощью не только однозначных, но и рациональных функций параметра. Можно показать, что эллипс и гипербола обладают таким же свойством, т. е. что их параметрическое представление может быть тоже достигнуто при помощи рациональных функций (притом весьма простых); но мы на этом не останавливаемся.

205. Полярные уравнения конических сечений, отнесенных к фокусу. Все три конических сечения можно очень просто представить при помощи уравнений в полярных координатах, поместив полюс в одном из фокусов (или в фокусе, в случае параболы). Для полной определенности будем считать, что полярная ось направлена от взятого за полюс фокуса к *ближайшей вершине* (или к единственной вершине в случае параболы).

В случае эллипса возьмем, например, в качестве полюса правый фокус; тогда, согласно условию, полярная ось будет направлена вправо (черт. 139а).

Имеем по формуле (1) § 199

$$r = a - ex.$$

Но, с другой стороны, $x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM} = \text{пр}_x (\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM}) = c + r\cos\vartheta =$

$= ae + r\cos\vartheta$. Подставляя это значение x в предыдущую формулу, получим, после очевидных упрощений,

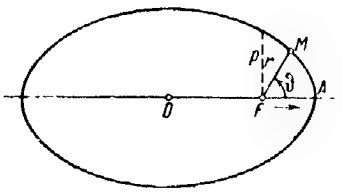
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}, \tag{1}$$

где $p = a(1 - e^2)$ или, вспоминая, что

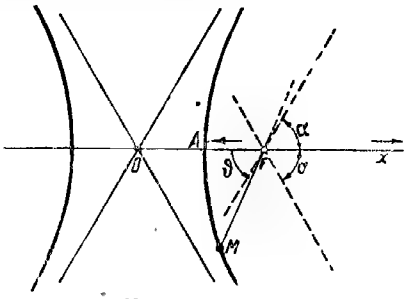
$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

$$p = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a}. \tag{2}$$

Уравнение (1) и есть искомое полярное уравнение эллипса. Так как для эллипса $e < 1$, то $1 + e\cos\vartheta$ всегда положительная величина.



Черт. 139a.



Черт. 139b.

В случае гиперболы возьмем, например, в качестве полюса также правый фокус. Тогда мы должны будем направить полярную ось противоположно оси Ox (черт. 139b). Имеем, на основании формулы (2) § 199,

$$r = \mp(ex - a)$$

[$(+)$ для правой и $(-)$для левой ветви].

Но $x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM} = \text{пр}_x \overrightarrow{OF} + \text{пр}_x \overrightarrow{FM} = ae + \text{пр}_x \overrightarrow{FM}$.

Далее, так как полярная ось направлена противоположно оси Ox, то $\text{пр}_x \overrightarrow{FM} = -r\cos\vartheta$. Значит, будем иметь

$$r = \mp(ae^2 - er\cos\vartheta - a),$$

откуда

$$r = \pm\frac{p}{1 \mp e\cos\vartheta}, \tag{3}$$

где

$$p = a(e^2 - 1) = \frac{b^2}{a} \tag{4}$$

и где знак $(+)$ берется для правой, а знак $(-)$ для левой ветви.

Можно ограничиться только верхними знаками, т. е. взять

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta},$$

условившись допускать также отрицательные значения для r, откладывая в этих случаях вектор $\overrightarrow{FM}$ не под углом ϑ, а под углом $\pi+\vartheta$, т. е. в направлении, противоположном тому, которое указывается углом ϑ („обобщенная система полярных координат").

Действительно, если в предыдущей формуле заменить ϑ на $\pi+\vartheta$ и вместе с тем заменить r на $-r$, получим формулу

$$-r=\frac{p}{1-e\cos\vartheta},\quad \text{или}\quad r=\frac{-p}{1-e\cos\vartheta},$$

т. е. формулу, соответствующую нижним знакам в (3).

За промежуток изменения ϑ можем взять промежуток (величиной 2π):

$$-\pi+\alpha\leqslant\vartheta<\pi+\alpha,$$

где α обозначает острый угол между асимптотами и осью Ox [1]).

На правой ветви при этом будет $-\pi+\alpha<\vartheta<\pi-\alpha$, а на левой $\pi-\alpha<\vartheta<\pi+\alpha$; см. ниже, упражнение 1.

Наконец, в случае параболы (черт. 139с) имеем, на основании § 200:

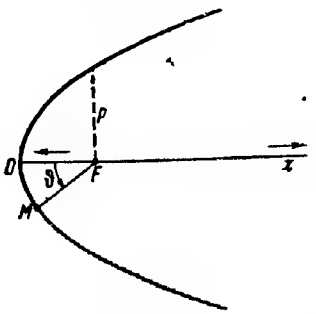
$$r=\frac{p}{2}+x,$$

где

$$x=\text{пр}_x\,\overrightarrow{OM}=\text{пр}_x\,\overrightarrow{OF}+\text{пр}_x\,\overrightarrow{FM}=\frac{p}{2}-r\cos\vartheta.$$

Подставляя это значение в предыдущую формулу, получим

$$r=\frac{p}{1+\cos\vartheta}.$$



Черт. 139с.

Итак, мы видим, что во всех трех случаях уравнение конических сечений имеет вид (1); различие между ними только то, что для эллипса $e<1$, для параболы $e=1$, а для гиперболы $e>1$.

Величина p, в случае параболы, была названа ее параметром.

Величина $p=\frac{b^2}{a}$, фигурирующая в уравнениях эллипса и гиперболы, также называется *параметром* соответствующей кривой. Во всех трех случаях параметр имеет очень простое геометрическое значение: он равен длине перпендикуляра, восставленного из фокуса, к оси, содержащей фокус, до пересечения с кривой в одной из точек. Иными словами, p

[1]) Этот угол определяется формулой $\text{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}$, откуда

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{e}.$$

есть „ордината при фокусе". Действительно, значение этой ординаты получим, положив в (1) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, что дает

$$r = p.$$

Упражнения

1. Проследить за изменением r при изменении угла ϑ в случае гиперболы, пользуясь формулой (1).

Ответ. При $\vartheta = \pm(\pi - \alpha)$ имеем

$$\cos\vartheta = -\cos\alpha = -\frac{1}{e} \text{ и } 1 + e\cos\vartheta = 0.$$

При ϑ, заключенном в промежутке $-(\pi-\alpha) < \vartheta < (\pi-\alpha)$, $1 + e\cos\vartheta > 0$, $r > 0$. Когда ϑ возрастает от $-(\pi-\alpha)$ до $+(\pi-\alpha)$, то r сначала убывает от значения $+\infty$ до минимума $\frac{p}{1+e}$ (при $\vartheta = 0$, что соответствует вершине A) и затем снова возрастает до значения $+\infty$. При переходе ϑ через значение $(\pi-\alpha)$ r внезапно переходит от значения $+\infty$ к $-\infty$, и точка M внезапно перескакивает на левую ветвь.

Сохраняя все время отрицательные значения, r сначала возрастает (убывает по абсолютному значению) до величины $-\frac{p}{e-1}$ (при $\vartheta = \pi$, что соответствует вершине A'), а затем снова убывает до $-\infty$, когда ϑ приближается к значению $\pi + \alpha$.

2. Показать, что уравнение

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\vartheta - \vartheta_0)},$$

где ϑ_0 — постоянная, есть полярное уравнение конического сечения, фокус которого расположен в полюсе, а фокальная ось [1]), направленная в ближайшую вершину, составляет угол ϑ_0 с полярной осью.

3. Найти полярное уравнение эллипса и гиперболы, если полюс взят в центре, а полярная ось направлена по фокальной оси.

Ответ. Для эллипса

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2};$$

для гиперболы

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}.$$

206. Уравнения конических сечений, отнесенных к вершине. Отметим в заключение еще один вид уравнения эллипса и гиперболы, аналогичный уравнению $y^2 = 2px$ параболы.

Именно, возьмем за начало декартовых прямоугольных координат одну из вершин кривой (эллипса или гиперболы), а ось Ox направим от O к ближайшему фокусу. Пусть $O'x'y'$ обозначает систему осей, которая раньше (в §§ 195 и 197) была обозначена через Oxy, так что уравнения эллипса и гиперболы относительно этих осей напишутся соответственно так:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1. \qquad (*)$$

---

[1]) То-есть ось симметрии, проходящая через фокусы (или фокус, в случае параболы).

В случае эллипса за новое начало можно взять левую вершину, и тогда ось Ox будет иметь то же направление, что и $O'x'$. В случае же гиперболы можно поместить начало в правой вершине, и тогда ось Ox будет, как и в первом случае, направлена по $O'x'$.

Зависимость между старыми координатами (x', y') и новыми (x, y) будет дана в случае эллипса формулами $x' = x - a$, $y' = y$.

Подставляя эти выражения в первое из уравнений (*), получим после очевидных приведений

$$y^2 = 2px - qx^2,$$

где

$$p = \frac{b^2}{a}$$

есть параметр эллипса (§ 205), а

$$q = \frac{b^2}{a^2}.$$

В случае гиперболы будем иметь $x' = x + a$, $y' = y$ и второе уравнение (*) даст

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ есть параметр гиперболы, $q = \frac{b^2}{a^2}$, т. е. p и q, имеют такое же выражение, как и в случае эллипса.

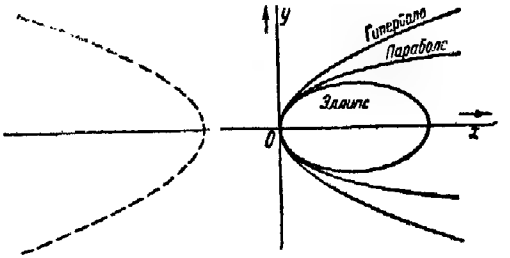
Вспоминая теперь выведенное раньше уравнение параболы, получим следующий результат: если начало O прямоугольных координат взять в вершине конического сечения, а ось Ox направить к ближайшему фокусу, то

$$y^2 = 2px - qx^2 \quad \text{(для эллипса)}, \tag{1}$$
$$y^2 = 2px \quad \text{(для параболы)}, \tag{2}$$
$$y^2 = 2px + qx^2 \quad \text{(для гиперболы)}. \tag{3}$$

Формулы (1)—(3) можно объединить в одну, если заметить, что в случае эллипса $q = \frac{b^2}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2)}{a^2} = 1 - e^2$, а в случае гиперболы $\frac{b^2}{a^2} = \frac{(c^2 - a^2)}{a^2} = e^2 - 1$. Поэтому наши формулы объединяются в следующую одну:

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2. \tag{4}$$

При $e < 1$ будем иметь эллипс, при $e > 1$ — гиперболу, а при $e = 1$ — параболу.



Черт. 140.

На черт. 140 представлены эти три кривые, отнесенные к одной и той же системе осей. Из формул (1)—(3) очевидно, что при одном и том же значении параметра для точек (x, y_1), (x, y_2), (x, y_3) эллипса,

параболы и гиперболы, имеющих одну и ту же абсциссу $x > 0$, будет

$$|y_1| < |y_2| < |y_3|.$$

Упражнение

Выразить для случая эллипса и гиперболы полуось a через p и e и исследовать, что происходит с этими кривыми, если, при постоянном p, эксцентриситет e стремится к 1.

Ответ. $a = \frac{p}{1-e^2}$ (для эллипса), $a = \frac{p}{e^2-1}$ (для гиперболы). Значит, при e, стремящемся к 1, правая вершина эллипса уходит в бесконечность: эллипс стремится к параболе $y^2 = 2px$. Также уходит целиком в бесконечность левая ветвь гиперболы, а правая стремится к той же параболе.

207. Подобные конические сечения. Закончим эту главу исследованием вопроса о подобии конических сечений [1]).

Рассмотрим сперва случай эллипсов и покажем, что всякая фигура, подобная эллипсу, есть также эллипс, полуоси которого пропорциональны полуосям данного.

Действительно, пусть имеем фигуру, подобную данному эллипсу Γ. Приведем ее в положение, гомотетичное [2]) эллипсу Γ, и затем сообщим ей такое поступательное смещение, чтобы центр подобия совпал с центром эллипса [3]); новое положение нашей фигуры обозначим через Γ'.

Возьмем уравнение эллипса в нормальном виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Пусть $M'(x', y')$ есть точка фигуры Γ', соответствующая точке $M(x, y)$ эллипса. По условию имеем

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM},$$

где k — постоянная, откуда

$$x' = kx, \quad y' = ky, \quad x = \frac{x'}{k}, \quad y = \frac{y'}{k}.$$

Подставляя эти значения в (1), получаем уравнение линии Γ':

$$\frac{x'^2}{k^2a^2} + \frac{y'^2}{k^2b^2} = 1. \tag{2}$$

Значит, Γ' есть эллипс, с тем же центром, что и данный, с теми же осями симметрии, полуоси которого равны

$$a' = |k|a, \quad b' = |k|b, \tag{3}$$

а это и доказывает наше утверждение. Эксцентриситеты e и e' эллипсов Γ и Γ', очевидно, равны, ибо

$$e'^2 = \frac{k^2a^2 - k^2b^2}{k^2a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2.$$

---

[1]) О подобии вообще см. в § 77.
[2]) См. § 77.
[3]) В § 77 доказано, что это всегда можно сделать.

Обратно, очевидно, что если $e' = e$, то полуоси эллипсов пропорциональны, ибо в этом случае

$$\frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

и, следовательно, $\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{b^2}{a^2}$, т. е. $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$.

Точно так же докажем, что всякая фигура, подобная данной гиперболе, есть также гипербола, продольная и поперечная полуоси которой соответственно пропорциональны продольной и поперечной полуосям данной, и что, обратно, две гиперболы, удовлетворяющие этому условию, подобны.

Отсюда следует, что эксцентриситеты подобных гипербол равны и что, обратно, гиперболы с равными эксцентриситетами подобны.

Докажем, наконец, что любая фигура, подобная параболе, есть также парабола и что *все параболы подобны между собою*. Действительно, пусть Γ' есть фигура, подобная параболе

$$y^2 = 2px,$$

помещенная так, чтобы центр подобия совпал с началом координат. Подобно предыдущему будем иметь

$$x = \frac{x'}{k}, \quad y = \frac{y'}{k},$$

откуда

$$y'^2 = 2pkx'.$$

Это есть такая парабола, вершина и ось которой совпадают с вершиной и осью данной. Действительно, если $k > 0$, то, полагая $p' = pk$, получим нормальное уравнение параболы $y'^2 = 2p'x'$ с параметром p'. Если $k < 0$, то, полагая

$$p' = -kp > 0,$$

получим

$$y'^2 = -2p'x'.$$

Если теперь изменить направление оси Ox на обратное, то вместо x' надо будет написать $-x'$, и мы опять получим уравнение

$$y'^2 = 2p'x'.$$

Вогнутость этой параболы будет обращена в сторону, противоположную вогнутости данной. В обоих случаях параметр параболы Γ' есть

$$p' = |k| \cdot p.$$

При подходящем выборе $|k|$ получим параболу с любым параметром, подобную данной. Значит, все параболы подобны между собою.

Из изложенного непосредственно следует, что *для подобия двух конических сечений необходимо и достаточно равенство их эксцентриситетов.*

Заметим еще, что оси симметрии гомотетических линий второго порядка параллельны между собой (в частности, параллельными между собою оказываются фокальные оси).

Это следует из того, что, как было показано выше, путем поступательного смещения одной из этих линий оси симметрии могут быть совмещены друг с другом (причем фокальная ось совмещается с фокальной же).

Легко, наконец, видеть, что если два эллипса или две гиперболы гомотетичны, с отношением подобия k, то они также гомотетичны с отношением подобия $-k$.

Это непосредственно очевидно в случае, когда центры гомотетичных эллипсов (или гипербол) совмещены, ибо, например, в случае эллипса, уравнение (2) не изменится при замене k на $-k$.

Если же принять во внимание, что при поступательном перемещении одной из фигур гомотетия сохраняется, причем сохраняется и отношение подобия (меняется только центр подобия), то утверждение сделается очевидным.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПРОЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. КАСАТЕЛЬНАЯ И ПОЛЯРА

Приступим теперь к изучению линий второго порядка, заданных общим уравнением. На основании сказанного в конце главы VI (§ 193), естественно начать с изучения проективных свойств этих линий, а затем перейти к аффинным и метрическим свойствам. Мы так и поступим, хотя мы один раз уже нарушили этот порядок, начав, в предыдущей главе, с определений, носящих метрический характер. Мы сделали это с исключительной целью предпослать наглядный материал более отвлеченному.

I. ПРОЕКТИВНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

208. Обозначения. Пусть x, y обозначают декартовы координаты точки. Самое общее уравнение второй степени относительно этих переменных имеет вид

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

В однородных координатах x_1, x_2, x_3 $\left(x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}\right)$ это уравнение представляется так (§ 174):

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0.$$

Для придания симметрии формулам обозначим теперь коэфициенты иначе: а именно, коэфициенты при произведениях x_ix_j обозначим через $2a_{ij}$ (если $i \neq j$), а коэфициент при x_i^2 через a_{ii}, так что левая часть предыдущего уравнения, которую, для краткости, мы будем обозначать через $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, напишется теперь так[1]):

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2. \qquad (1)$$

Полином $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ есть *квадратичная форма* трех переменных x_1, x_2, x_3. В соответствии с этим левая часть уравнения в неоднородных декартовых координатах будет иметь вид:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}; \qquad (1a)$$

$F(x, y)$ есть (вообще неоднородный) полином второй степени.

---

[1]) Мы будем считать в нашем случае, что a_{ji} обозначает то же, что и a_{ij}. В зависимости от удобства мы будем писать значки в том или ином порядке.

Самое общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=0 \tag{2}$$

в однородных координатах, и

$$F(x,\ y)=0 \tag{3}$$

— в неоднородных.

Полином $F(x, y)$ связан с формой $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ соотношением

$$F(x,\ y)=\Phi(x,\ y,\ 1). \tag{4}$$

В свою очередь $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ получается из $F(x, y)$ заменой x, y на x_1, x_2 и умножением отдельных членов на такую степень x_3, чтобы получился однородный полином второго порядка („дополнение до однородности").

В дальнейшем мы будем применять еще такие обозначения. *Половины* частных производных формы $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ мы будем обозначать соответственно через Φ_1, Φ_2, Φ_3, так что

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \Phi_2&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \Phi_3&=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Одни и те же коэфициенты в различных строках мы, с очевидной целью симметрии, пишем по-разному; например, коэфициент a_{12} во второй строке обозначен через a_{21}. Этим достигается то, что первый значок во всех коэфициентах первой строки есть 1, второй строки — 2, третьей — 3.

Аналогично мы будем писать:

$$\left.\begin{aligned}F_1&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},\\ F_2&=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что всегда имеет место тождество („тождество Эйлера")

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1\Phi_1+x_2\Phi_2+x_3\Phi_3. \tag{7}$$

Если в предыдущем тождестве положить $x_3=1$, $x_1=x$, $x_2=y$, то оно примет вид

$$F(x,\ y)=x\Phi_1(x,\ y,\ 1)+y\Phi_2(x,\ y,\ 1)+\Phi_3(x,\ y,\ 1). \tag{7a}$$

Вместо $\Phi_1(x, y, 1)$ и $\Phi_2(x, y, 1)$ мы могли бы написать просто $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$, но не сделаем этого с целью сохранения симметрии.

Наконец, нам придется иногда наряду с квадратичной формой

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ рассматривать связанную с ней *билинейную форму*[1]) переменных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$:

$$\begin{aligned}\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) &= y_1\Phi_1(x_1, x_2, x_3)+y_2\Phi_2(x_1, x_2, x_3)+y_3\Phi_3(x_1, x_2, x_3)= \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)y_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)y_2 + \\ &+ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)y_3.\end{aligned} \tag{8}$$

Эта билинейная форма, очевидно, симметричная, т. е. не изменяет своего значения, если поменять ролями переменные x и y,

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \Omega(y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3). \tag{9}$$

Для сокращения письма мы будем в дальнейшем часто обозначать $\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ просто через $\Omega(x; y)$.

Форма $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ получается из $\Omega(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$, если положить: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, так что $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Omega(x_1, x_2, x_3; x_1, x_2, x_3)$, или сокращенно

$$\Omega(x; x) = \Phi(x_1, x_2, x_3). \tag{10}$$

Билинейная форма Ω называется *полярной* по отношению к квадратичной форме Φ.

Легко проверить непосредственным вычислением следующее тождество, которым мы будем очень часто пользоваться:

$$\Phi(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = \Omega(x; x) + 2\Omega(x; y) + \Omega(y; y). \tag{11}$$

В правых частях мы могли бы написать вместо $\Omega(x; x)$ и $\Omega(y; y)$ соответственно $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ и $\Phi(y_1, y_2, y_3)$, но не делаем этого из соображений симметрии.

Заметим еще одно тождество, которое легко выводится из предыдущего и которое также легко проверить непосредственно,

$$\begin{aligned}&F(x+x', y+y') = \\ &= \varphi(x, y) + 2[xF_1(x', y') + yF_2(x', y')] + F(x', y'),\end{aligned} \tag{11a}$$

где

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{12}$$

есть квадратичная форма, представляющая собою совокупность членов второго порядка в полиноме $F(x, y)$.

Иногда, для упрощения письма, мы будем однородные координаты x_1, x_2, x_3 обозначать просто через x, y, t. Полагая в формулах $t = 1$, мы будем получать соответствующие формулы в неоднородных координатах.

Во всей этой главе, там, где противное не оговорено особо, под x_1, x_2, x_3 (или x, y, t) можно подразумевать проективные однородные координаты общего вида.

Далее, если противное не оговорено особо, мы будем считать все коэфициенты a_{ij} действительными числами.

---

[1]) См. Добавление, § 10.

Нам очень часто придется встречаться с определителем

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

который называется *дискриминантом квадратичной формы* $\Phi(x_1, x_2, x_3)$.

Алгебраические дополнения элементов a_{ij} мы будем обозначать через A_{ij}. В частности,

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \tag{14}$$

есть дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y)$, — формулы (12).

Замечание. Правило соответствия дискриминанта A легче всего запомнить так: берутся половины частных производных формы Φ по x_1, x_2, x_3 и затем составляется определитель из коэфициентов полученных линейных форм Φ_1, Φ_2, Φ_3; см. формулы (5). Например, если

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_3 + x_3^2,$$

то

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 4x_3, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3, \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = -4x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3; \end{aligned}\right\}$$

следовательно,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

A_{33} есть алгебраическое дополнение правого нижнего элемента в определителе:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

209. Распадающиеся и нераспадающиеся линии второго порядка. Совпадение линий второго порядка. Пусть

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

уравнение данной линии второго порядка в однородных координатах (Φ — однородный полином второй степени, т. е. квадратичная форма). Мы знаем (§ 174), что если эта линия пересекается с некоторой прямой

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{2}$$

больше чем в двух точках, то прямая (2) целиком принадлежит линии (1), и поэтому полином $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ разлагается на два множителя,

один из которых есть $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$; следовательно, должен быть линейным и другой множитель. Таким образом в этом случае, имеем тождественно

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3). \qquad (3)$$

Когда это имеет место, линия (1) распадается на две прямых и потому называется *распадающейся* или *выродившейся*. В еще более частном случае, линейные формы, входящие в (3), могут отличаться друг от друга только постоянным множителем, т. е.

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3),$$

и тогда

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=k(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2. \qquad (4)$$

Линия (1), таким образом, представляет собою две совпадающие прямые („двойную прямую").

На основании сказанного в § 174 легко также вывести *условие совпадения двух линий второго порядка*

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=0 \quad \text{и} \quad \Psi(x_1,\ x_2,\ x_3)=0.$$

Действительно, если эти линии совпадают, т. е. если предыдущие уравнения эквивалентны, то полиномы Φ и Ψ должны состоять из одних и тех же неприводимых множителей. Поэтому Φ и Ψ могут различаться только постоянным множителем, т. е. должно быть тождественно

$$\Psi(x_1,\ x_2,\ x_3)=k\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3), \qquad (5)$$

где k — постоянная, отличная от нуля. Очевидно, что и обратно: если имеет место последнее тождество, то линии Φ и Ψ совпадают.

Ниже (§ 212) будет доказано, что для совпадения двух линий второго порядка достаточно, чтобы они имели *пять общих точек*, из которых никакие четыре не расположены на одной и той же прямой.

210. Условие распадения линии второго порядка. Легко сразу выяснить, распадается или не распадается линия второго порядка, заданная уравнением

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=a_{11}x^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+ \\ +2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0.$$

Действительно, для того чтобы форма $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)$ распадалась на два линейных множителя, необходимо и достаточно (см. Добавление, § 13), чтобы ранг дискриминанта этой формы, т. е. ранг определителя

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

был равен двум или единице. Так как наш определитель третьего порядка, то ранг будет удовлетворять этому условию, если сам определитель

равен нулю. Следовательно, *для распадения линии второго порядка необходимо и достаточно условие*

$$A = 0. \tag{2}$$

Если ранг дискриминанта A равен двум, то линия распадается на две различные прямые действительные или мнимые. Если же ранг равен единице, то форма Φ имеет вид

$$\Phi = k(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2,$$

и линия есть совокупность двух совпадающих прямых, всегда действительных [1]).

Общая точка двух прямых, на которые распадается линия, называется *двойной точкой* линии. В случае, когда линия — совокупность двух совпадающих прямых, все ее точки — двойные.

211. Каноническое уравнение линии второго порядка в проективных координатах. Проективная классификация. Как известно (см. Добавление, § 12), путем линейной однородной подстановки

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11}x'_1 + l_{12}x'_2 + l_{13}x'_3, \\ x_2 &= l_{21}x'_1 + l_{22}x'_2 + l_{23}x'_3, \\ x_3 &= l_{31}x'_1 + l_{32}x'_2 + l_{33}x'_3, \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

всякую квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ можно привести к *каноническому виду*

$$\Phi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2 + \varepsilon_3 x'^2_3, \tag{**}$$

где ε_1, ε_2, ε_3 — постоянные. Если, как мы всегда предполагаем, коэфициенты формы Φ — действительные, то указанное приведение можно произвести при помощи подстановки с действительными коэфициентами, так что ε_1, ε_2, ε_3 будут также действительными; мы будем предполагать это во всем дальнейшем.

Итак, уравнение всякой линии второго порядка

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

можно привести к „каноническому виду“ [2])

$$\Phi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varepsilon_1 x'^2_1 + \varepsilon_2 x'^2_2 + \varepsilon_3 x'^2_3 = 0. \tag{2}$$

Если дискриминант A формы Φ отличен от нуля (в этом случае, как мы знаем, линия нераспадающаяся), то ни одно из чисел ε_1, ε_2, ε_3 не равно нулю (см. Добавление, § 12) и путем дальнейшей линейной подстановки можно добиться того, чтобы эти числа имели значения [3]) ± 1. Если все три числа ε_1, ε_2, ε_3 одного знака, то уравнение (2), пре-

---

[1]) См. следующий параграф.

[2]) Геометрический смысл этого приведения будет указан в § 222.

[3]) Например, если $\varepsilon_1 > 0$, полагаем $\sqrt{\varepsilon_1}x'_1 = x''_1$, после чего член $\varepsilon_1 x'^2_1$ обращается в x''^2_1; если $\varepsilon_1 < 0$, полагаем $\sqrt{-\varepsilon_1}x'_1 = x''_1$, и, следовательно, $\varepsilon_1 x'^2_1 = -x''^2_1$. Аналогично поступаем с другими переменными.

образованное к новым переменным, будет иметь вид (в случае надобности мы меняем знаки всех членов на обратные)

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0; \tag{3}$$

если же среди чисел ε_1, ε_2, ε_3 — два одного знака, а третье — противоположного, то мы будем иметь (изменяя, в случае надобности, нумерацию переменных)

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0. \tag{4}$$

Итак, путем линейной однородной подстановки уравнение всякой нераспадающейся линии второго порядка может быть приведено к одному из видов (3), (4).

Если ранг дискриминанта A равен двум, то одно из чисел ε_1, ε_2, ε_3 в уравнении (2) равно нулю и оно может быть приведено к одному из видов

$$x_1'^2 + x_2'^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad (x_1' + ix_2')(x_1' - ix_2') = 0, \tag{5}$$

или

$$x_1'^2 - x_2'^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad (x_1' + x_2')(x_1' - x_2') = 0. \tag{6}$$

В первом случае мы имеем совокупность двух мнимых сопряженных прямых $x_1' + ix_2' = 0$ и $x_1' - ix_2' = 0$ с двойной точкой [1]) (0, 0, 1). Во втором случае совокупность двух действительных прямых с двойной точкой (0, 0, 1).

Наконец, если ранг A равен единице, то два из чисел ε_1, ε_2, ε_3 равны нулю, например, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_1 \neq 0$; уравнение (3) принимает вид

$$x_1'^2 = 0 \tag{7}$$

и изображает всегда действительную двойную прямую. Все точки этой прямой — двойные.

Преобразование (*) можно трактовать с двух различных точек зрения.

1°. Величины x_1', x_2', x_3' можно рассматривать, как проективные координаты точки (x_1, x_2, x_3), по отношению к некоторой системе проективных координат, которая вполне определяется коэфициентами подстановки (*); см. § 189. Тогда полученный нами результат можно выразить так: путем подходящего выбора системы проективных координат, уравнение всякой линии второго порядка может быть приведено к каноническому виду (2), где ε_1, ε_2, ε_3 равны ± 1 или нулю. В зависимости от различных случаев мы имеем один из видов (3), (4), (5), (6), (7). Во всех случаях, кроме (3) и (4), т. е. кроме случая $A \neq 0$, мы имеем дело с распадающейся линией.

2°. Можно рассматривать x_1', x_2', x_3' тоже как однородные декартовы координаты некоторой точки M', отнесенной к той же системе, что и точка $M(x_1, x_2, x_3)$. Тогда (§ 193) подстановка (*) определяет некоторое точечное проективное преобразование плоскости (т. е. гомографию), и мы можем высказать следующее предложение:

---

[1]) Действительно, прямые $x_1' + ix_2' = 0$, $x_1' - ix_2' = 0$ пересекаются в точке с координатами $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, x_3' — произвольное (не 0); но мы всегда можем считать $x_3' = 1$.

Путем подходящего гомографического преобразования плоскости всякая линия второго порядка может быть преобразована в линию, изображаемую одним из уравнений (3)—(7).

В частности, всякая нераспадающаяся линия второго порядка может быть преобразована в одну из линий (3), (4).

Мы можем всегда считать, что система декартовых координат, к которой отнесены данная и преобразованная линии, — прямоугольная. Переписывая уравнения (3) и (4) в неоднородных координатах, будем иметь соответственно

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \tag{3a}$$

и

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{4a}$$

Первое уравнение не удовлетворяется, очевидно, никакими действительными значениями x и y, т. е. изображает мнимую линию. Второе представляет собою уравнение окружности. Итак, мы видим, что путем проективного преобразования всякая действительная, нераспадающаяся линия второго порядка может быть обращена в окружность. Отсюда следует (и это — самое существенное), что *все нераспадающиеся действительные линии второго порядка могут быть переведены одна в другую гомографическим преобразованием.*

С точки зрения проективной геометрии все линии, получающиеся одна из другой таким образом, эквивалентны и, следовательно, с этой точки зрения, все действительные нераспадающиеся линии второго порядка — эквивалентны (таким образом, с проективной точки зрения, нет разницы между эллипсом, гиперболой и параболой).

Резюмируя, можно сказать: с точки зрения проективной все линии второго порядка разделяются на следующие категории:

a) нераспадающиеся линии;

b) распадающиеся линии.

В категории a) различаются две подкатегории: a_1) действительные линии и a_2) мнимые линии.

В категории b) различаются: b_1) совокупность двух различных прямых и b_2) совокупность двух совпадающих прямых. Наконец, в подкатегории b_1) имеются еще два случая: b_1') действительные прямые и b_1'') мнимые сопряженные прямые.

Замечание. Во всех случаях распадающихся линий второго порядка каноническая форма Φ', как мы видели, может быть написана так ($\varepsilon_3 = 0$):

$$\Phi' = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2;$$

(при $\varepsilon_2 = 0$ имеем двойную прямую). На основании этого ясно, что двойная точка линии удовлетворяет трем уравнениям [1]):

$$\Phi_1' = \varepsilon_1 x_1' = 0, \quad \Phi_2' = \varepsilon_2 x_2' = 0, \quad \Phi_3' = \varepsilon_3 x_3' = 0 \tag{8}$$

[1]) Мы видели, что при $\varepsilon_2 \neq 0$ двойная точка удовлетворяет условиям $x_1' = x_2' = 0$. При $\varepsilon_2 = 0$ все точки линии — двойные и удовлетворяют условию: $x_3' = 0$.

(последнее сводится к тождеству $0 = 0$). Но предыдущая система эквивалентна системе [1])

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ \Phi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ \Phi_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Поэтому двойную точку найдем, решая эту систему. Если ранг определителя A равен двум, то получим одну двойную точку (как мы это видели и раньше); если ранг равен единице, то уравнения (9) сводятся к одному из них, и мы получим прямую, сплошь состоящую из двойных точек (это и будет наша двойная прямая).

Условимся вообще называть двойными те точки, координаты которых удовлетворяют системе (9). Если $A \neq 0$, т. е. если линия нераспадающаяся, то система (9) не имеет (ненулевого) решения. Значит, нераспадающаяся линия не имеет двойных точек.

212. Определение линии второго порядка по пяти точкам. Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0 \tag{1}$$

уравнение линии второго порядка в однородных координатах, которые мы обозначаем теперь через x, y, t. В это уравнение входит, как видим, шесть постоянных коэфициентов: a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}. Но так как, при замене этих постоянных пропорциональными им величинами, линия не изменяется очевидно, что значение имеют не сами эти постоянные, а отношения пяти из них к шестой. Значит, форма и положение линии второго порядка определяются *пятью* постоянными. Отсюда следует, что линия второго порядка может быть, вообще говоря, определена заданием *пяти условий.*

В частности, линия второго порядка, вообще говоря, вполне определяется заданием пяти ее точек. Иными словами, *если на плоскости заданы пять точек* $M_1(x_1, y_1, t_1)$, $M_2(x_2, y_2, t_2), \ldots, M_5(x_5, y_5, t_5)$, *то можно, вообще говоря, найти одну и только одну линию второго порядка, проходящую через эти точки* (строгую формулировку этого предложения см. ниже). Действительно, если (1) есть уравнение искомой линии, то, выражая условие, что она проходит через данные точки, получим пять уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1t_1 + 2a_{23}y_1t_1 + a_{33}t_1^2 = 0, \\ &a_{11}x_2^2 + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{33}t_2^2 = 0, \\ &a_{11}x_3^2 + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{33}t_3^2 = 0, \\ &a_{11}x_4^2 + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{33}t_4^2 = 0, \\ &a_{11}x_5^2 + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{33}t_5^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

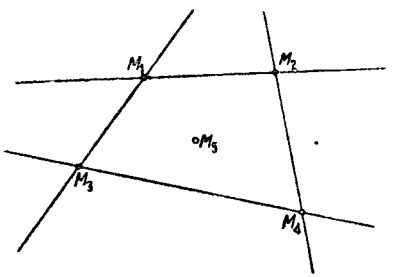
линейных и однородных относительно шести неизвестных величин $a_{11}, \ldots, a_{33}$. Эти пять уравнений дадут, вообще говоря, вполне определенные значения для отношений пяти из неизвестных величин к шестой.

[1]) См. Добавление, § 11.

Однако при известных частных расположениях данных точек сказанное может оказаться несправедливым.

Если, например, четыре из данных точек расположены на одной и той же прямой, то, очевидно, существует бесчисленное множество линий второго порядка, проходящих через даиные точки: каждая из этих линий представляет совокупность двух прямых, одна из которых проходит через четыре упомянутые точки, а вторая — произвольная прямая, проходящая через пятую точку.

Если, в еще более частном случае, все пять точек расположены на одной и той же прямой, то тогда решение дается совокупностью двух прямых, из которых первая проходит через данные точки, а вторая совершенно произвольна. Нетрудно показать, что, за исключением упомянутых частных случаев, мы всегда получим вполне определенную линию второго порядка, т. е. что *всякие пять различных точек плоскости, из которых никакие четыре не расположены на одной и той же прямой, определяют одну и только одну линию второго порядка, проходящую через них.*



Черт. 141.

Докажем высказанное предложение. Известно (см. Добавление, § 6), что система линейных и однородных уравнений (2) либо дает вполне определенные значения для отношений неизвестных $a_{11}, \ldots, a_{33}$, либо же некоторые из уравнений (2) являются линейными комбинациями остальных. В первом случае мы получим вполне определенную линию второго порядка.

Во втором случае по крайней мере одно из уравнений, скажем последнее, есть следствие остальных. Это значит, что всякая линия второго порядка, проходящая через точки M_1, M_2, M_3, M_4, будет проходить и через M_5. Покажем сперва, что это может быть только тогда, когда три из точек M_1, M_2, M_3, M_4 расположены на одной прямой. Действительно, предположим противное. Пара прямых M_1M_2 и M_3M_4 (черт. 141) представляет собою линию второго порядка, проходящую через точки M_1, M_2, M_3, M_4; тем же свойством обладает и линия второго порядка, состоящая из совокупности прямых M_1M_3 и M_2M_4.

Но эти две линии второго порядка не имеют никаких других общих точек, кроме M_1, M_2, M_3, M_4; следовательно, обе они не могут проходить одновременно через точку M_5, а это противоречит условию.

Итак, пусть, например, точки M_1, M_2, M_3 расположены на одной прямой. Покажем, что точка M_5 будет находиться на этой прямой.

Действительно, в противном случае, мы могли бы построить линию второго порядка, проходящую через M_1, M_2, M_3, M_4, но не через M_5; для этого достаточно взять совокупность двух прямых, одна из которых проходит через M_1, M_2, M_3, а другая — через M_4, но не через M_5.

Итак, одно из уравнений (2) может быть следствием остальных только в том случае, если четыре из заданных точек расположены на одной и

той же прямой. В этом последнем случае задача имеет не одно, а бесчисленное множество решений, как было уже сказано.

Замечание 1. Из самого способа доказательства предложения об определении линии второго порядка по пяти точкам вытекает, что если две линии второго порядка имеют все точки общими, то коэфициенты их уравнений пропорциональны [1]).

Действительно, возьмем на одной из линий пять различных точек. Если среди них нет четырех, расположенных на одной прямой, то система (2) даст для коэфициентов $a_{11}, \ldots, a_{33}$ вполне определенные отношения. Так как коэфициенты $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$ уравнения второй линии удовлетворяют той же системе, то они должны быть пропорциональны коэфициентам $a_{11}, \ldots, a_{33}$.

Если среди выбранных пяти точек есть четыре, расположенные на одной и той же прямой, то линии распадаются на две прямых каждая, и тогда наше утверждение легко проверяется непосредственно.

Замечание 2. Разумеется, все предыдущие рассуждения можно провести, применяя и неоднородные координаты. Но тогда, в некоторых случаях, могут потребоваться дополнительные рассмотрения, касающиеся несобственных элементов.

Упражнение

Построить линию второго порядка, проходящую через точки (в неодиородных координатах):

$$M_1(3, 0),\ M_2(-3, 0),\ M_3(0, 2),\ M_4(0, -2),\ M_5\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right).$$

Решение. Коэфициенты уравнений искомой линии определяются из системы:

$$\begin{gathered} 9a_{11} + 6a_{13} + a_{33} = 0, \\ 9a_{11} - 6a_{13} + a_{33} = 0, \\ 4a_{22} + 4a_{23} + a_{33} = 0, \\ 4a_{22} - 4a_{23} + a_{33} = 0, \\ \frac{27}{4}a_{11} + 3\sqrt{3}a_{12} + a_{22} + 3\sqrt{3}a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0. \end{gathered}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим $a_{13} = 0$; вычитая же четвертое из третьего, $a_{23} = 0$, так что система сводится к следующей:

$$\begin{gathered} 9a_{11} + a_{33} = 0, \quad 4a_{22} + a_{33} = 0, \\ \frac{27}{4}a_{11} + 3\sqrt{3}a_{12} + a_{22} + a_{33} = 0. \end{gathered}$$

Из первых двух имеем

$$a_{11} = -\frac{a_{33}}{9}, \quad a_{22} = -\frac{a_{33}}{4}.$$

Подставляя эти значения в последнее, получим $a_{12} = 0$. Итак, окончательно $a_{13} = a_{12} = a_{23} = 0$, и уравнение искомой линии примет вид (по разделении на a_{33})

$$-\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 1 = 0$$

или

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

[1]) Предложение нами уже получено иным путем (§ 209).

213. Пучок линий второго порядка. На основании сказанного в предыдущем параграфе, через всякие данные четыре точки плоскости проходит бесчисленное множество линий второго порядка. Если данные четыре точки не расположены на одной прямой, то совокупность этих линий зависит от одного параметра (это будет сейчас показано) и называется *пучком линий второго порядка.*

Найдем общее уравнение линии второго порядка, принадлежащей пучку. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — данные точки, не расположенные на одной прямой. Возьмем какую-либо пятую точку M' и проведем через пять точек $M_1, \ldots, M_4$, M' кривую второго порядка $\Phi(x, y, t) = 0$. Затем возьмем еще какую-либо точку M'', не расположенную на кривой $\Phi(x, y, t) = 0$, и проведем опять через пять точек M_1, M_2, M_3, M_4, M'' линию второго порядка $\Psi(x, y, t) = 0$, которая будет, конечно, отлична от первой. Мы имеем, таким образом, две линии второго порядка, проходящие через четыре данные точки. Докажем, что *всякая* линия второго порядка, проходящая через эти же четыре точки, может быть представлена уравнением

$$\lambda\Phi(x, y, t) + \mu\Psi(x, y, t) = 0, \tag{1}$$

где λ и μ — постоянные, не равные одновременно нулю.

Действительно, ясно, что (1) представляет линию второго порядка, проходящую через данные четыре точки. Остается показать, что, придав λ и μ подходящие значения, мы можем получить всякую линию второго порядка, проходящую через эти точки. Пусть $\Phi_0(x, y, t) = 0$ такая линия. Возьмем на ней какую-либо точку $M_0(x_0, y_0, t_0)$, не расположенную на одной прямой с тремя из данных точек M_1, M_2, M_3, M_4, и подберем параметры λ и μ так, чтобы линия (1) также проходила через эту точку. Для этого достаточно придать λ и μ такие значения, чтобы

$$\lambda\Phi(x_0, y_0, t_0) + \mu\Psi(x_0, y_0, t_0) = 0, \tag{2}$$

что, очевидно, всегда возможно. Если параметры λ и μ подобраны указанным образом, то линия (1) проходит через те же пять точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_0, что и линия $\Phi_0(x, y, t) = 0$, и, следовательно, совпадает с ней.

Уравнение (1) содержит два произвольных параметра λ и μ, но линии, представляемые этим уравнением, зависят, очевидно, только от отношения этих параметров, т. е. от одного параметра

$$k = \frac{\lambda}{\mu}.$$

При $k = 0$ получаем линию $\Psi = 0$, а при $k = \infty$ (т. е. при $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$) — линию $\Phi = 0$.

В частности, в качестве линий $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ мы можем взять, например, пары прямых (M_1M_2, M_3M_4) и (M_1M_3, M_2M_4), так что нахождение линий $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$ никакого труда не представляет. Таким образом, если $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, где f_1, f_2, f_3, f_4 — линейные формы переменных x, y, t, суть уравнения прямых M_1M_2, M_3M_4, M_1M_3,

M_2M_4, то общее уравнение линий второго порядка, проходящих через наши четыре точки, будет

$$\lambda f_1 f_2 + \mu f_3 f_4 = 0, \tag{3}$$

или

$$f_3 f_4 + k f_1 f_2 = 0, \tag{3а}$$

где

$$k = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{4}$$

На основании предыдущего очень легко решить задачу о нахождении линии второго порядка, проходящей через данные пять точек: для этого достаточно написать общее уравнение (3) линий, проходящих через четыре из данных точек, а затем подобрать отношение $\frac{\lambda}{\mu}$ так, чтобы линия проходила и через пятую точку.

Упражнения и дополнения

1. Решить задачу, приведенную в упражнении § 212 методом, указанным в конце настоящего параграфа.

Решение. Уравнения прямых M_1M_2, M_3M_4, M_1M_3, M_2M_4 суть соответственно (мы применяем неоднородные координаты):

$$y = 0, \quad x = 0, \quad 2x + 3y - 6 = 0, \quad 2x + 3y + 6 = 0,$$

так что общее уравнение линий второго порядка, проходящих через точки M_1, M_2, M_3, M_4, будет

$$\lambda xy + \mu (2x + 3y - 6)(2x + 3y + 6) = 0.$$

Выражая, что предыдущая линия проходит через точку $M_5\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, получаем $\lambda = -12\mu$. Мы можем взять, например, $\mu = 1$, $\lambda = -12$. Подставляя эти значения, получаем уравнение искомой линии:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

2. Найти общее уравнение линий второго порядка, проходящих через четыре точки пересечения данной линии второго порядка $\Phi = 0$ с двумя данными прямыми $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$.

Ответ. $\lambda\Phi + \mu f_1 f_2 = 0$.

3. Найти общее уравнение линий второго порядка, проходящих через две точки пересечения линии второго порядка $\Phi = 0$ с прямою $f_1 = 0$.

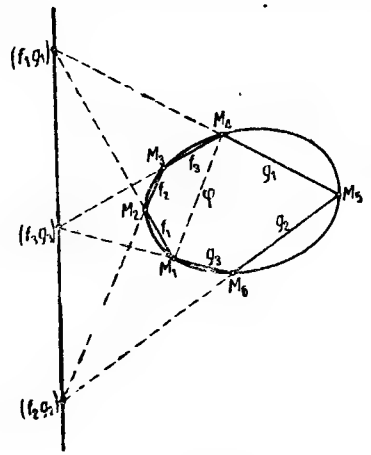
Ответ. $\lambda\Phi + f_1 f_2 = 0$, где λ — произвольная постоянная, а f_2 — произвольная линейная форма, т. е. $f_2 = ax + by + ct$, где a, b, c — произвольные числа. Мы видим, что наша линия зависит от трех произвольных параметров (отношений трех из величин λ, a, b, c к четвертой).

214. Теорема Паскаля. Как мы видели, кривая второго порядка вполне определяется любыми своими пятью точками, при условии, что никакие четыре из них не коллинеарны. Следовательно, любая шестая точка кривой должна быть связана с пятью данными точками определенным соотношением. Геометрическое содержание этого соотношения дается следующей *теоремой Паскаля*: *точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в линию второго порядка, расположены на одной прямой.* Разъясним сперва содержание теоремы. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 — шесть различных точек, взятых на данной линии второго порядка. Соединим их последовательно (в том

порядке, как они написаны) прямыми. Мы получим шестиугольник со стороиами M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_1. (Если бы мы соединяли точки в иной последовательности, мы получили бы другой шестиугольник; теорема применима к любому из них.) Обозначим стороны в той последовательности, как они написаны, следующим образом (черт. 142):

$$f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3.$$

Стороны f_1 и g_1, f_2 и g_2, f_3 и g_3 называются противоположными. Теорема Паскаля утверждает, что точки (f_1g_1), (f_2g_2), (f_3g_3) расположены на одной прямой; мы обозначаем символом (fg) точку пересечения прямых f и g.



Черт. 142.

Для большей ясности мы проведем доказательство теоремы, считая, что данная линия не распадающаяся и что, следовательно, никакие три из вершин $M_1, \ldots, M_6$ не коллинеарны, хотя легко провести доказательство и в общем случае.

Проведем вспомогательную прямую φ через точки (f_3g_1) и (g_3f_1). Мы получим два четырехугольника со сторонами f_1, f_2, f_3, φ и g_1, g_2, g_3, φ, вокруг каждого из которых описана наша кривая второго порядка.

Будем, для большей наглядности, обозначать левые части уравнений прямых f_1, f_2 и т. д. теми же буквами, что и сами прямые (так что уравнение прямой f_1 будет $f_1 = 0$ и т. д.).

На основании сказанного в предыдущем параграфе, уравнение нашей линии второго порядка можно написать в любом из следующих двух видов:

$$f_1f_3 + \lambda f_2\varphi = 0 \quad \text{и} \quad g_1g_3 + \mu g_2\varphi = 0,$$

где λ и μ — подходящим образом подобранные числа [1]). Так как оба эти уравнения представляют одну и ту же линию второго порядка, мы должны иметь тождество

$$g_1g_3 + \mu g_2\varphi = \nu(f_1f_3 + \lambda f_2\varphi),$$

где ν — некоторый постоянный множитель.

Не нарушая общности, можно считать $\nu = 1$, ибо множитель ν можно включить в коэфициенты линейных функций f_1 и f_2. Итак, мы имеем тождество

$$g_1g_3 + \mu g_2\varphi = f_1f_3 + \lambda f_2\varphi,$$

откуда

$$g_1g_3 - f_1f_3 = \varphi(\lambda f_2 - \mu g_2). \qquad (1)$$

---

[1]) Здесь λ и μ обозначают то, что в предыдущем параграфе было обозначено через k.

Уравнение $\varphi(\lambda f_2 - \mu g_2) = 0$ представляет собою пару прямых, из которых одна есть φ; обозначим другую через φ'. Эта последняя прямая, очевидно, проходит через точку $(f_2 g_2)$ [1]). Уравнение $g_1 g_3 - f_1 f_3 = 0$ изображает ту же пару прямых, что и предыдущее, в силу тождества (1). Эта пара прямых проходит, очевидно, через точки $(g_1 f_1)$, $(g_3 f_3)$, $(g_1 f_3)$, $(g_3 f_1)$. Последние две расположены на прямой φ; первые две на ней, очевидно, не расположены [2]) и, следовательно, расположены на прямой φ', которая содержит и точку $(f_2 g_2)$. Таким образом точки $(g_1 f_1)$, $(g_2 f_2)$, $(g_3 f_3)$ расположены на одной прямой φ', а это и требовалось доказать.

Теорема Паскаля дает возможность построить при помощи одной только линейки любое количество точек линии второго порядка, если заданы пять ее точек; предоставляем показать это читателю.

215. Образование линий второго порядка проективными пучками. Докажем еще следующее предложение, которое, так же как и теорема Паскаля, может служить для чисто проективного определения линий второго порядка.

Пусть F и G — две точки линии второго порядка Γ (черт. 143). Рассмотрим пучки прямых с центрами F и G и приведем в соответствие те прямые f и g этих пучков, которые проходят через одну и ту же точку M линии Γ. *Полученное, таким образом, соответствие пучков — проективное.* Обратно, *точки пересечения соответствующих прямых двух проективных пучков образуют линию второго порядка, проходящую через центры пучков.*

Пусть, в самом деле, f', f'' — две прямые первого пучка, а g', g'' — соответствующие прямые второго. Так как наша кривая проходит через точки пересечения пары прямых f', g'' с парою g', f'', то ее уравнение можно представить в виде

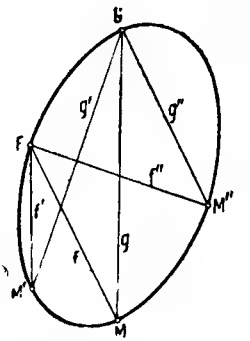
$$f' g'' - k f'' g' = 0,$$

где k — некоторое число, или, включая k в одну из линейных функций f'', g' — в виде

$$f' g'' - f'' g' = 0 \qquad (1)$$

или еще

$$\frac{f''}{f'} = \frac{g''}{g'}. \qquad (1a)$$



Черт. 143.

Итак, координаты всякой точки нашей линии удовлетворяют уравнению (1а).

Пусть теперь f — какая-либо прямая первого пучка, а g — соответствующая прямая второго. Уравнения этих прямых будут соответственно

$$f' - \lambda f'' = 0 \quad \text{и} \quad g' - \mu g'' = 0, \qquad (2)$$

где λ и μ — некоторые числа.

---

[1]) Ибо уравнение этой прямой $\varphi' = \lambda f_2 - \mu g_2 = 0$.

[2]) Точка $(g_1 f_1)$ может находиться на φ только тогда, когда g_1 или f_1 (или обе вместе) сливаются с φ. Но тогда одна из точек M_2 или M_5 (или обе вместе) должна находиться на φ, т. е. на одной прямой с M_1 и M_4, что противоречит условию.

Эти прямые имеют общую точку M, расположенную на данной линии; подставляя координаты этой точки в (2) и принимая во внимание (1а), получаем

$$\lambda = \mu.$$

Итак, для соответствующих прямых наших пучков имеем $\lambda = \mu$, а отсюда и следует, что соответствие — проективное (§ 186).

Обратно, пусть мы имеем два пучка (2), приведенных в проективное соответствие. Мы всегда можем считать (§ 186), что это проективное соответствие выражается равенством $\lambda = \mu$. Следовательно, соответствующие прямые двух пучков будут иметь уравнения:

$$f' = \lambda f'', \quad g' = \lambda g''$$

с одним и тем же λ. Координаты точки пересечения этих прямых удовлетворяют обоим предыдущим уравнениям. Исключая λ, получаем (1а) или (1), откуда видно, что точки пересечения соответствующих прямых образуют линию второго порядка (1); эта линия, очевидно, проходит через точки G и F.

II. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОЮ. КАСАТЕЛЬНАЯ

216. Уравнение, определяющее пересечение линии второго порядка с прямою в однородных координатах. Одним из главнейших способов изучения свойств линий второго порядка является рассмотрение ее пересечения с прямыми. Мы уже несколько раз имели случай касаться вопроса о пересечении алгебраических линий, в частности второго порядка, с прямою.

Рассмотрим теперь этот вопрос более подробно и начнем с вывода весьма простого и симметричного уравнения, определяющего точки пересечения данной линии второго порядка с прямою.

Пусть дана линия второго порядка уравнением в однородных координатах

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

где по принятым нами обозначениям (§ 208)

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2. \tag{2}$$

Пусть, далее, дана некоторая прямая; будем считать ее заданной параметрически

$$x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'', \tag{3}$$

где x_1', x_2', x_3' и x_1'', x_2'', x_3'' — две какие-либо различные точки данной прямой.

Подставляя выражения (3) в уравнение (1) и принимая во внимание формулу (11) § 208, легко получим уравнение

$$\lambda^2\Phi(x'; x') + 2\lambda\mu\Phi(x'; x'') + \mu^2\Phi(x''; x'') = 0, \tag{4}$$

где, согласно обозначениям § 208,

$$\begin{aligned}\Omega(x'; x'') &= \Omega(x_1', x_2', x_3'; x_1'', x_2'', x_3'') = \\ &= x_1''\Phi_1(x_1', x_2', x_3') + x_2''\Phi_2(x_1', x_2', x_3') + x_3''\Phi_3(x_1', x_2', x_3') = \\ &= x_1''(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3') + x_2''(a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3') + \\ &\quad + x_3''(a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3'),\end{aligned} \tag{5}$$

а $\Omega(x'; x') = \Phi(x_1', x_2', x_3')$ получается из $\Omega(x'; x'')$, если заменить x_1'', x_2'', x_3'' на x_1', x_2', x_3'; аналогично для $\Omega(x''; x'')$.

Уравнение (4) определяет отношение

$$h = \frac{\lambda}{\mu};$$

а именно, разделяя уравнение (4) на μ^2, получим уравнение для определения h:

$$h^2\Omega(x'; x') + 2h\Omega(x'; x'') + \Omega(x''; x'') = 0. \tag{4a}$$

Если все три коэфициента этого квадратного уравнения равны нулю, то оно обращается в тождество и, следовательно, рассматриваемая прямая целиком принадлежит нашей линии (это может быть только тогда, когда линия распадающаяся). Исключая этот случай, мы можем всегда считать, что $\Omega(x'; x') \neq 0$, т. е. что точка (x_1', x_2', x_3') не расположена на рассматриваемой линии [1]). Тогда решения уравнения (4a) будут даны формулой

$$h = \frac{-\Omega(x'; x'') \pm \sqrt{\Omega^2(x'; x'') - \Omega(x'; x')\Omega(x''; x'')}}{\Omega(x'; x')}. \tag{6}$$

Таким образом мы имеем две точки пересечения (действительные, мнимые; различные или совпадающие).

217. Касательная к линии второго порядка. Прямая Δ называется *касательной* к данной линии второго порядка Γ, если обе точки пересечения Δ с Γ совпадают. Точка, в которой совпадают точки пересечения, называется *точкой касания*.

Найдем уравнение касательной к данной линии Γ второго порядка

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

в данной ее точке M_0. Обозначим через y_1, y_2, y_3 координаты этой точки касания; по условию, точка M_0 принадлежит данной кривой, так что

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Пусть $M(x_1, x_2, x_3)$ какая-либо другая (произвольная) точка искомой касательной (черт. 144). Для того чтобы найти уравнение, которому должны удовлетворять координаты точки M (это и будет уравнением касательной), выразим, что две точки пересечения прямой M_0M с линией Γ совпадают. Применим с этой целью уравнение (4a) предыдущего параграфа, взяв в качестве точки (x_1', x_2', x_3') точку $M(x_1, x_2, x_3)$, а в качестве точки (x_1'', x_2'', x_3'') — точку $M_0(y_1, y_2, y_3)$.

[1]) Это предположение не существенно. Только при $\Omega(x'; x') = 0$ неприменима формула (6).

Так как, по условию, $\Omega(y;\ y) = \Phi(y_1,\ y_2,\ y_3) = 0$, то упомянутое уравнение примет вид

$$h^2\Omega(x;\ x) + 2h\Omega(x;\ y) = 0. \qquad (*)$$

Оно имеет один из корней $h = 0$, как и следовало ожидать (ибо $h = 0$ соответствует точке M_0). Для того чтобы и второй корень был равен нулю, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $\Omega(x;\ y) = 0$.

Итак, уравнение касательной в точке $M_0(y_1,\ y_2,\ y_3)$ имеет вид

$$\Omega(x_1,\ x_2,\ x_3;\ y_1,\ y_2,\ y_3) = 0, \qquad (2)$$

или, подробнее,

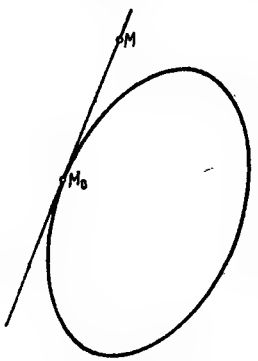
$$x_1\Phi_1(y_1,\ y_2,\ y_3) + x_2\Phi_2(y_1,\ y_2,\ y_3) + x_3\Phi_3(y_1,\ y_2,\ y_3) = 0, \qquad (3)$$

где, согласно принятым в § 208 обозначениям, Φ_1, Φ_2, Φ_3 суть половины частных производных от $\Phi(y_1,\ y_2,\ y_3)$ соответственно по y_1, y_2, y_3.

Поэтому уравнение (3) можно переписать и так:

$$x_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_2} + x_3\frac{\partial\Phi}{\partial y_3} = 0; \qquad (3a)$$

последнее уравнение отличается от (3) только постоянным множителем 2.



Черт. 144.

В предыдущих уравнениях y_1, y_2, y_3 — постоянные (координаты точки касания), а x_1, x_2, x_3 — текущие координаты.

Уравнение (3) изображает вполне определенную прямую, за исключением того случая, когда одновременно

$$\Phi_1(y_1,\ y_2,\ y_3) = \Phi_2(y_1,\ y_2,\ y_3) = \Phi_3(y_1,\ y_2,\ y_3) = 0. \qquad (4)$$

Но это может быть только тогда, когда Γ — распадающаяся линия, а $M_0(y_1,\ y_2,\ y_3)$ — ее двойная точка (§ 211, замечание).

Итак, через каждую точку M_0 линии Γ можно провести одну и только одну касательную к ней. Исключение представляет только тот случай, когда Γ — распадающаяся линия и M_0 — двойная ее точка.

В этом последнем случае „касательной“ можно считать всякую прямую, проходящую через эту точку, ибо такая прямая пересекает линию в двух совпадающих точках. Легко видеть, что если точка M_0 взята на одной из прямых, на которые распадается Γ (но не на их пересечении), то касательная совпадает с этой прямой.

На практике часто удобнее писать уравнение касательной в неоднородных координатах. Мы получим это уравнение, положив в (3) $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $y_1 = x_0$, $y_2 = y_0$, $y_3 = 1$, что дает, при обозначениях § 208, уравнение

$$x\Phi_1(x_0,\ y_0,\ 1) + y\Phi_2(x_0,\ y_0,\ 1) + \Phi_3(x_0,\ y_0,\ 1) = 0. \qquad (5)$$

Этому уравнению можно придать несколько иной вид. А именно, принимая во внимание, что точка $M(x_0,\ y_0)$ находится на нашей линии,

будем иметь: $F(x_0, y_0) = \Phi(x_0, y_0, 1) = 0$ и тождество (7а) § 208 дает

$$x_0\Phi_1(x_0, y_0, 1) + y_0\Phi_2(x_0, y_0, 1) + \Phi_3(x_0, y_0, 1) = 0. \qquad (**)$$

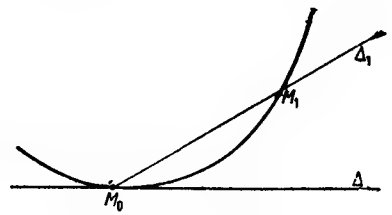
Вычитая (**) из (5), получим уравнение касательной в виде

$$(x - x_0)\Phi_1(x_0, y_0, 1) + (y - y_0)\Phi_2(x_0, y_0, 1) = 0, \qquad (6)$$

или еще (см. обозначения § 208)

$$(x - x_0)\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + (y - y_0)\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0. \qquad (6а)$$

218. Касательная, как предел секущей. Приведенное выше чисто алгебраическое определение касательной было нами дано применительно к линиям второго порядка. Его легко можно обобщить на алгебраические линии любого порядка (а также на так называемые „аналитические" линии). Мы на этом обобщении останавливаться не станем, а приведем определение касательной, которое обычно дается в дифференциальной геометрии и применимо ко всяким линиям.



Черт. 145.

Мы увидим, что это определение, примененное к линии второго порядка, приводит к тому же результату, что и первоначально данное (если исключить один частный случай, который будет особо оговорен).

Пусть дана некоторая линия и пусть M_0 и M_1 — две какие-либо ее точки, а Δ_1 — прямая („секущая"), проходящая через эти точки (черт. 145). Вообразим теперь, что точка M_0 остается неподвижной, а точка M_1 стремится к M_0, оставаясь все время на линии. *Прямая* Δ, *являющаяся предельным положением секущей* Δ_1 *при стремлении* M_1 *к* M_0, *называется касательной к данной линии в точке* M_0.

Разумеется, может случиться, что при приближении M_1 к M_0 секущая Δ_1 не стремится к определенному предельному положению; тогда говорят, что данная линия не имеет касательной в точке M_0.

Предыдущее определение касательной применимо не только к плоским линиям, но и к пространственным [1]).

Ограничиваясь случаем плоских линий, постараемся выяснить, при каких условиях мы можем утверждать, что данная линия имеет касательную в данной точке, и как ее определить.

Пусть

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

есть уравнение рассматриваемой линии на плоскости в неоднородных декартовых координатах.

Мы будем считать, что функция $F(x, y)$ не только непрерывна, но

[1]) Читатель, не знакомый с основами дифференциального исчисления, может опустить остальную часть этого параграфа.

и имеет непрерывные частные производные первого порядка в некоторой области изменения x и y, которую только и будем рассматривать.

Пусть (x_0, y_0) некоторая точка линии (1). Если хоть одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ отлична от нуля в точке (x_0, y_0), то эта точка называется *обыкновенной точкой* рассматриваемой линии; если же

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0,$$

то точка (x_0, y_0) называется *особенной*.

Мы будем в дальнейшем считать, что (x_0, y_0) обыкновенная точка нашей линии, так что в этой точке по крайней мере одна из величин $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ отлична от нуля. Будем, например, считать, что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

На основании известной теоремы о неявных функциях, соотношение (1) определяет y как однозначную функцию от x

$$y = f(x), \tag{2}$$

при условии рассматривать только такие точки (x, y), которые достаточно близки к точке (x_0, y_0). При этом функция $f(x)$ имеет вполне определенную производную, непрерывную в окрестности значения $x = x_0$.

От уравнения (2) легко перейти к параметрическому представлению нашей линии, положив, например,

$$x = t, \quad y = f(t). \tag{3}$$

Для большей общности, мы можем положить $x = \varphi_1(t)$, где $\varphi_1(t)$ — произвольная функция от t; тогда будем иметь

$$y = f[\varphi_1(t)] = \varphi_2(t).$$

Это было сказано нами еще в § 81; здесь, однако, мы сделаем существенное дополнение. А именно, мы заметим, что если (x_0, y_0) — обыкновенная точка нашей линии, то параметрическое ее представление

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \tag{4}$$

можно выбрать так, что для значений параметра t в некотором достаточно малом промежутке $t_0 - h$, $t_0 + h$, где t_0 — значение параметра, которому соответствует точка (x_0, y_0), обе функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ однозначны и имеют непрерывные производные, причем по крайней мере одна из этих производных нигде в этом промежутке не обращается в нуль.

Действительно, для этого достаточно в качестве функции $\varphi_1(t)$ выбрать любую функцию, такую, что $\varphi(t_0) = x_0$, и имеющую производную непрерывную и не обращающуюся в нуль в данном промежутке. Тогда и $\varphi_2(t) = f[\varphi_1(t)]$ будет иметь непрерывную производную (в достаточно малом промежутке $t_0 - h'$, $t_0 + h'$), ибо мы знаем, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную.

Наше рассуждение было основано на предположении, что

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} \neq 0.$$

Если $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0$, то, по условию, $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} \neq 0$, и мы получим тот же результат, поменяв ролями x и y, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

Если функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ обладают указанным свойством, мы будем говорить, что формулы (4) дают нормальное параметрическое представление линии в окрестности точки (x_0, y_0). Существенным свойством нормального представления является то, что каждому значению параметра t (вблизи значения t_0) соответствует одна определенная точка линии, и, обратно, каждой точке (x, y) линии, находящейся в окрестности точки (x_0, y_0), соответствует одно определенное значение параметра (вблизи значения t_0). Первое утверждение следует из однозначности функций φ_1 и φ_2. Второе утвержденне также легко доказать: по условию, по крайней мере одна из производных φ_1' или φ_2' отлична от 0 (вблизи значения $t = t_0$). Пусть, например, $\varphi_1'(t) \neq 0$. Тогда, на основании теоремы о неявных функциях, соотношение $x = \varphi_1(t)$ при данном x (близком к x_0) дает одно, вполне определенное значение для t.

Перейдем теперь к нахождению касательной в точке (x_0, y_0). Мы увидим, что при принятых предположениях касательная всегда существует.

Действительно, пусть t_0 и t_1 — значения параметра t, соответствующие точкам M_0 и M_1. Координаты (x_0, y_0) и (x_1, y_1) этих точек даются формулами:

$$x_0 = \varphi_1(t_0),\ y_0 = \varphi_2(t_0);\quad x_1 = \varphi_1(t_1),\ y_1 = \varphi_2(t_1).$$

В качестве вектора направления прямой Δ_1, проходящей через M_0 и M_1, может быть взят вектор $(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0)$ или любой вектор, ему параллельный, например, вектор (X, Y), где

$$X = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0},\quad Y = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0};$$

мы возьмем именно последний вектор. При t_1, стремящемся к t_0, величины X и Y стремятся к определенным пределам X_0, Y_0, а именно:

$$X_0 = \lim_{t_1 \to t_0} X = \lim \frac{\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0)}{t_1 - t_0} = \varphi_1'(t_0),\ Y_0 = \varphi_2'(t_0).$$

Вектор (X_0, Y_0) отличен от нуля, ибо, по условию, по крайней мере одна из величин $\varphi_1'(t_0)$, $\varphi_2'(t_0)$ не равна нулю. Значит, этот вектор имеет определенное направление. Из сказанного следует, что прямая Δ_1 стремится при $t_1 \to t_0$ к вполне определенной прямой Δ, проходящей через M_0 и имеющей вектором направления (X_0, Y_0). Значит, касательная существует, и уравнение ее будет

$$\frac{x - y_0}{X_0} = \frac{y - y_0}{Y_0} \tag{5}$$

или

$$\frac{x - y_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'}. \tag{6}$$

Здесь x_0' и y_0' обозначают значения производных $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ при значении параметра $t = t_0$, соответствующем точке касания M_0.

Если линия задана уравнением в явном виде (2), то можно взять $x = t$, $y = f(t)$; тогда будет

$$x' = 1, \quad y' = f'(t), \quad y_0' = f'(t_0) = f'(x_0),$$

и уравнение касательной (6) может быть написано так:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{7}$$

Если линия задана уравнением в общем виде, то для вывода уравнения касательной нет необходимости фактически переходить к параметрическому представлению; достаточно знать, что такое представление возможно. Представим себе, что в уравнении линии

$$F(x, y) = 0$$

на место x и y подставлены их выражения через параметр t. Тогда предыдущее уравнение обратится в тождество. Диференцируя его (по правилу диференцирования сложной функции), получим

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0,$$

откуда, подставляя на место t значение t_0,

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0}x_0' + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0}y_0' = 0.$$

Так как, по условию, по крайней мере одна из величин $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ отлична от нуля, то предыдущее соотношение вполне определяет отношение величин x_0' и y_0'. Подставляя на место x_0', y_0' пропорциональные им [на основании (6)] величины $x - x_0$, $y - y_0$, получим уравнение касательной в виде

$$(x - x_0)\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} + (y - y_0)\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0. \tag{8}$$

Если, в частности, $F(x, y)$ — полином второй степени, то рассматриваемая линия — второго порядка; особенную точку эта линия может иметь только в том случае, когда она распадается на две прямые; особенной точкой является пересечение этих прямых, т. е. двойная точка. Действительно, если $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x_0} = 0$, $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0$, т. е. если $\Phi_1(x_0, y_0, 1) = \Phi_2(x_0, y_0, 1)$, то, на основании формулы (**) предыдущего параграфа, и $\Phi_3(x_0, y_0, 1) = 0$.

Значит, в этом случае

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = 0, \quad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = 0, \quad \Phi_3(x_0, y_0, 1) = 0$$

а отсюда и следует наше утверждение [1]).

[1]) См. предыдущий параграф.

Если исключить случай, когда (x_0, y_0) — особенная точка, то, как мы видим, определение касательной, данное в этом параграфе, приводит к тому же результату, что и определение, данное раньше.

Мы не останавливаемся на вопросе о касательных в особенных точках.

Замечание. В случае пространственной линии, заданной параметрически,

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t),$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — однозначные функции, имеющие непрерывные производные в некотором промежутке, причем по крайней мере одна из этих производных отлична от нуля, касательная существует и дана уравнением

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'}. \tag{9}$$

Для доказательства достаточно почти буквально повторить рассуждения этого параграфа.

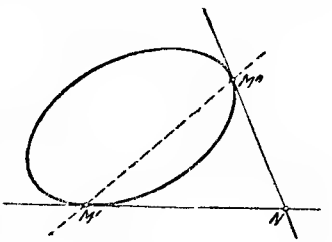
III. ПОЛЮС И ПОЛЯРА. ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

219. Проведение касательной из заданной точки плоскости. Полюс и поляра. Поставим себе следующую задачу: дана произвольная точка $N(y_1, y_2, y_3)$ на плоскости; провести через нее касательную к данной линии второго порядка Г.

Пусть

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

уравнение линии Г, которую мы будем в дальнейшем (если противное не оговорено) считать нераспадающейся [1]), и пусть $M'(x_1', x_2', x_3')$ точка касания (пока неизвестна) одной из касательных, проведенных через данную точку N к кривой Г (черт. 146). Уравнение касательной в M' имеет вид



Черт. 146.

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; x_1', x_2', x_3') = 0,$$

где x_1', x_2', x_3' — постоянные, а x_1, x_2, x_3 — текущие координаты. Для того чтобы эта прямая удовлетворяла условиям задачи, она должна проходить через точку $N(y_1, y_2, y_3)$. Выразив это условие, получим

$$\Omega(y_1, y_2, y_3; x_1', x_2', x_3') = 0.$$

Итак, координаты точки касания $M'(x_1', x_2', x_3')$ должны удовлетворять предыдущему уравнению и уравнению $\Phi(x_1', x_2', x_3') = 0$, выражающему, что точка M' находится на линии Г.

Отбрасывая, для упрощения письма, штрихи, видим, что координаты

[1]) Случай распадающейся линии не представляет интереса с точки зрения решения поставленной задачи, ибо решение в этом случае очевидно.

x_1, x_2, x_3 искомой точки касания удовлетворяют двум уравнениям: уравнению (1) и уравнению $\Omega(y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3) = 0$, или, подробнее,

$$x_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3) + x_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3) + x_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3) = 0. \quad (2)$$

Если будем теперь рассматривать x_1, x_2, x_3 в предыдущем уравнении, как текущие координаты, то увидим, что искомая точка касания находится на пересечении прямой (2) с линией Г.

Эта прямая [1]) (2) пересекает Г в двух точках M' и M'' (действительных, мнимых, различных или совпадающих) и каждая из этих точек удовлетворяет, очевидно, условию задачи.

Итак, для решения поставленной задачи достаточно найти точки M', M'' пересечения прямой (2) с линией Г и провести через эти точки касательные к ней. Эту же последнюю задачу мы решать умеем.

Мы видим, что из заданной произвольной точки плоскости можно провести две и только две касательные к данной линии второго порядка (действительные, мнимые, различные или совпадающие).

Прямая (2) всегда действительная, если точка M — действительная, называется *полярой* [2]) точки N относительной кривой Г; точка же N называется *полюсом* прямой (2) относительно Г.

Перепишем уравнение (2) так:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \quad (2a)$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1(y_1, y_2, y_3) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ u_2 &= \Phi_2(y_1, y_2, y_3) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ u_3 &= \Phi_3(y_1, y_2, y_3) = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Величины u_1, u_2, u_3 суть (однородные) координаты прямой (2), т. е. координаты поляры точки $N(y_1, y_2, y_3)$. Так как, по предположению, линия Г нераспадающаяся, то определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля и система (3) разрешима относительно y_1, y_2, y_3:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ y_2 &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ y_3 &= b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A} = \frac{A_{ji}}{A} \quad (5)$$

---

[1]) Это вполне определенная прямая, ибо коэфициенты у авнения (2) не могут быть равны нулю одновременно, так как, по предположению, линия Г — нераспадающаяся.

[2]) Обратим внимание на то, что уравнение поляры формально имеет тот же вид, что уравнение касательной; только в уравневии поляры y_1, y_2, y_3 обозначают координаты произвольной точки, а не обязательно точки, расположенной на Г.

и где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе [1]) A.

Из (4) следует, что каждой прямой $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ плоскости отвечает вполне определенный полюс $N(y_1, y_2, y_3)$, т. е. точка, полярой которой она является.

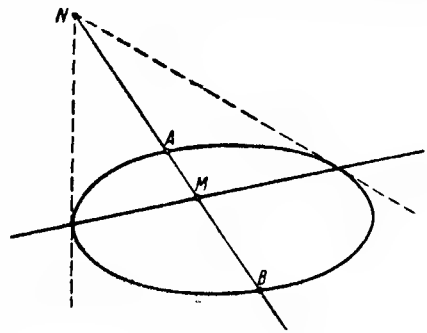
Выясним теперь важный вопрос: когда полюс расположен на своей поляре.

Если точка $N(y_1, y_2, y_3)$ расположена на своей поляре, то эта точка принадлежит самой линии Γ и поляра обращается в касательную к Γ в точке N. Действительно, если точка N находится на поляре (2), то ее координаты должны удовлетворять уравнению (2), откуда следует

$$y_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3)+y_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3)+y_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3)=$$
$$=\Phi(y_1, y_2, y_3)=0;$$

следовательно, точка N принадлежит Γ. Тогда уравнение (2) есть, очевидно, уравнение касательной к Γ в точке N.

Обратно, если N принадлежит Γ, то она расположена на своей поляре, которая в этом случае обращается в касательную в точке N; это непосредственно следует из уравнения (2) поляры точки N.



Черт. 147.

Так как у данной прямой имеется только один полюс, то очевидно, что полюсом всякой касательной к Γ является точка касания.

Мы видели выше, что из данной точки можно провести две касательные к данной линии второго порядка; эти касательные могут быть и совпадающими. На основании только что сказанного, последнее будет иметь место тогда и только тогда, когда точка N находится на самой линии Γ. Действительно, в этом случае точки M' и M'' должны совпадать, т. е. поляра точки M должна обратиться в касательную к Γ.

Если касательные, проведенные из данной точки N к Γ, — различные и мнимые, то точка M называется *внутренней* точкой относительно Γ; если же касательные различные и действительные, то точка называется *внешней*. Мы видели, что если обе касательные совпадают, то точка находится на самой линии Γ.

220. Другое определение полюса и поляры. Сопряженные точки. Наиболее важные свойства полюса и поляры легче всего вытекают из другого их определения, которое будет сейчас приведено. Начнем с введения понятия *сопряженных точек* относительно данной линии Γ второго порядка.

Две точки M и N называются сопряженными относительно линии второго порядка Γ, если эти точки гармонически сопряжены относительно точек A и B пересечения прямой MN с Γ (черт. 147), т. е. если

$$(M, N, A, B)=-1.$$

[1]) $A_{ij}=A_{ji}$, так как определитель A — симметричный, т. е. $a_{ij}=a_{ji}$.

На всякой прямой δ, пересекающей Γ в двух различных (действительных или мнимых) точках, имеется бесчисленное множество пар сопряженных точек: каждой точке прямой соответствует вполне определенная сопряженная. Это соответствие есть инволюция (§ 188), двойными точками которой являются точки A, B пересечения δ с Γ.

Найдем соотношение, связывающее координаты двух сопряженных точек $M(x_1, x_2, x_3)$ и $N(y_1, y_2, y_3)$. Для этого составим уравнение, определяющее точки пересечения A, B прямой MN с линией Γ, определяемой уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Применяя обозначения § 216 (здесь роль x_1', x_2', x_3' будут исполнять x_1, x_2, x_3, а роль x_1'', x_2'', x_3'' — соответственно y_1, y_2, y_3), будем иметь

$$h^2 \Omega(x; x) + 2h \Omega(x; y) + \Omega(y; y) = 0.$$

Двум корням h_1 и h_2 этого уравнения и соответствуют две точки пересечения A и B. Для того чтобы две пары (M, N) и (A, B) разделяли друг друга гармонически, необходимо и достаточно[1]) (§ 184, замечание), чтобы $h_1 = -h_2$ или $h_1 + h_2 = 0$, а это значит, что в предыдущем уравнении средней коэфициент равен нулю, т. е.

$$\Omega(x; y) = 0. \tag{1}$$

Это и есть соотношение, связывающее координаты двух сопряженных точек M, N. Оно симметрично относительно обеих точек M, N, ибо $\Omega(x; y) = \Omega(y; x)$.

Возьмем теперь на плоскости какую-либо неподвижную точку $N(y_1, y_2, y_3)$ и найдем геометрическое место точек $M(x_1, x_2, x_3)$, сопряженных с ней по отношению к Γ. Это геометрическое место будет, очевидно, дано уравнением $\Omega(x; y)=0$, или, подробнее,

$$x_1 \Phi_1(y_1, y_2, y_3) + x_2 \Phi_2(y_1, y_2, y_3) + x_3 \Phi_3(y_1, y_2, y_3) = 0, \tag{2}$$

где y_1, y_2, y_3 — постоянные, а x_1, x_2, x_3 — текущие координаты. Мы видим, что искомое геометрическое место есть прямая. Она и называется *полярой* точки N относительно линии Γ.

Уравнение (2) этого параграфа совпадает с уравнением (2) предыдущего, и, следовательно, оба определения поляры — эквивалентны.

Точка N есть *полюс* прямой (2) относительно Γ.

На основании сказанного очевидно, что соотношение (1) выражает следующее: точка M находится на поляре точки N и точка N находится на поляре точки M. Поэтому сопряженные точки можно характеризовать так: точки M и N сопряжены относительно Γ, если каждая из них расположена на поляре другой. Достаточно, очевидно, чтобы, например, точка M находилась на поляре точки N; из этого уже вытекает, что и точка N расположена на поляре точки M. Это — непосредственное следствие того, что $\Omega(x; y) = \Omega(y; x)$.

Замечание. Определение поляры применимо и к случаю, когда

[1]) Параметр h можно, как мы знаем (§ 184), рассматривать как проективную координату на прямой MN, при основных точках M и N.

Γ — распадающаяся линия второго порядка. Только в этом случае соответствие между полюсом и полярой не будет обратимо однозначным.

Читателю предлагается доказать следующее. Пусть Γ распадается на две различные прямые δ', δ'', пересекающиеся в некоторой точке O. Тогда поляра Δ всякой точки N, отличной от O, — вполне определенная прямая, проходящая через O. Прямые Δ и ON гармонически сопряжены относительно прямых δ' и δ''. Поляра точки O — неопределенная прямая. Всякая прямая Δ, проходящая через O, имеет бесчисленное множество полюсов; геометрическое место этих полюсов есть прямая Δ', проходящая через O, гармонически сопряженная с Δ по отношению к δ' и δ''.

Полюс всякой прямой, не проходящей через O, есть точка O.

Все это можно доказать, исходя из определения поляры, данного в этом параграфе, или принимая за ее определение уравнение (2) предыдущего параграфа.

Случай, когда Γ есть совокупность двух совпадающих прямых, предоставляем рассмотреть читателю.

221. Полярность, определяемая линией второго порядка. Пусть попрежнему

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

— уравнение нераспадающейся линии второго порядка Γ. Мы видели, что эта линия приводит в соответствие каждой точке $M(x_1, x_2, x_3)$ — *полюсу* — вполне определенную прямую $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ — *поляру* — и обратно; соотношения, связывающие координаты полюса и поляры, имеют вид (§ 219)

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ u_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

решение которых относительно x_1, x_2, x_3 дает

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ x_2 &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ x_3 &= b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где попрежнему

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}.$$

Соответствие (2) или (3) между точками и прямыми на плоскости есть частный вид *корреляции* (взаимности) между двумя совмещенными плоскостями (§ 194); этот частный вид характеризуется тем, что таблица коэфициентов подстановки (2), а следовательно и (3), — *симметричная*.

Такая корреляция называется *полярностью*. Если дана полярность, т. е. корреляция (2) с произвольной симметричной таблицей[1]), то всегда существует линия второго порядка, определяющая эту полярность: уравнение этой линии есть (1), если под $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ подразумевать квадратичную форму с коэфициентом a_{ij}.

---

[1]) Подразумевается, что ее определитель отличен от нуля.

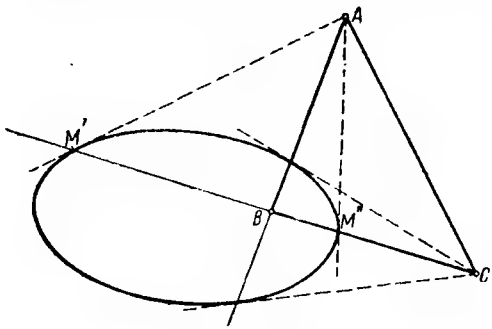
Характерной геометрической особенностью полярностей, выделяющей их среди корреляций общего вида, заключается в свойстве, которое было указано в конце предыдущего параграфа, а именно: если точка M находится на поляре точки N, то и точка N находится на поляре точки M.

Из указанного свойства вытекает, в частности, что если прямая Δ' вращается вокруг точки M, то полюс M' прямой Δ' описывает поляру Δ точки M, и что если точка M пробегает некоторую прямую Δ', то поляра Δ точки M вращается вокруг полюса M' прямой Δ'.

Иными словами, геометрическое место полюсов прямых пучка с центром M есть прямолинейный ряд, расположенный на поляре Δ точки M; геометрическое место поляр точек прямолинейного ряда, расположенного на прямой Δ, есть пучок с центром в полюсе M прямой Δ.

Из общих свойств корреляции (§ 194) вытекает, что упомянутые прямолинейные ряды и пучки — проективны.

222. Автополярный треугольник. Можно построить бесчисленное множество треугольников, обладающих тем свойством, что каждая его вершина является полюсом противоположной стороны по отношению к данной линии второго порядка Г. Действительно, возьмем произвольную точку A, не расположенную на Г, и построим ее поляру (черт. 148); на этой поляре возьмем произвольную точку B, не расположенную на Г, и сопряженную с ней точку C. Легко видеть, что треугольник ABC удовлетворяет поставленным условиям.



Черт. 148.

Действительно, по самому построению, BC есть поляра точки A. Далее, CA есть поляра точки B, ибо поляра точки B должна проходить через A (полюс прямой BC) и через C (так как C и B — сопряженные точки). Также докажем, что AB — поляра точки C.

Треугольник, обладающий указанным свойством, называется *автополярным* или *самосопряженным* по отношению к Г.

Если взять этот треугольник в качестве основного треугольника проективной системы координат, то уравнение Г примет весьма простой вид. Действительно, пусть $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ есть уравнение Г, отнесенной к такой системе координат. Поляра точки $A(1, 0, 0)$ дается уравнением

$$x_1\Phi_1(1, 0, 0) + x_2\Phi_2(1, 0, 0) + x_3\Phi_3(1, 0, 0) = 0,$$

т. е.

$$x_1a_{11} + x_2a_{21} + x_3a_{31} = 0.$$

Но эта поляра, по условию, есть прямая BC, уравнение которой имеет вид

$$x_1 = 0.$$

Следовательно, мы должны иметь $a_{21} = a_{31} = 0$. Таким же образом до-

кажем, что все коэфициенты a_{ij} с различными значками равны нулю и что, следовательно, уравнение линии Г имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$$

или, введя другие обозначения,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0. \qquad (1)$$

Ясно, что и обратно: если уравнение линии Г имеет вид (1), то основной треугольник является автополярным относительно этой линии.

Теперь мы видим, какой геометрический смысл имеет приведение уравнения линии к виду (1) — приведение, о котором уже говорилось в § 211.

Замечание. Мы предполагали, что линия Г — нераспадающаяся. Но легко сообразить, как построить автополярный треугольник и в случае распадающейся линии [1]). Предоставляем читателю сделать это самому, а также показать, что и в этом случае мы будем иметь уравнение вида (1), с той лишь разницей, что не все три числа λ_1, λ_2, λ_3 будут отличны от нуля.

223. Сопряженные прямые. Тангенциальное уравнение линии второго порядка. Понятие класса. Взаимным с понятием сопряженных точек является понятие *сопряженных прямых*. Две прямые называются сопряженными относительно линии второго порядка Г, если каждая из них проходит через полюс другой. Например, на черт. 148 прямые AB и AC—сопряженные (так же как и любая пара сторон автополярного треугольника).

Любая касательная к Г сопряжена сама с собой (так как касательная содержит свой полюс) и обратно: прямая, сопряженная сама с собой, является касательной (так как прямая, содержащая свой полюс — касательная).

Две прямые AB, AC, проведенные из данной точки A (не находящейся на Г), сопряженные относительно Г, гармонически сопряжены относительно касательных AM', AM'', проведенных из A к Г. Действительно (черт. 148), пусть M', M'' — точки касания и, следовательно, $M'M''$ — поляра точки A. Точки B и C пересечения рассматриваемых прямых с этой полярой гармонически сопряжены относительно точек M', M'' (ибо, например, B есть полюс AC). Следовательно, и прямые AB, AC гармонически сопряжены с прямыми AM', AM''.

Итак, соответствие между сопряженными прямыми пучка с данным центром A есть инволюция, двойными прямыми которой являются касательные из A к Г.

Найдем теперь аналитическое выражение условия того, чтобы две данные прямые $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ и $\Delta'(v_1, v_2, v_3)$ были сопряженными. Мы будем попрежнему считать, что Г — нераспадающаяся линия.

Полюс $M(x_1, x_2, x_3)$ прямой Δ дается формулами (4) § 219:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ x_2 &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ x_3 &= b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где попрежнему $b_{ij} = \dfrac{A_{ij}}{A}$.

[1]) См. замечание в конце § 220.

Для того чтобы прямая Δ' проходила через M, необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось равенство

$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0 \tag{2}$$

или

$$v_1(b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3) + v_2(b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3) + \\ + v_3(b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3) = 0. \tag{3}$$

Обозначим через $\Psi(u_1, u_2, u_3)$ квадратичную форму с коэфициентами b_{ij}:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i,j} b_{ij}u_iu_j. \tag{4}$$

Тогда соотношение (3) примет вид

$$v_1\Psi_1(u_1, u_2, u_3) + v_2\Psi_2(u_1, u_2, u_3) + v_3\Psi_3(u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{3a}$$

где

$$\Psi_1(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}, \quad \Psi_2(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2},$$

$$\Psi_3(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3}. \tag{5}$$

Таким образом мы имеем полную аналогию с соотношением, связывающим координаты сопряженных точек, только вместо координат точек мы имеем координаты прямых, а вместо формы Φ — форму Ψ.

Формы Φ и Ψ, коэфициенты a_{ij} и b_{ij} которых связаны соотношениями

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}, \tag{*}$$

называются *союзными*. Легко видеть, что мы имеем также [1])

$$a_{ij} = \frac{B_{ij}}{B}, \tag{**}$$

где

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

а B_{ij} — алгебраическое дополнение элемента b_{ij} в определителе B, который отличен от нуля, как это следует из факта разрешимости системы (1) относительно u_1, u_2, u_3.

Для того чтобы прямая $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ была касательной к линии Γ, необходимо и достаточно, чтобы она совпадала с сопряженной с ней [2]) прямой, т. е. чтобы v_1, v_2, v_3 были пропорциональны u_1, u_2, u_3; так как коэфициент пропорциональности не играет роли, то мы можем считать

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2, \quad v_3 = u_3.$$

---

[1]) Действительно, решая (1) относительно u_1, u_2, u_3, мы должны получить снова соотношения (3) §219 (только теперь мы имеем x_1, x_2, x_3 вместо y_1, y_2, y_3), откуда и вытекает наше утверждение.

[2]) Действительно, касательная к Γ содержит свой полюс и потому является сопряженной с собой, и обратно.

Подставляя u_1, u_2, u_3 вместо v_1, v_2, v_3 в (3) или (3а), получим *уравнение*

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{6}$$

выражающее необходимое и достаточное условие того, чтобы прямая $\Delta(u_1, u_2, u_3)$ *была касательной к* Г.

Поэтому уравнение (6) называется *уравнением* линии Г *в координатах касательной*, или *уравнением в тангенциальных координатах*, или еще *тангенциальным уравнением*.

Если дана неособенная квадратичная форма $\Psi(u_1, u_2, u_3)$, то всегда можно найти линию второго порядка Г, для которой уравнение (6) является уравнением в тангенциальных координатах; уравнением этой линии в точечных координатах будет $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$, где Φ — форма, союзная с Ψ.

Вообще можно показать (на этом мы не останавливаемся), что однородные координаты u_1, u_2, u_3 касательной к любой алгебраической линии связаны алгебраическим уравнением вида $\Psi(u_1, u_2, u_3) = 0$, где Ψ — однородный полином. Это уравнение называется *тангенциальным уравнением данной линии*, а степень его — *классом* линии. Порядок и класс линии вообще не совпадают. Но в случае нераспадающихся линий второго порядка, как мы видели, класс также равен двум. Следовательно, нераспадающиес линии второго порядка суть в то же время линии второго класса.

Класс данной линии может быть определен геометрически, как *число касательных, которые можно к ней провести из произвольной точки, не расположенной на ней.*

Действительно, пусть $M(x_1, x_2, x_3)$ — некоторая точка плоскости. Координаты (u_1, u_2, u_3) касательной, проведенной через M, к данной линии должны одновременно удовлетворять двум уравнениям:

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = 0 \quad \text{и} \quad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0;$$

число решений [1]) этой системы равно, вообще говоря, степени полинома Ψ, откуда и вытекает наше утверждение.

224. Применение принципа взаимности к линиям второго порядка. Полная аналогия уравнений линии второго порядка в точечных и тангенциальных координатах позволяет и здесь применить принцип взаимности. А именно, вместо того чтобы рассматривать линию второго порядка как носителя точек, ее можно рассматривать как носителя прямых (касательных к ней).

Из всякого предложения, касающегося полюса, поляры, касательной, можно получить „взаимное“ предложение, заменяя слова „точки, принадлежащие линии“ словами „касательные к линии“, слово „полюс“ словом „поляра“ и обратно, и производя остальные замены по правилам, указанным раньше в § 170.

Мы не будем давать здесь подробного обоснования этого положения. Но читатель может пользоваться им как руководящей нитью, при проведении доказательств предложений, взаимных предложениям, уже доказанным выше.

---

[1]) Ищутся, разумеется, не сами величины u_1, u_2, u_3, а их отношения.

В качестве приложения мы рекомендуем читателю провести доказательства следующих предложений.

1°. *Теорема Брианшона* (взаимная с теоремой Паскаля): прямые, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного вокруг линии второго порядка, пересекаются в одной точке.

2°. *Теоремы, взаимные с теоремами* § 215. a) Пусть f и g две касательные к линии второго порядка Г. Рассмотрим прямолинейные ряды, на них расположенные, и приведем в соответствие те точки этих рядов, которые получаются в пересечении прямых f и g с касательными к Г. Полученное таким образом соответствие будет проективным.

b) Прямые, соединяющие соответствующие точки двух проективных прямолинейных рядов, являются касательными к некоторой линии второго порядка Г, касающейся прямых, на которых расположены данные ряды.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

АФФИННЫЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. Аффинная классификация. Центр, диаметры, асимптоты

225. Аффинная классификация линий второго порядка. Мы знаем, что аффинные преобразования (на плоскости) составляют подгруппу проективных, характеризуемую тем, что при аффинных преобразованиях несобственная прямая остается несобственной. Поэтому аффинные свойства фигур характеризуются их взаимоотношением с несобственной прямой. Исходя из этого соображения, мы начнем изучение аффинных свойств линий второго порядка с рассмотрения пересечения их с несобственной прямой.

Пусть

$$\Phi(x, y, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0 \quad (1)$$

уравнение линии второго порядка в однородных декартовых координатах.

Мы будем считать во всем дальнейшем, что *коэфициенты* a_{11}, a_{12}, a_{22} *не равны нулю одновременно,* ибо в противном случае линия (1), если ограничиться рассмотрением собственных точек, не будет линией второго порядка.

Найдем пересечение линии (1) с несобственной прямой

$$t = 0, \quad (2)$$

т. е. найдем несобственные точки данной линии. Подставив $t = 0$ в (1), получим уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \quad (3)$$

определяющее значения отношения $\frac{y}{x}$ $\left(\text{или } \frac{x}{y}\right)$. Будем сперва считать, что $a_{22} \neq 0$; тогда мы не можем иметь $x = 0$ (ибо в противном случае мы бы получили также $y = 0$, а x, y, t не могут быть равны нулю одновременно) и поэтому можем разделить уравнение (3) на x^2, что приводит к уравнению

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0, \quad (3a)$$

определяющему значения угловых коэфициентов $k = \frac{y}{x}$ направлений, в которых удалены искомые несобственные точки.

Характер корней уравнения (3а) зависит от знака выражения $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, которое есть не что иное, как определитель A_{33}, введенный в § 208:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} \tag{4}$$

и представляющий собою алгебраическое дополнение элемента a_{33} в дискриминанте

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

квадратичной формы Ф. Напомним, что A_{33} есть дискриминант квадратичной формы

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{6}$$

получаемый из Ф вычеркиванием членов, содержащих t.

Если $A_{33} > 0$, то уравнение (3а) имеет два мнимых сопряженных корня, и несобственная прямая пересекает линию в двух мнимых точках, если $A_{33} < 0$, уравнение имеет два действительных корня, и несобственная прямая пересекает линию в двух различных действительных точках; если, наконец, $A_{33} = 0$, то уравнение имеет один двойной корень, и несобственная прямая является „касательной“ к линии. Легко проверить, что заключения остаются в силе и при $a_{22} = 0$ [1]).

В первом случае ($A_{33} > 0$) мы будем говорить, что линия — *эллиптического типа*, во втором ($A_{33} < 0$), что она *гиперболического типа*, а в третьем ($A_{33} = 0$), что она *параболического типа*.

Нераспадающаяся линия эллиптического типа называется эллипсом, нераспадающаяся линия гиперболического типа — гиперболой, нераспадающаяся линия параболического типа — параболой.

Мы увидим ниже (§ 238), что эти определения эллипса, гиперболы и параболы приводят к тем же результатам, что и определения, данные раньше, с той только разницей, что эллипс, по данному здесь определению, может быть не только действительным (тогда мы будем иметь прежний случай), но и мнимым. Однако пока это не будет доказано, *мы будем под эллипсом, гиперболой и параболой подразумевать линии, определенные в настоящем параграфе.*

Мы знаем, что распадающаяся линия второго порядка характеризуется равенством $A = 0$, где A — определитель (5), и таким образом мы получаем следующие признаки, характеризующие эллипс, гиперболу и параболу:

При $A \neq 0$, $A_{33} > 0$ линия — эллипс;
„ $A \neq 0$, $A_{33} < 0$ „ — гипербола;
„ $A \neq 0$, $A_{33} = 0$ „ — парабола.

---

[1]) Действительно, при $a_{22} = 0$ имеем $A_{33} = -a_{12}^2$. Если $a_{12} \neq 0$, то $A_{33} < 0$; при этом уравнение (3а) имеет два действительных корня, один из которых равен ∞, а другой — конечный. Если же $a_{12} = 0$, то $A_{33} = 0$; уравнение (3а) имеет один двойной корень $k = \infty$.

Далее, при $A=0$ мы имеем распадающуюся линию второго порядка либо эллиптического типа (при $A_{33}>0$), либо гиперболического типа (при $A_{33}<0$), либо параболического (при $A_{33}=0$).

Мы увидим ниже (§ 234), что в первом случае линия распадается на две мнимые сопряженные непараллельные прямые, во втором — на две действительные непараллельные прямые, а в третьем — на две параллельные прямые; это последнее будет показано в следующем же параграфе.

225а. О распадающейся линии параболического типа. Распадающаяся линия параболического типа характеризуется равенствами (см. предыдущий параграф):

$$A=0, \quad A_{33}=0. \tag{1}$$

Докажем, что в этом случае линия представляет собою совокупность двух параллельных прямых и вместе с тем найдем эти прямые.

Заметим прежде всего, что из равенств (1) следуют еще два равенства[1]): $A_{13}=A_{23}=0$, так что мы будем иметь

$$A_{13}=A_{23}=A_{33}=0, \tag{2}$$

или, подробнее, $a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}=a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, или еще

$$a_{12}a_{23}=a_{22}a_{13}, \quad a_{12}a_{13}=a_{11}a_{23}, \quad a_{11}a_{22}=a_{12}^2. \tag{2a}$$

Ясно, что обратно, из (2) или (2а) вытекают и (1).

На основаиии (2а) легко придать уравнению нашей линии

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0, \tag{3}$$

такой вид, из которого сразу будет следовать требуемый результат. Действительно, предположим, например, что $a_{11}\neq 0$ (если $a_{11}=0$, то необходимо $a_{22}\neq 0$[2]), и можно провести те же рассуждения, поменяв ролями a_{11} и a_{22}).

Умножая обе части уравнения (3) на a_{11}, получим

$$a_{11}^2x^2+2a_{11}a_{12}xy+a_{11}a_{22}y^2+2a_{11}a_{13}x+2a_{11}a_{23}y+a_{11}a_{33}=0,$$

или, в силу равенств (2а),

$$a_{11}^2x^2+2a_{11}a_{12}xy+a_{12}^2y^2+2a_{11}a_{13}x+2a_{12}a_{13}y+a_{11}a_{33}=0.$$

---

[1]) Из условия $A=0$ следует, что все определители второго порядка, составленные из таблицы

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}$$

равны нулю (см. Добавление, § 6а, Следствие). В частности,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11}A_{33}-A_{13}^2=0, \quad \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{22}A_{33}-A_{23}^2=0.$$

Но так как $A_{33}=0$, то $A_{13}=A_{23}=0$.

[2]) Если $a_{11}=a_{22}=0$, то из $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ следует, что $a_{12}=0$, т. е. что $a_{11}=a_{22}=a_{12}=0$, а это противоречит принятому раньше условию.

Очевидно, что предыдущее уравнение можно переписать так:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})^2+a_{11}a_{33}-a_{13}^2=0,$$

или в виду того, что согласно нашему способу обозначений

$$a_{11}a_{33}-a_{13}^2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=A_{22} \qquad (*)$$

(A_{22} есть алгебраическое дополнение элемента a_{22} в дискриминанте A) еще так:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=\pm\sqrt{-A_{22}}. \qquad (4)$$

Значит, наша линия есть совокупность двух параллельных прямых

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}-\sqrt{-A_{22}}&=0,\\ a_{11}x+a_{12}y+a_{13}+\sqrt{-A_{22}}&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Прямые будут действительными, если $A_{22}<0$, мнимыми, если $A_{22}>0$, совпадающими, если $A_{22}=0$.

Если $a_{22}\neq 0$, то, меняя ролями x, y и значки 1, 2, убеждаемся, что уравнения этих прямых могут быть представлены и так:

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\pm\sqrt{-A_{11}}=0, \qquad (6)$$

где

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2. \qquad (**)$$

Если обе величины a_{11} и a_{22} отличны от нуля, то пригодны одновременно и уравнения (4) и уравнения (6). Отсюда следует, между прочим, что в рассматриваемом общем случае A_{11} и A_{22} должны иметь один и тот же знак (положительный, если линии мнимые, отрицательный, если они действительные). Это легко доказать и непосредственно.

Если $a_{11}=0$, $a_{22}\neq 0$, то, как легко убедиться на основании (2а) и (*), будем иметь еще $a_{12}=a_{13}=A_{22}=0$, и уравнение (4) сведется к тождеству $0=0$, как и следовало ожидать, ибо оно получено умножением данного уравнения на величину a_{11}, равную нулю. В этом случае следует пользоваться уравнением (6); аналогичное замечание относится к случаю

$$a_{22}=0, \quad a_{11}\neq 0.$$

226. Асимптотические направления. Направления, в которых удалены несобственные точки данной линии называются *асимптотическими*. Если X, Y, 0 — однородные координаты одной из несобственных точек линии, то несобственная точка удалена в направлении вектора X, Y; координаты этого вектора удовлетворяют уравнению (§ 225)

$$\varphi(X,\ Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=0; \qquad (1)$$

обратно, направление, удовлетворяющее этому условию, будет асимптотическим.

Сделаем одно замечание, касающееся линий параболического типа. Не нарушая общности, можно в этом случае считать $a_{22}\neq 0$ (если $a_{22}=0$,

можно провести аналогичные рассуждения, поменяв ролями X и Y) При $a_{22} \neq 0$ необходимо $X \neq 0$ (ср. § 225), и (1) можно переписать так:

$$a_{22}\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{Y}{X}\right) + a_{11} = 0;$$

решая это уравнение, получим (принимая во внимание, что $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$)

$$\frac{Y}{X} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}, \tag{2}$$

откуда следует

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X + a_{12}Y &= 0, \\ a_{12}X + a_{22}Y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Итак, координаты вектора асимптотического направления для линии параболического типа удовлетворяют условиям (3); обратно, из (3) следует, что (X, Y) имеет асимптотическое направление. Действительно, если умножим уравнения (3) соответственно на X и на Y и сложим, то получим уравнение (1).

Из (3) следует, что если наша линия есть совокупность двух параллельных прямых, то асимптотическое направление (X, Y) параллельно этим прямым (см. уравнения этих прямых в предыдущем параграфе).

227. Уравнение, определяющее пересечение линии второго порядка с прямою, в неоднородных декартовых координатах. Так как при изучении аффинных и метрических свойств несобственные элементы играют особую роль, то часто удобнее пользоваться неоднородными декартовыми координатами.

Мы так и будем поступать в дальнейшем в бо́льшей части случаев. Уравнение линии второго порядка в неоднородных декартовых координатах мы попрежнему будем писать так:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

а однородные координаты будем обозначать через x, y, t.

Составим теперь уравнение, определяющее пересечение линии (1) с прямою Δ, которую представим параметрически так (§ 88):

$$x = x_0 + X \cdot s, \quad y = y_0 + Y \cdot s. \tag{2}$$

Напомним, что x_0, y_0 обозначают координаты некоторой (произвольно выбранной) постоянной точки M_0 прямой Δ, (X, Y) — вектор направления этой прямой, а s — переменный параметр, геометрическое значение которого следующее: если M — точка, соответствующая данному значению s, то s есть отношение вектора $\overrightarrow{M_0M}$ к вектору направления $\mathbf{P}(X, Y)$; т. е.

$$\overrightarrow{M_0M} = s \cdot \mathbf{P}.$$

Чтобы найти точки пересечения, подставим в (1) вместо x, y их выражения (2). Результат подстановки можно сразу написать, пользуясь формулой (11а) § 208, если в ней вместо x, y взять $X \cdot s$, $Y \cdot s$, а вместо x', y' — соответственно x_0, y_0. Это дает

$$\varphi(X, Y)s^2 + 2[XF_1'(x_0, y_0) + YF_2'(x_0, y_0)]s + F(x_0, y_0) = 0, \quad (3$$

где применяются прежние обозначения

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2, \quad (4)$$

$$F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \quad F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \quad (5)$$

Уравнение (3) имеет два корня s_1, s_2, подстановка которых в (2) дает две точки пересечения: (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Если

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0, \quad (6)$$

то по крайней мере один из корней равен бесконечности и, следовательно, одна из точек пересечения — несобственная. Мы видим, что, как и следовало ожидать, данная прямая в этом случае имеет асимптотическое направление.

Упражнения и дополнения

1. Найти уравнения касательной в точке (x_0, y_0) данной линии второго порядка, исходя непосредственно из уравнения (3).

Решение. Считая, что в уравнении (3) x_0, y_0 — координаты точки данной линии, будем иметь $F(x_0, y_0) = 0$. Уравнение (3) имеет, в этом случае, один из корней $s = 0$. Выражая, что и второй корень равен нулю, получим

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0$$

Заменяя X, Y через пропорциональные им величины $x - x_0$, $y - y_0$, где x, y — координаты произвольной точки касательной, получим требуемое уравнение

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0) = 0,$$

совпадающее с уравнением (6а) § 217.

2. Найти асимптотические направления линий, заданных уравнениями:

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad 2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad 3) \quad y^2 = 2px.$$

Ответ. Угловые коэфициенты асимптотических направлений даются формулами:

$$1) \quad k = \frac{Y}{X} = \pm i\,\frac{b}{a} \text{ (мнимые направления);}$$

$$2) \quad k = \pm\frac{b}{a}; \qquad 3) \quad k = 0.$$

3. Доказать, что когда линия есть совокупность двух пересекающихся прямых, то асимптотическне направления параллельны этим прямым. Это непосредственно очевидно и геометрически.

228. Центр линии второго порядка. *Центром* линии второго порядка называется точка, обладающая тем свойством, что любая хорда, проходящая через нее, делится ею пополам. (Хордой мы называем отрезок прямой, соединяющий две любые точки линии.) Выясним, имеет ли данная линия второго порядка центр и найдем способ его определения.

Пусть (x_0, y_0) — координаты искомого центра C. Проведем через $C(x_0, y_0)$ какую-либо прямую $x = x_0 + Xs$, $y = y_0 + Ys$, которая пересечет нашу линию в двух точках M_1 и M_2, положение которых определяется уравнением (3) предыдущего параграфа. Для того чтобы точка C была серединой хорды M_1M_2, необходимо и достаточно условие $s_1 = -s_2$, т. е. $s_1 + s_2 = 0$, где s_1 и s_2 — корни упомянутого уравнения. А для этого,

в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы коэфициент при первой степени s в этом уравнении был равен нулю, т. е. чтобы

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0. \tag{1}$$

Если точка C — центр, то это условие должно быть соблюдено при всевозможных направлениях секущей прямой, т. е. при всевозможных значениях X и Y. Следовательно, мы должны иметь

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_0, y_0) &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ F_2(x_0, y_0) &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Очевидно, что и обратно, всякая точка $C(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют двум предыдущим уравнениям, будет центром.

Мы видим, что центр определяется пересечением двух прямых [1])

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ F_2(x, y) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В случае линий эллиптического и гиперболического типов, определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{33} \neq 0$$

и предыдущие уравнения имеют одно и только одно решение.

Итак, *линии эллиптического и гиперболического типов имеют один вполне определенный центр.*

В случае *линии параболического типа* $A_{33} = 0$ и прямые (3) параллельны. Если они не совпадают, то центра, в собственном смысле, нет; мы, однако, будем иногда говорить, что имеется один несобственный центр — несобственная точка пересечения прямых (3). Если прямые (3) совпадают, то всякая их точка является центром; в этом случае имеется *прямая центров*. Легко видеть, что в этом случае рассматриваемая линия второго порядка есть совокупность двух параллельных прямых. Действительно, если прямые (3) совпадают, то коэфициенты их уравнений должны быть пропорциональными, а из этого следует, что определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

равен нулю (ибо в нем две первые строки пропорциональны). Значит, $A = A_{33} = 0$, откуда и следует наше утверждение (см. § 225а). Обратно, если данная линия — совокупность двух параллельных прямых, то прямые (3) совпадают, как это следует из равенств (§ 225а),

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0.$$

Из предыдущего следует, что парабола, как нераспадающаяся линия параболического типа, не имеет центра или, лучше, имеет один несоб-

[1]) Геометрическое значение этих прямых будет выяснено в § 230.

ственный центр; он удален, как легко видеть, в асимптотическом направлении [1]).

Выясним еще вопрос: когда центр линии второго порядка расположен на самой линии (мы имеем в виду собственный центр)?

Мы знаем, что если точка (x_0, y_0) находится на линии и если ее координаты одновременно удовлетворяют уравнениям (2), то линия — распадающаяся и (x_0, y_0) есть двойная точка линии [2]). Итак, если центр находится на самой линии, то линия — распадающаяся; центр в этом случае есть двойная точка линии.

Важно заметить следующее: *если начало координат находится в центре линии второго порядка* (или одном из центров), *то в ее уравнении отсутствуют члены первой степени.* Действительно, в этом случае уравнения (3) должны удовлетворяться значениями $x = 0$, $y = 0$, откуда следует, что $a_{13} = a_{23} = 0$. Уравнение линии в этом случае имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \qquad (4)$$

Обратно, очевидно, что линия, представляемая уравнением вида (4), имеет центр (или один из центров) в начале координат.

Во всем дальнейшем мы будем называть *центральными* те линии, которые имеют *один определенный собственный центр.*

Упражнения

1. Найти центр кривой

$$x^2 - xy + 3y^2 + x - 1 = 0.$$

Решение. Приравнивая нулю частные производные левой части по x и по y, получим

$$2x - y + 1 = 0, \quad -x + 6y = 0.$$

Решение этих уравнений дает

$$x = -\frac{6}{11}, \quad y = -\frac{1}{11}.$$

Следовательно, кривая имеет (единственный) центр в точке $\left(-\frac{6}{11}, -\frac{1}{11}\right)$.

2. Найти центр кривой

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0.$$

Решение. Уравнения, определяющие центр, суть

$$2x + 2y + 2 = 0, \quad 2x + 2y + 1 = 0.$$

Эти уравнения не имеют общего решения, так как изображают параллельные несовпадающие прямые. Следовательно, линия не имеет центра (имеет несобственный центр).

---

[1]) Угловой коэфициент прямых (3) (в этом случае параллельных) равен

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}},$$

т. е. равен угловому коэфициенту асимптотического направления; см. § 226, формула (3).

[2]) См. конец § 218.

3. Найти центр линии

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 5 = 0.$$

Решение. В этом случае уравнения, определяющие центр, будут

$$2x + 2y + 1 = 0, \quad 2x + 2y + 1 = 0.$$

Линия имеет бесчисленное множество центров, а именно, все точки прямой

$$2x + 2y + 1 = 0.$$

229. Асимптоты. *Асимптотой* линии второго порядка мы будем теперь называть прямую, обе точки пересечения которой с линией сливаются в одну несобственную точку [1]). Иными словами, асимптоты — это касательные в несобственных точках линии. Ясно, что асимптоты имеют асимптотические направления.

Так как эллипс не имеет действительных несобственных точек, то он не имеет действительных асимптот; гипербола, имеющая две различные несобственные точки, имеет две действительные асимптоты. Наконец, обе несобственные точки параболы сливаются в одну. Следовательно, несобственная прямая является касательной в несобственной точке параболы, т. е. (единственной) асимптотой параболы является несобственная прямая. Собственных асимптот у параболы нет.

Все это легко подтвердить аналитически и вместе с тем найти уравнения асимптот. Начнем с решения последней задачи.

Пусть (X, Y) — вектор направления искомой асимптоты, а $M(x, y)$ — какая-либо ее точка. Если в уравнении (3) § 227 мы возьмем в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ точку $M(x, y)$, то коэфициенты при s и s^2 в этом уравнении должны быть равны нулю, для того чтобы оба его корня были равны бесконечности. Следовательно, мы должны иметь

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 = 0 \tag{1}$$

и

$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0. \tag{2}$$

Первое уравнение определяет отношение $\frac{Y}{X}$ и выражает не что иное, как то, что вектор (X, Y) имеет асимптотическое направление.

Второе уравнение при постоянных X, Y, удовлетворяющих предыдущему условию, дает уравнение асимптоты. Уравнение (2), в раскрытом виде напишется так:

$$(a_{11}X + a_{21}Y)x + (a_{12}X + a_{22}Y)y + (a_{13}X + a_{23}Y) = 0. \tag{2a}$$

Коэфициенты при x и y, т. е. величины

$$a = a_{11}X + a_{21}Y, \quad b = a_{12}X + a_{22}Y,$$

не могут быть равны нулю одновременно, если линия центральная, т. е. если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. Следовательно, в этом случае прямая (2) — собственная; она, далее, проходит, очевидно, через центр [2]).

---

[1]) Раньше (см. § 198) было дано иное определение асимптоты. Легко показать, что в случае линий второго порядка, оба эти определения сводятся к одному и тому же, если исключить случай, когда линия есть совокупность двух параллельных прямых. См. конец этого параграфа и Упражнения.

[2]) Ибо центр есть пересечение прямых $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$,

Итак, *асимптоты центральных линий суть прямые асимптотического направления, проходящие через центр.* В случае линий гиперболического типа — асимптоты действительные, в случае линий эллиптического типа они — мнимые.

Рассмотрим теперь линии параболического типа. В этом случае, как мы знаем, для асимптотического направления $a = b = 0$ (§ 226).

Следовательно, в случае линии параболического типа, асимптота — либо несобственная, либо не вполне определенная (определено только ее направление X, Y). Последний случай может представиться только тогда, когда одновременно

$$a_{11}X + a_{21}Y = 0, \quad a_{12}X + a_{22}Y = 0, \quad a_{13}X + a_{23}Y = 0; \qquad (*)$$

но последние равенства возможны, очевидно, только в случае

$$A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0,$$

т. е. когда наша линия — совокупность двух параллельных прямых (см. § 225а).

Итак, парабола не имеет асимптот в собственном смысле; ее единственной асимптотой является несобственная прямая. В случае же пары параллельных прямых асимптотой является, как легко видеть, всякая прямая, параллельная им. Это и понятно, так как пара параллельных прямых пересекается со всякой прямой, ей параллельной, в одной „двойной" несобственной точке.

Упражнения и дополнения

1. Найти асимптоты линии

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ответ. Прямые

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

т. е. пара прямых, даваемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

2. Найти асимптоты линии

$$y^2 = 2px.$$

Ответ. Асимптота — несобственная прямая.

3. Показать, что асимптотами пары пересекающихся прямых являются сами эти прямые.

230. Диаметры линий второго порядка. Рассмотрим прямые, параллельные какому-нибудь данному (не асимптотическому) направлению.

Каждая из этих прямых пересекает данную линию второго порядка в двух точках M_1 и M_2 и определяет хорду M_1M_2. Геометрическое место середин этих хорд называется диаметром, сопряженным с данным направлением. Итак, *диаметр данной линии второго порядка, сопряженный с данным направлением, есть геометрическое место середин хорд, параллельных данному направлению.* Это понятие является непосредственным обобщением понятия диаметра окружности, известного

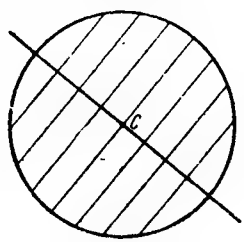
из элементарной геометрии (черт. 149). А именно, согласно данному здесь определению диаметр окружности, сопряженный с данным направлением, есть, очевидно, прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная к данному направлению. В элементарной геометрии диаметром называется только та часть этой прямой, которая заключена внутри окружности. Здесь же мы под диаметром будем подразумевать всю прямую.

Поставим теперь себе задачу: *найти диаметр линии второго порядка, сопряженный с данным направлением.*

Пусть $\mathbf{P}=(X,\ Y)$ — вектор данного (не асимптотического) направления. Пусть $(x_0,\ y_0)$ — какая-либо точка искомого диаметра. Найдем уравнение, которому должны удовлетворять координаты этой точки.

Прямая, проходящая через $(x_0,\ y_0)$ и параллельная данному направлению $(X,\ Y)$, может быть представлена параметрически следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + Xs, \\ y &= y_0 + Ys. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Черт. 149.

При прежних обозначениях значения s_1 и s_2, соответствующие точкам пересечения M_1 и M_2 прямой (1) с нашей линией второго порядка, определяются из уравнения (3) § 227.

Для того чтобы точка $(x_0,\ y_0)$ была серединой хорды M_1M_2, необходимо и достаточно условие $s_1+s_2=0$. А для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы (ср. § 228)

$$XF_1(x_0,\ y_0)+YF_1(x_0,\ y_0)=0.$$

Это последнее равенство представляет собою необходимое и достаточное условие того, чтобы точка $(x_0,\ y_0)$ принадлежала диаметру, сопряженному с направлением $(X,\ Y)$. Обозначая x_0, y_0 просто через x, y, мы можем переписать предыдущее уравнение, представляющее собою уравнение искомого диаметра, в виде

$$XF_1(x,\ y)+YF_1(x,\ y)=0, \qquad (2)$$

или, подставляя значения F_1 и F_2,

$$X(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+Y(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})=0. \qquad (2a)$$

Мы видим, что диаметр, сопряженный с данным направлением, есть прямая [1]). Запомним правило, по которому составляется уравнение этого диаметра: *частные производные функции $F(x,\ y)$ по x и по y умножаются соответственно на X и Y* (коэфициенты данного направления), *результаты складываются и сумма приравнивается нулю* [2]).

---

[1]) Мы увидим ниже, что эта прямая собственная и определенная, если $(X,\ Y)$ — не асимптотическое направление.

[2]) Полученное таким образом уравнение отличается от (2) только множителем 2.

В частности, диаметр, сопряженный с направлением $X \neq 0$, $Y = 0$ (направление оси Ox), есть прямая $F_1 = 0$, т. е.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \tag{3a}$$

а диаметр, сопряженный с направлением оси Oy ($X = 0$, $Y \neq 0$), — прямая $F_2 = 0$, т. е.

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \tag{3b}$$

Прямые (3a) и (3b) встречались нам уже в § 228; это те прямые, пересечение которых определяет центр линии. Теперь мы уяснили геометрический их смысл.

Все прямые (2) проходят через пересечение этих прямых. Следовательно, все диаметры проходят через центр (собственный или несобственный). Если имеется прямая центров, то все диаметры сливаются с ней; если центр несобственный, то все диаметры параллельны между собою (проходят через одну и ту же несобственную точку).

Прямая (2) не может быть несобственной или неопределенной, если, как мы пока предполагаем, направление (X, Y) не асимптотическое.

Действительно, уравнение (2a) можно переписать так:

$$ax + by + c = 0, \tag{2b}$$

где

$$a = a_{11}X + a_{21}Y, \quad b = a_{12}X + a_{22}Y, \quad c = a_{13}X + a_{23}Y.$$

Если $a = b = 0$, то (см. предыдущий параграф) линия необходимо параболического типа и направление (X, Y) асимптотическое. Следовательно, для неасимптотического направления (X, Y) прямая (2) всегда собственная и определенная.

До сих пор мы считали, что направление (X, Y) неасимптотическое. Отбросим теперь это условие и будем называть диаметром, сопряженным с направлением (X, Y), прямую (2), каковы бы ни были X, Y (не равные одновременно нулю). Если (X, Y) неасимптотическое направление, то мы получаем диаметр в обычном смысле слова. Если же (X, Y) асимптотическое направление, то уравнение (2) обращается в уравнение асимптоты (см. предыдущий параграф). Таким образом асимптоту можно назвать *самосопряженным диаметром*. Уравнение (2b) может оказаться неопределенным, если $a = b = c = 0$. В этом случае наша линия второго порядка — совокупность двух параллельных прямых [1]) и (X, Y) — направление, параллельное этим прямым. В этом случае „диаметром", сопряженным с асимптотическим направлением, может считаться всякая прямая.

Вообще во всех случаях всякая прямая, проходящая через центр (или один из центров), может быть названа диаметром. Например, в случае пары параллельных прямых всякая прямая пересекает прямую центров (в собственной или несобственной точке) и потому может считаться диаметром.

Рассмотрим теперь подробнее случай центральной линии (т. е. имеющей один собственный центр).

---

[1]) См. предыдущий параграф.

Легко найти соотношение, связывающее угловой коэфициент диаметра с угловым коэфициентом $k=\frac{Y}{X}$ направления, с которым он сопряжен. Угловой коэфициент k' диаметра дается формулой

$$k'=-\frac{a_{11}X+a_{12}Y}{a_{21}X+a_{22}Y}=-\frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{21}+a_{22}k}. \tag{4}$$

Правая часть не может быть неопределенной в рассматриваемом случае центральной линии, ибо в этом случае не может быть одновременно

$$a_{11}X+a_{12}Y=a_{21}X+a_{22}Y=0.$$

Соотношение (4) может быть по уничтожении знаменателя представлено в виде

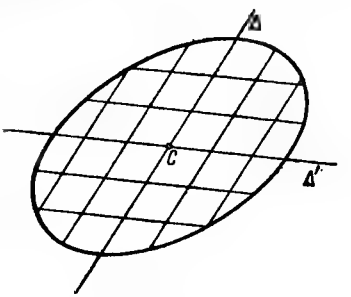
$$a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0, \tag{5}$$

совершенно симметричном относительно k и k'. Решая (5) относительно k, получим, обратно, выражение k через k'

$$k=-\frac{a_{11}+a_{12}k'}{a_{21}+a_{22}k'}. \tag{6}$$

Как и следовало ожидать, на основании симметрии соотношения (5), связывающего k и k', формулу (6) можно получить из формулы (4), просто поменяв местами k и k'.

Рассмотрим теперь два диаметра Δ' и Δ, первый из которых сопряжен с направлением второго. Угловые коэфициенты k' и k этих диаметров связаны соотношеннем (4), из которого следует соотношение (6), показывающее, что диаметр Δ сопряжен с направлением диаметра Δ'.



Черт. 150.

Итак, каждый из двух диаметров Δ и Δ' делит пополам хорды, параллельные другому. Такие два диаметра называются *сопряженными диаметрами.*

На черт. 150 изображены два сопряженных диаметра Δ и Δ' и хорды, им параллельные.

Заметим, что соответствие между сопряженными диаметрами есть инволюция (§ 188), как это следует из вида соотношения (5). Двойными прямыми этой инволюции являются прямые, угловые коэфициенты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0,$$

получаемому из (5) при $k'=k$. Но предыдущее уравнение характеризует асимптотические направления; так как, далее, наши прямые проходят через центр, то это — асимптоты. Итак, *двойными прямыми инволюции сопряженных диаметров являются асимптоты.* Мы получаем, таким образом, еще одно основание называть асимптоты самосопряженными диаметрами.

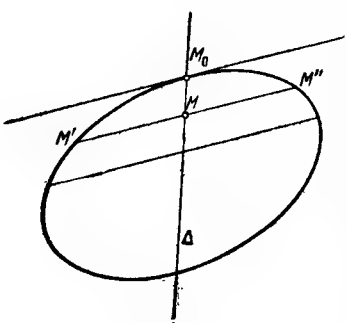
Перейдем теперь к линии без центра (или, лучше, линии с одним несобственным центром), т. е. к параболе. В этом случае прямые (3a) и (3b) параллельны, но не совпадают. Их общее направление асимптотическое, ибо их угловой коэфициент

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \tag{7}$$

есть угловой коэфициент асимптотического направления. Поэтому все диаметры параллельны асимптотическому направлению; этого и следовало ожидать, так как все диаметры проходят через несобственный центр, который удален в асимптотическом направлении.

Наконец, если мы имеем пару параллельных прямых, то, как мы видели выше, диаметры, сопряженные с неасимптотическими направлениями, сливаются с прямою центров, а диаметры, сопряженные с асимптотическим направлением, — неопределенные прямые.

Замечание. Как видно из предыдущего, диаметр есть прямая (а не отрезок прямой). Однако часто точки пересечения его с линией называют *концами* диаметра. Далее, иногда под словом диаметр подразумевают длину отрезка диаметра, заключенного между точками пересечения его с линией (если мы имеем две точки пересечения на конечном расстоянии). Мы также будем применять эти выражения, не опасаясь недоразумений, так как всегда будет ясно, о чем идет речь.



Черт. 151.

Хорды, параллельные данному (действительному) направлению, могут быть частью действительными, частью мнимыми. Но и в последнем случае середины их — действительные точки, ибо, если действительная прямая пересекает нашу линию в мнимых точках, то эти точки — мнимые сопряженные [1]), н, значит, середина отрезка, определяемого ими, — действительная точка.

231. Связь диаметров с касательными. Докажем теперь следующее почти очевидное свойство. Рассмотрим касательную в какой-либо точке линии второго порядка; *диаметр, проходящий через точку касания, сопряжен с направлением касательной.* Это предложение легко доказать элементарным путем, исходя непосредственно из определения касательной и диаметра.

Пусть Δ — диаметр, проходящий через точку M_0 линии (черт. 151). Рассмотрим хорду $M'M''$, которую этот диаметр делит пополам; пусть M — середина этой хорды. Если перемещать хорду $M'M''$ параллельно самой себе, то точка M будет перемещаться по диаметру Δ. При приближении точки M к точке M_0 обе точки M' и M'' будут стремиться к точке M_0, а следовательно, в пределе прямая, проходящая через M' и M'', обратится в касательную. Отсюда и следует наше утверждение.

[1]) Мы, как всегда, считаем, что коэфициенты уравнения данной линии второго порядка действительные.

Легко также доказать наше предложение аналитически. Пусть (x_0, y_0) координаты точки касания. Мы знаем, что диаметр, сопряженный с направлением (X, Y), имеет уравнение

$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0.$$

Если диаметр проходит через точку (x_0, y_0), то должно быть

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0,$$

откуда находим угловой коэфициент хорд, с которыми сопряжен этот диаметр:

$$\frac{Y}{X} = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}.$$

Такой же угловой коэфициент имеет касательная в точке (x_0, y_0), как это следует из уравнения касательной. Отсюда и вытекает наше утверждение.

Из этого, в частности, следует, что *касательные, проведенные из концов одного и того же диаметра, параллельны между собою.* Обратно, если мы имеем две касательные к линии второго порядка, параллельные между собою, то прямая, соединяющая точки касания, есть диаметр, сопряженный с направлением этих касательных.

232. Диаметры, как поляры несобственных точек. Если мы вспомним определение поляры, данное в § 220, то легко убедимся в том, что диаметр, сопряженный с данным направлением, можно определить, как *поляру несобственной точки, удаленной в данном направлении.* Действительно, пусть дана несобственная точка $M_0(X, Y, 0)$, удаленная в направлении вектора (X, Y). Поляра этой точки есть по определению геометрическое место точек прямых δ, проходящих через M_0 [т. е. параллельных направлению (X, Y)], гармонически сопряженных с M_0 относительно точек AB пересечения δ с нашей линией. Но так как точка M_0 — бесконечно удаленная, то сопряженной с ней точкой является середина отрезка AB, а отсюда и следует наше утверждение.

Это легко также проверить аналитически, если в уравнение поляры, которое можно написать так:

$$y_1\Phi_1(x_1, x_2, x_3) + y_2\Phi_2(x_1, x_2, x_3) + y_3\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

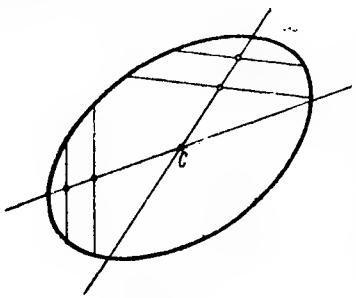
подставить $y_1 = X$, $y_2 = Y$, $y_3 = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$. Мы тогда как раз получим уравнение (2) § 230.

Аналогично, легко видеть, что центр C линии второго порядка *есть полюс несобственной прямой.* Так как поляры всех точек несобственной прямой проходят через ее полюс C, то все диаметры проходят через C, как мы это уже доказали иным путем. В частности, если центр — несобственный, то все диаметры параллельны.

Сопряженные диаметры суть, очевидно, прямые, проходящие через центр линии и сопряженные относительно этой линии в смысле, указанном в § 223.

Самосопряженные диаметры суть двойные прямые в инволюции сопряженных диаметров, т. е. касательные к линии, проведенные из центра; следовательно, это — асимптоты, как мы уже видели и раньше.

Вообще свойства центра и диаметров, доказанные в предыдущих параграфах, легко выводятся из определений, данных здесь. В частности, тот факт, что касательные, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны, вытекает из того, что они должны пересечься в полюсе диаметра, т. е. в некоторой несобственной точке.



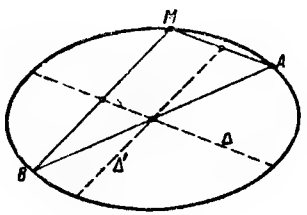
Черт. 152.

233. Построение центра и диаметров линии второго порядка, заданной очертанием. Дополнительные хорды. Если линия второго порядка задана очертанием, то очень легко построить диаметр ее, сопряженный с данным направлением: для этого достаточно провести две какие-либо хорды, параллельные данному направлению, и построить прямую, проходящую через их середины (черт. 152).

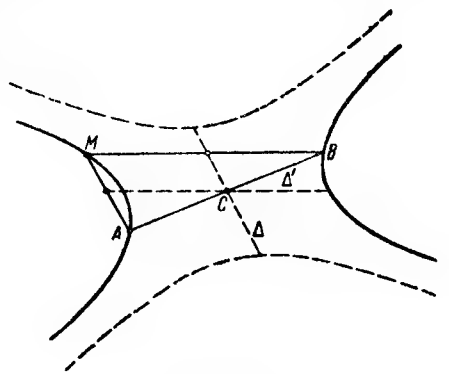
Взяв какое-либо другое направление и построив диаметр, сопряженный с ним, найдем центр как пересечение двух диаметров.

Очень полезно для построений понятие *дополнительных хорд* центральных линий второго порядка. Так называются две хорды, соединяющие какую-либо точку M линии с концами какого-либо ее диаметра AB. (См. черт. 153a, 153b.)

Легко видеть, что *диаметры, параллельные двум дополнительным хордам, являются сопряженными.* Действительно, диаметр Δ, параллельный хорде AM, делит пополам хорду BM (ибо он проходит через середину стороны BA треугольника ABM и параллелен стороне AM). Значит, диаметр Δ сопряжен с направлением хорды BM, т. е. с направлением диаметра Δ', параллельного хорде BM.



Черт. 153a.



Черт. 153b.

234. Уравнение центральных линий второго порядка, отнесенных к сопряженным диаметрам. Мы знаем, что у всякой центральной линии второго порядка имеется бесчисленное множество пар сопряженных диаметров. Посмотрим, какой вид примет уравнение такой линии, если начало координат взять в центре, а оси координат направить по двум сопряженным диаметрам.

Так как центр находится в начале координат, то в уравнении линии будут отсутствовать члены первой степени и оно будет иметь вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{33}=0. \tag{1}$$

Уравнение диаметра, сопряженного с осью Ox, имеет вид (§ 230)

$$a_{11}x+a_{12}y=0.$$

Так как эта прямая должна совпадать с осью Oy, то мы должны иметь $a_{12}=0$. Следовательно, уравнение центральной линии, отнесенной к сопряженным диаметрам, имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0. \tag{2}$$

В этом уравнении a_{11} и a_{22} отличны от нуля, ибо в противном случае величина $A_{33}=a_{11}a_{22}$ была бы равна нулю и линия не была бы центральной.

Рассмотрим сперва случай, когда $a_{33}\neq 0$. Деля обе части (2) на a_{33} и полагая

$$\lambda_1=-\frac{a_{11}}{a_{33}},\quad \lambda_2=-\frac{a_{22}}{a_{33}},$$

получим уравнение

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=1. \tag{3}$$

Если λ_1 и λ_2 — оба положительны, то, вводя обозначения

$$\lambda_1=\frac{1}{a^2},\quad \lambda_2=\frac{1}{b^2},$$

получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4}$$

Если λ_1 и λ_2 оба отрицательны, то, полагая

$$\lambda_1=-\frac{1}{a^2},\quad \lambda_2=-\frac{1}{b^2},$$

получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1. \tag{5}$$

Наконец, если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то, не нарушая общности, можно считать $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ (в противном случае достаточно поменять ролями оси Ox и Oy); полагая

$$\lambda_1=\frac{1}{a^2},\quad \lambda_2=-\frac{1}{b^2},$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь случай $a_{33}=0$. Если a_{11} и a_{22} одного знака, то можно считать $a_{11}>0$, $a_{22}>0$ (в противном случае достаточно изменить на обратные знаки в обеих частях уравнения). Полагая $a_{11}=k_1^2$, $a_{22}=k_2^2$, будем иметь уравнение

$$k_1^2x^2+k_2^2x_2^2=0, \tag{7}$$

изображающее совокупность двух мнимых прямых $k_1x + ik_2y = 0$, $k_1x - ik_2y = 0$; если же a_{11} и a_{22} различных знаков, то аналогичным образом получим уравнение

$$k_1x^2 - k_2^2y^2 = 0, \tag{8}$$

представляющее совокупность двух действительных прямых

$$k_1x + k_2y = 0 \quad \text{и} \quad k_1x - k_2y = 0.$$

Итак, уравнение всякой центральной линии второго порядка может быть приведено к одному из видов (4)—(8).

Положив в основу определения, данные в § 225, можно сказать, что в случаях (4) и (5) линия есть эллипс, ибо, как легко проверить, в этих случаях линия — эллиптического типа и нераспадающаяся [1]). В случае (5) линия не имеет ни одной действительной точки и называется *мнимым эллипсом*.

В случае (6) линия — гиперболического типа и нераспадающаяся [2]), т. е. линия — гипербола.

Мы видим, далее, что распадающиеся центральные линии представимы одним из уравнений (7), (8). В первом случае мы имеем эллиптический тип [3]), а во втором — гиперболический [4]).

Итак, распадающаяся линия эллиптического типа есть совокупность двух мнимых сопряженных непараллельных прямых, а распадающаяся линия гиперболического типа — совокупность двух действительных прямых.

Уравнения (4)—(8) можно еще упростить, подбирая надлежащим образом длины координатных векторов. А именно, им можно придать соответственно следующий вид:

$$x^2 + y^2 = 1, \ (4a) \qquad x^2 - y^2 = 1, \ (6a) \qquad x^2 - y^2 = 0. \ (8a)$$
$$x^2 + y^2 = -1, \ (5a) \qquad x^2 + y^2 = 0, \ (7a)$$

---

[1]) Действительно, в нашем случае $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$; $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -1$, $A_{33} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} > 0$,

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

[2]) Ср. предыдущее примечание.

[3]) Действительно, в нашем случае $F(x, y) = k_1^2x^2 + k_2^2y^2$; $A_{33} = k_1^2 \cdot k_2^2 > 0$;

$$A = \begin{vmatrix} k_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

[4]) Ср. предыдущее примечание.

Например, уравнение (4а) получается из (4) заменой x и y на ax и by, что сводится к изменению длин координатных векторов; аналогично относительно остальных уравнений.

Из (4а) непосредственно следует, что все действительные эллипсы могут быть получены один из другого аффинным преобразованием. Действительно, пусть на плоскости Oxy заданы два эллипса. Путем надлежащего выбора новых систем $O'x'y$ и $O''x''y''$ уравнениям этих эллипсов можно соответственно придать вид $x'^2+y'^2=1$ и $x''^2+y''^2=1$. Эти два эллипса получаются, очевидно, один из другого аффинным преобразованием:

$$x'=x'', \quad y'=y''.$$

То же, очевидно, относится и к линиям каждого из остальных видов (4)—(8). Наоборот, как легко видеть, линия одного из этих видов не может быть получена из линии другого вида путем аффинного преобразования.

Очевидно, что при аффинном преобразовании сопряженные диаметры данной линии переходят в сопряженные диаметры преобразованной; это следует из того, что при аффинном преобразовании середина хорды остается серединой.

Вообще, все свойства, перечисленные в этом отделе, а также и в предыдущей главе, сохраняются при аффинных преобразованиях, ибо при всех определениях мы пользовались пока только аффинными (или даже только проективными) свойствами.

Замечание 1. То обстоятельство, что уравнение линии принимает вид (3), если в качестве координатных осей взять два сопряженных диаметра, непосредственно вытекает из того, что два сопряженных диаметра вместе с несобственной прямой составляют, как легко видеть, автополярный треугольник (см. § 222, 232).

Замечание 2. Мы все же не можем утверждать пока, что действительный эллипс и гипербола, определенные нами в § 225, суть те же линии, которые были названы эллипсом и гиперболой в самом начале (§ 195 и следующие); нам остается еще показать, что уравнения действительного эллипса и гиперболы, так как они определены здесь, могут быть приведены соответственно к видам (4) и (6) подходящим выбором *прямоугольных* декартовых координат. Это будет доказано несколько ниже (§ 238).

235. Простейшие уравнения линий параболического типа. Диаметры линий параболического типа, как мы знаем, все параллельны между собою. Поэтому мы не можем взять два сопряженных диаметра в качестве осей координат.

Однако мы можем упростить уравнение такой линии, взяв в качестве оси Oy какую-либо прямую, не параллельную диаметрам, а в качестве оси Ox — диаметр, сопряженный с направлением Oy. Диаметр, сопряженный с направлением Oy, имеет уравнение

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0.$$

Так как этот диаметр совпадает по условию с осью Ox, то мы должны иметь $a_{21}=a_{23}=0$, $a_{22}\neq 0$. Так как, далее, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=$

$= a_{11}a_{22} = 0$ (ибо линия — параболического типа), то $a_{11} = 0$. Следовательно, уравнение линии примет вид

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим сперва случай, когда $a_{13} \neq 0$. В этом случае линия (1) пересекает ось Ox; действительно, полагая $y = 0$, получим абсциссу точки пересечения $x = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$. Перенесем начало координат (не изменяя координатных векторов) в эту точку. Тогда, как легко проверить, уравнение линии примет вид

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$$

или, вводя обозначение $-\frac{a_{13}}{a_{22}} = p$,

$$y^2 = 2px. \tag{2}$$

Линия, представляемая этим уравнением, — нераспадающаяся, как легко проверить, составляя определитель A; следовательно, это — парабола. Ось Ox является в рассматриваемом случае диаметром параболы, а ось Oy — касательной в точке пересечения этого диаметра с параболой, как это следует из сказанного в § 231 (и как легко проверить непосредственно).

Если $a_{13} = 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$a_{22}y^2 + a_{33} = 0,$$

т. е.

$$y = \pm\sqrt{-\frac{a_{33}}{a_{22}}}. \tag{3}$$

Значит, в этом случае наша линия — совокупность двух параллельных прямых действительных (если a_{22} и a_{33} — различных знаков) или мнимых (если a_{22} и a_{33} — одного знака). Если $a_{33} = 0$, то мы имеем две совпадающие прямые.

Итак, линия параболического типа есть либо парабола, и тогда ее уравнение можно привести к виду (2), либо совокупность двух параллельных прямых, как мы это видели уже раньше (§ 225а).

Подходящим выбором длин координатных векторов (ср. предыдущий параграф) уравнению параболы можно придать вид

$$y^2 = 2x. \tag{2а}$$

Из этого, в частности, следует, что все параболы могут быть получены одна из другой аффинным преобразованием. Больше того, все параболы подобны между собою; это сделается ясным тогда, когда мы покажем (в § 238), что параболы, так, как они определены здесь, суть параболы, определенные раньше (в § 200), относительно которых было уже показано (§ 207), что все они подобны.

236. Уравнения линий второго порядка, отнесенных к касательной и диаметру, проведенному через точку касания. Мы вывели такое уравнение для случая параболы. Составим теперь аналогичные уравнения для произвольной нераспадающейся линии второго порядка.

Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

есть уравнение линии, отнесенной к указанной системе осей. Так как линия проходит через O, то $a_{33} = 0$. Далее, уравнение касательной в точке O есть

$$a_{13}x + a_{23}y = 0,$$

и так как эта прямая должна совпадать с осью Oy, то [1])

$$a_{23} = 0, \quad a_{13} \neq 0.$$

Наконец, уравнение диаметра, сопряженного с направлением оси Oy, есть

$$a_{12}x + a_{22}y = 0,$$

ибо $a_{23} = 0$. Этот диаметр должен совпадать с осью Ox. Значит, должно быть $a_{12} = 0$, $a_{22} \neq 0$.

Итак, уравнение (1) принимает вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 \qquad (2)$$

или

$$y^2 = 2px + qx^2, \qquad (3)$$

где

$$p = -\frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad q = -\frac{a_{11}}{a_{22}}.$$

Составляя величину A_{33} для уравнения $y^2 - 2px - qx^2 = 0$, убеждаемся, что при $q < 0$ мы имеем эллипс, при $q > 0$ — гиперболу, а при $q = 0$ — параболу. Таким образом мы обобщили результат § 206.

II. ГЛАВНЫЕ ДИАМЕТРЫ. НОРМАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Мы начинаем изучение метрических свойств конических сечений с вопроса о главных диаметрах. Во всем этом отделе мы будем предполагать координаты *прямоугольными*.

237. Главные диаметры. Диаметр линии второго порядка называется *главным*, если он перпендикулярен к направлению, с которым он сопряжен. Такой диаметр есть, очевидно, ось симметрии линии и поэтому его называют также *осью* кривой. Точки пересечения оси с линией называются вершинами линии.

Поставим себе задачу найти главные диаметры линии второго порядка.

Пусть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

есть уравнение данной линии (в прямоугольных координатах).

Рассмотрим сперва случай линии с определенным центром ($A_{33} \neq 0$). Главные диаметры линии в этом случае суть взаимно перпендикулярные сопряженные диаметры.

---

[1]) Уравнение касательной должно быть определенным, так как линия — нераспадающаяся.

Пусть k_1 и k_2 — угловые коэфициенты этих диаметров. Они связаны соотношением (§ 230):

$$a_{22}k_1k_2 + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{11} = 0, \tag{2}$$

к которому теперь следует присоединить *условие перпендикулярности*

$$k_1k_2 = -1. \tag{3}$$

Пусть сперва $a_{12} \neq 0$. Тогда уравнения (2) и (3), которые можно переписать и так:

$$k_1 + k_2 = -\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}, \quad k_1k_2 = -1, \tag{4}$$

показывают, что k_1 и k_2 являются корнями квадратного уравнения

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0. \tag{5}$$

Так как величина

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2,$$

очевидно, положительна, то уравнение (5) имеет два действительных корня, которые и являются угловыми коэфициентами искомых главных диаметров.

Мы исключили случай, когда $a_{12} = 0$; но легко непосредственно проверить, что уравнение (5) дает направление главных диаметров во всех случаях (для центральных линий). Действительно, если $a_{12} = 0$, но $a_{11} - a_{22} \neq 0$, то уравнение (5) имеет два корня: $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$; непосредственная проверка приводит, с другой стороны, к заключению, что в случае $a_{12} = 0$ диаметр, сопряженный с направлением ($X_1 \neq 0$, $Y_1 = 0$), т. е. с направлением оси Ox, параллелен оси Oy, т. е. его угловой коэфициент $k_2 = \infty$. Наконец, если одновременно $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, то уравнение (5) обращается в тождество $0 = 0$; в этом случае всякий диаметр будет главным, и, как мы увидим в § 239, данная линия есть окружность (действительная или мнимая).

Чтобы найти уравнения главных диаметров, достаточно в общее уравнение диаметра

$$XF_1(x, y) + YF_2(x, y) = 0 \tag{6}$$

подставить вместо X и Y пару чисел (X_1, Y_1) или (X_2, Y_2), определяемых соотношениями

$$\frac{Y_1}{X_1} = k_1 \quad \text{или} \quad \frac{Y_2}{X_2} = k_2, \tag{7}$$

где k_1 и k_2 — корни уравнения (4). Это правило остается в силе и тогда, когда $a_{12} = 0$, т. е. $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$. Тогда надо взять $X_1 \neq 0$, $Y_1 = 0$ и $X_2 = 0$, $Y_2 \neq 0$.

Рассмотрим теперь случай линии параболического типа, когда

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

В этом случае все диаметры параллельны между собою и угловой коэфициент их равен (§ 230)

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{8}$$

(из двух отношений $\frac{a_{11}}{a_{12}}$ и $\frac{a_{12}}{a_{22}}$ по крайней мере одно не является неопределенным, ибо, если, например, $a_{11}=a_{12}=0$, то непременно $a_{22}\neq 0$, иначе линия не была бы второго порядка).

Угловой коэфициент k' хорд, перпендикулярных к этому направлению, дается формулой

$$\frac{Y}{X}=k'=-\frac{1}{k}=\frac{a_{12}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}. \tag{9}$$

Уравнение главного диаметра получим, подставив в (6) на место X и Y любую пару чисел (не равных одновременно нулю), отношение которых дается предыдущей формулой. Например, можно взять

$$X=a_{11},\quad Y=a_{12}\quad\text{или}\quad X=a_{12},\quad Y=a_{22}$$

(если $a_{11}=a_{12}=0$, то следует взять вторую из указанных пар).

Таким образом уравнение главного диаметра напишется так:

$$a_{11}F_1+a_{12}F_2=0\quad\text{или}\quad a_{12}F_1+a_{22}F_2=0. \tag{10}$$

Вопрос о нахождении главных диаметров можно также решить и иным более симметричным способом, допускающим обобщение на случай пространства трех измерений (и даже любого числа измерений). Но мы здесь на этом не будем останавливаться, так как при изучении вопроса об упрощении уравнений поверхностей второго порядка (гл. XI) мы изложим упомянутый способ применительно к случаю трех измерений, после чего читатель без всякого труда сможет применить его и к случаю двух измерений.

Замечание. Легко при помощи дополнительных хорд (§ 233) построить главные диаметры эллипса и гиперболы, заданных очертаниями. Для этого достаточно построить один какой-либо диаметр AB линии (§ 233) и описать окружность, имеющую AB своим диаметром. Если M есть одна из точек пересечения этой окружности с данной линией, то хорды AM и MB будут взаимно перпендикулярными дополнительными хордами, а диаметры, им параллельные, — главными диаметрами. Точки пересечения этих последних с кривой дадут нам вершины ее.

Чтобы построить главный диаметр параболы, достаточно построить один какой-либо диаметр Δ, провести хорду, перпендикулярную к нему, и через середину хорды провести прямую, параллельную Δ. Это и будет главный диаметр параболы. Точка пересечения его с параболой определит вершину.

238. Нормальные уравнения конических сечений в декартовых прямоугольных координатах. Если дана центральная линия второго порядка, то взяв в качестве осей прямоугольной декартовой системы координат главные диаметры, приведем уравнение линии к одному из следующих видов (см. § 234):

1°. В случае действительного эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

1°а. В случае мнимого эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

2°. В случае гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

3°. В случае мнимых сопряженных не параллельных прямых

$$k_1^2x^2+k_2^2y^2=0.$$

4°. В случае действительных не параллельных прямых

$$k_1^2x^2-k_2^2y^2=0.$$

Если линия не имеет определенного центра [центра нет [1]) или имеется прямая центров], то, взяв за ось Ox главный диаметр, а за ось Oy — касательную в вершине [2]) (в случае параболы), или любую прямую, ей перпендикулярную (в случае двух параллельных прямых), будем иметь (см. § 235):

5°. В случае параболы

$$y^2=2px.$$

6°. В случае пары параллельных прямых

$$y^2=\pm k^2$$

(при верхнем знаке прямые — действительные, при нижнем — мнимые).

Теперь мы видим, что линии, названные нами в § 225 эллипсом, гиперболой и параболой, суть те же линии, что были определены в главе VII (кроме мнимого эллипса, который в главе VII не был определен).

Мы уже видели (§ 234), что с аффинной точки зрения все эллипсы эквивалентны между собою, так же как и все гиперболы и все параболы (§ 235).

С точки зрения метрической эллипсы различаются друг от друга размерами [3]) и формой (более или менее вытянутые); среди эллипсов выделяется наиболее простая форма — окружность.

То же относится к гиперболам (среди гипербол роль, аналогичную окружности, играет равносторонняя гипербола) и параболам [4]).

В качестве приложения докажем предложение, высказанное в § 76 (сноска), а именно, что всякое аффинное преобразование можно рассматривать как результат движения и растяжения по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Пусть Γ — окружность на плоскости Π. После аффинного преобразования плоскости Π в плоскость Π', окружность Γ обратится в некоторый эллипс Γ' на Π'.

---

[1]) То-есть центр — несобственный.

[2]) То-есть в точке пересечения главного диаметра с линией.

[3]) Здесь мы понимаем слово „метрический" в узком смысле, считая различными фигуры не одинаковых размеров.

[4]) Мы знаем, что все параболы подобны между собою; если понимать слово „метрический" в широком смысле (считая эквивалентными подобные фигуры), то все параболы — эквивалентны.

Главным диаметрам этого эллипса соответствуют два взаимно перпендикулярных диаметра окружности [1]) Г. Итак, всегда существуют два взаимно перпендикулярных направления, остающиеся взаимно перпендикулярными и после преобразования. Пусть теперь O — некоторая точка на Π и $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — два вектора, с началом в O, имеющие только что указанные направления. Пусть O', $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ — соответствующие элементы на Π'. Путем движения мы можем совместить O с O' и направить векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ по векторам $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ (которые по условию взаимно перпендикулярны).

Теперь, очевидно, что достаточно добавить надлежащие растяжения по направлениям $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, чтобы добиться требуемого результата.

239. Об уравнении окружности. Линия, представляемая (в прямоугольных координатах) уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0, \tag{1}$$

есть, как мы знаем (§ 80), окружность. Линию, представляемую уравнением

$$(x-a)^2+(y-b)^2+r^2=0, \tag{1a}$$

мы будем называть мнимою окружностью, с центром в (a, b) и мнимым радиусом ir (r мы считаем действительным числом).

Если перенести начало координат в центр, то уравнения (1) и (1a) примут вид

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\pm 1$$

($+$ для действительной, $-$ для мнимой окружности), так что окружность есть частный случай эллипса.

Легко решить вопрос: каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение (в прямоугольных координатах)

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{2}$$

представляло окружность.

Для того чтобы линия (2) представляла собою ту же линию, что и (1) или (1a) [мы перепишем эти уравнения так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-K=0, \tag{1b}$$

где $K=\pm r^2$], необходимо и достаточно, чтобы было тождественно

$$\begin{aligned}a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=\\ =k(x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-K),\end{aligned}$$

где k — некоторая постоянная.

Сравнивая коэфициенты, получим

$$\begin{gathered}a_{11}=k,\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=k,\quad a_{13}=-ka,\quad a_{23}=-kb,\\ a_{33}=k(a^2+b^2-K).\end{gathered} \tag{3}$$

Из этих соотношений вытекает, в частности,

$$a_{11}=a_{22},\quad a_{12}=0. \tag{4}$$

[1]) Мы знаем, что при аффинном преобразовании сопряженные диаметры остаются сопряженными; с другой стороны, сопряженные диаметры окружности взаимно перпендикулярны.

Обратно, если условия (4) соблюдены, то уравнение (1) представляет окружность. Это последнее в сущности уже доказано в § 80; повторим доказательство, несколько дополнив его. Если соблюдено условие (4), то можно найти числа k, a, b, K, удовлетворяющие условиям (3). А именно, будем, очевидно, иметь

$$k = a_{11} = a_{22}, \quad a = \frac{-a_{13}}{a_{11}}, \quad b = \frac{-a_{23}}{a_{11}},$$

$$K = a^2 + b^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}} = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2}.$$

Если $K > 0$, то окружность действительная, если $K < 0$ — мнимая.

Наконец, если $K = 0$, то данное уравнение приведется к виду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$, которое удовлетворяется только следующими действительными значениями:

$$x = a, \quad y = b.$$

В этом случае можно сказать, что мы получаем окружность нулевого радиуса.

Окружность нулевого радиуса представляет собою не что иное, как совокупность двух изотропных прямых (§ 162): $y - b = i(x - a)$, $y - b = -i(x - a)$, проходящих через действительную точку (a, b).

Мы видели в § 175, что все окружности проходят через циклические точки. Легко видеть, что обратно: всякая линия второго порядка, проходящая через циклические точки, есть окружность.

Действительно, если линия (пишем уравнение в однородных координатах)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t = 0$$

проходит через точки $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$, то мы должны иметь

$$a_{11} + 2a_{12}i - a_{22} = 0,$$
$$a_{11} - 2a_{12}i - a_{22} = 0,$$

откуда получим $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, а это и доказывает наше утверждение. Для заключения достаточно, чтобы линия проходила через одну из циклических точек, например $(1, i, 0)$, ибо это дает уравнение $a_{11} + 2a_{12}i - a_{22} = 0$, откуда следует (так как мы предполагаем коэфициенты действительными), что

$$a_{11} - a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0.$$

III. НОРМАЛЬ. ФОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КАСАТЕЛЬНЫХ

Во всем этом отделе координаты — прямоугольные, если противное не оговорено.

240. Нормаль к плоской линии. Нормалью к данной плоской линии называется перпендикуляр, восставленный к касательной в точке касания [1]) (в плоскости рассматриваемой кривой). Легко найти уравнение нормали в прямоугольных декартовых координатах.

---

[1]) Понятие нормали — не аффинное и не проективное, так как при аффинном преобразовании (а, тем более, при проективном) прямой угол не остается, вообще говоря, прямым.

На основании вида уравнения касательной [1])

$$(x - x_0) F_1(x_0, y_0) + (y - y_0) F_2(x_0, y_0) = 0$$

заключаем, что вектор с координатами $X = F_1(x_0, y_0)$ и $Y = F_2(x_0, y_0)$ перпендикулярен к касательной и поэтому может быть рассматриваем как вектор направления нормали. Следовательно, уравнение нормали можно представить в виде

$$\frac{x - x_0}{F_1(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_2(x_0, y_0)}. \qquad (1)$$

241. Свойства касательных к эллипсу. Пусть эллипс задан нормальным уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

Так как в нашем случае

$$\Phi(x, y, t) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - t^2$$

и

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = \frac{x_0}{a^2}, \quad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = \frac{y_0}{b^2}, \quad \Phi_3(x_0, y_0, 1) = -1,$$

то уравнение касательной примет вид [§ 217, форм. (5)]:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

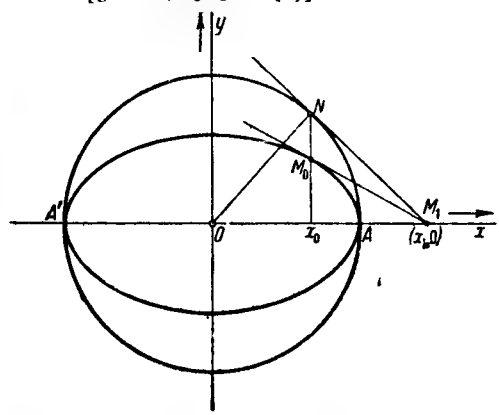
где x_0, y_0 — координаты точки касания M_0 (черт. 154).

Найдем точку пересечения $M_1(x_1, 0)$ касательной с осью Ox. Для этого положим в (2) $y = 0$, $x = x_1$, что дает

$$\frac{x_1 x_0}{a^2} = 1,$$

т. е.

$$x_1 = \frac{a^2}{x_0}. \qquad (3)$$



Черт. 154.

Предыдущая формула показывает, что точку M_1 можно весьма просто построить при помощи циркуля и линейки, когда задана точка касания M_0: достаточно описать из O, как центра, окружность радиуса a, провести через M_0 прямую, перпендикулярную к оси Ox до пересечения с окружностью в точке N, и, наконец, восставить из N перпендикуляр к ON. Точка пересечения этого перпендикуляра с осью Ox и будет искомой. Действительно, из элементарной геометрии известно, что $|ON|^2 = a^2 = x_0 x_1$.

[1]) См. уравнение (6) § 217. По принятым в § 208 обозначениям

$$F_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Построив точку M_1 и соединив ее прямою с M_0, найдем графическим путем касательную.

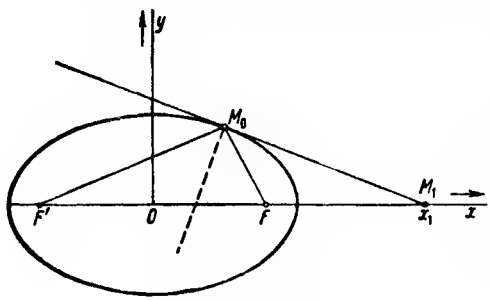
Формула (3) показывает еще, что положение точки M_1 зависит только от a и x_0, так что для всех эллипсов, имеющих ту же ось $A'A$, что и данный, касательная в точке с абсциссой x_0 пройдет через точку M_1. В частности, это будет иметь место для окружности радиуса a, с центром в O. Отсюда еще раз следует правильность указанного выше построения точки M_1.

Докажем теперь одно весьма важное свойство.

Касательная к эллипсу составляет равные углы с радиусами-векторами, проведенными из фокусов к точке касания.

Пусть F' и F — фокусы эллипса и M_0 — точка касания. Легко видеть, что касательная проходит вне угла $F'M_0F$. Мы хотим показать, что острые углы, составляемые направлениями M_0F' и M_0F с касательной, равны между собою, т. е. что касательная есть биссектриса угла между M_0F и продолжением $F'M_0$ (черт. 155).

Из элементарной геометрии известно, что биссектриса внутреннего или внешнего угла при M_0 треугольника $F'M_0F$ делит противоположную сторону на части, пропорциональные длинам сторон $|F'M_0|$ и $|FM_0|$, и что обратно, если прямая M_0M_1 пересекает сторону $F'F$ в точке M_1, удовлетворяющей условию



Черт. 155.

$$\frac{|F'M_0|}{|FM_0|} = \frac{|F'M_1|}{|FM_1|}, \qquad (4)$$

то M_0M_1 есть биссектриса угла при M_0, внешнего (если M_1 находится вне отрезка $F'F$) или внутреннего (если M_1 находится внутри отрезка $F'F$). В нашем случае очевидно, что M_1 находится вне отрезка $F'F$. Докажем, что равенство (4) имеет место.

На основании формул § 199, дающих расстояния точки эллипса до фокусов, имеем

$$|F'M_0| = a + ex_0, \quad |FM_0| = a - ex_0,$$

где $e = \frac{c}{a}$ обозначает, как всегда, эксцентриситет; далее, на основании формулы (3) настоящего параграфа

$$|F'M_1| = |x_1 + c| = \left|\frac{a^2}{x_0} + c\right| = \frac{a(a + ex_0)}{|x_0|},$$

и аналогично

$$|FM_1| = \frac{a(a - ex_0)}{|x_0|}.$$

Следовательно,

$$\frac{|F'M_1|}{|FM_1|} = \frac{a + ex_0}{a - ex_0} = \frac{|F'M_0|}{|FM_0|},$$

а это и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует еще, что *нормаль к эллипсу в точке M_0 есть биссектриса угла $F'M_0F$.*

Поверхность, получаемая вращением эллипса вокруг большой оси, называется *вытянутым эллипсоидом вращения.* Вообразим себе зеркало, имеющее такую форму. На основании основного закона отражения геометрической оптики („луч падающий и луч отраженный составляют одинаковые углы с нормалью") заключаем о следующем свойстве зеркала указанного вида: лучи, испускаемые источником, находящимся в одном из фокусов, после отражения собираются в другом. (Этим свойством и объясняется название „фокуса".)

242. Свойства касательных к гиперболе. Пусть гипербола задана нормальным уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

В этом случае

$$\Phi(x, y, t) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - t^2,$$

и уравнение касательной в точке $M_1(x_0, y_0)$ примет вид

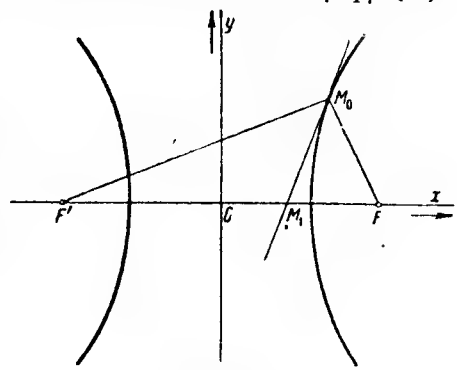
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Точка пересечения $M_1(x_1, 0)$ касательной с осью Ox определяется формулой

$$\frac{x_1x_0}{a^2} = 1, \quad \text{т. е. } x_1 = \frac{a^2}{x_0}. \tag{3}$$

Так как для (действительных) точек гиперболы $|x_0| \geqslant a$, то $|x_1| \leqslant a$; значит, точка $M_1(x_1, 0)$ находится между вершинами гиперболы.

Формула (3) показывает, что точку M_1 при заданных a и x_0 можно весьма просто построить, пользуясь циркулем и линейкой; построение предоставляем произвести читателю (ср. случай эллипса). Построив точку M_1 и соединив ее прямою с M_0, получим касательную к гиперболе в данной точке M_0 (черт. 156).



Черт. 156.

Совершенно аналогично случаю эллипса легко показать, что *касательная к гиперболе делит пополам угол между прямыми, соединяющими точку касания с фокусами*; на этот раз речь идет об угле $F'M_0F$ или вертикальном с ним. Для доказательства достаточно проверить, что

$$\frac{|F'M_1|}{|FM_1|} = \frac{|F'M_0|}{|FM_0|};$$

предоставляем эту проверку читателю.

Из указанного свойства касательной следует, что *нормаль к гиперболе делит пополам угол между отрезком M_0F и продолжением отрезка $F'M_0$.*

Если вращать гиперболу вокруг оси $F'F$, то получим поверхность, состоящую из двух раздельных частей (пол), называемую *двуполостным гиперболоидом вращения*. Представим себе вогнутое зеркало, поверхность которого имеет форму одной полости гиперболоида. Из выведенного свойства нормали следует, что лучи, выходящие из источника света, помещенного в фокусе F, после отражения от зеркальной поверхности, примут такое направление, как если бы все они выходили из фокуса F' другой полости. Если гипербола задана уравнением

$$xy = k, \tag{4}$$

т. е. если за оси координат (вообще, косоугольных) приняты асимптоты (§ 203), то

$$\Phi(x, y, t) = xy - kt^2, \quad \Phi_1(x_0, y_0, 1) = \frac{1}{2} y_0,$$

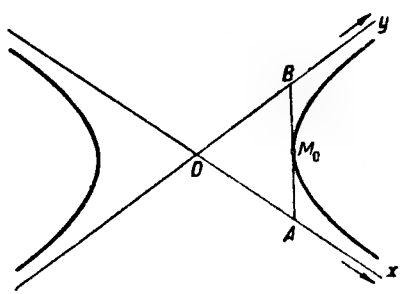
$$\Phi_2(x_0, y_0, 1) = \frac{1}{2} x_0, \quad \Phi_3(x_0, y_0, 1) = -k,$$

и уравнение касательной принимает вид

$$xy_0 + yx_0 = 2k.$$

Будем для простоты считать координаты не обобщенными. Отрезки, отсекаемые касательной на осях координат (асимптотах), равны соответственно (черт. 157)

$$OA = \frac{2k}{y_0}, \quad OB = \frac{2k}{x_0},$$



Черт. 157.

или, принимая во внимание, что $x_0 y_0 = k$,

$$OA = 2x_0, \quad OB = 2y_0. \tag{5}$$

Отсюда следует, между прочим, что *отрезок касательной между асимптотами делится точкой касания пополам.*

Далее, на основании формул (5) можно показать, что *площадь треугольника, образованного асимптотами и касательной, есть величина постоянная* (т. е. не зависит от положения точки касания).

Действительно, площадь эта равна

$$\frac{1}{2} |OA| \, |OB| \sin \nu = 2 |x_0 y_0| \sin \nu = 2k \sin \nu,$$

где ν — угол между асимптотами.

243. Свойства касательных к параболе. Возьмем уравнение параболы в нормальном виде

$$y^2 - 2px = 0. \tag{1}$$

Имеем

$$\Phi(x, y, t) = y^2 - 2pxt,$$

$$\Phi_1(x_0, y_0, 1) = -p, \quad \Phi_2(x_0, y_0, 1) = y_0,$$

$$\Phi_3(x_0, y_0, 1) = -px_0$$

и уравнение касательной будет

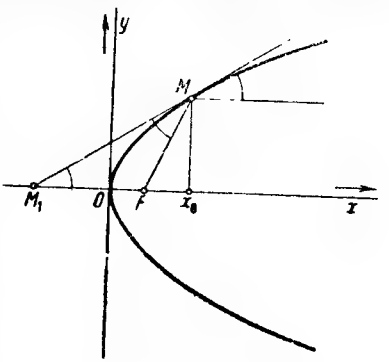
$$-px+y_0y-px_0=0,$$

или

$$y_0y=p(x+x_0). \tag{2}$$

Касательная пересекает ось Ox в точке $M_1(x_1, 0)$, где $x_1=-x_0$ (черт. 158), откуда вытекает очень простой очевидный способ построения касательной.

Докажем теперь, что *касательная к параболе в любой точке M составляет равные углы с радиусом вектором, соединяющим фокус F с точкой M, и прямой, проведенной из M параллельно оси* (это свойство можно рассматривать как предельный случай аналогичного свойства касательной к эллипсу; в нашем случае один из фокусов удален в бесконечность в направлении оси параболы).



Черт. 158.

Чтобы это доказать, заметим, что треугольник M_1FM равнобедренный [1]), и, значит, углы его при M_1 и M равны. Но угол при M_1 равен углу касательной с прямой, проведенной из M параллельно Ox, а угол при M есть угол, составленный касательной с радиусом-вектором.

Отсюда вытекает следующее свойство вогнутого параболического зеркала, поверхность которого образована вращением параболы вокруг оси: лучи, выходящие из фокуса, после отражения, делаются параллельными оси. Обратно, пучок параллельных лучей, падающий в направлении оси, собирается в фокусе.

Упражнения и дополнения (к § 241—243)

1. Доказать, что в случае эллипса понятие внутренних и внешних точек, введенное в конце § 219, совпадает с обычным понятием внутренних и внешних точек для замкнутой кривой.

Доказательство. Под „внешними“ и „внутренними“ точками мы будем понимать внешние и внутренние точки в обычном смысле слова и докажем, что это согласуется с понятиями, введенными в § 219.

Пусть $M(\xi, \eta)$ данная точка, из которой требуется провести касательные к эллипсу.

Точки касания определяются пересечением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

[1]) Действительно, мы знаем (§ 200), что $|FM|=\frac{p}{2}+x_0$. Но

$$|M_1F|=|x_1|+|OF|=\frac{p}{2}+x_0,$$

ибо $p=2|OF|$ и по доказанному выше $|x_1|=|x_0|$. Значит,

$$|MF|=|M_1F|.$$

с прямою — полярой точки M:

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}=1.$$

Для нахождения точек касания следует решить предыдущую систему относительно x,y. Исключая y, получим, после простых приведений, квадратное уравнение, определяющее x:

$$Ax^2+2Bx+C=0,$$

где для краткости положено:

$$A=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2},\quad B=-\xi,\quad C=a^2\left(1-\frac{\eta^2}{b^2}\right).$$

Корни этого уравнения будут действительными, если $B^2-AC>0$, мнимыми, если $B^2-AC<0$, совпадающими, если $B^2-AC=0$.

Простые вычисления показывают, что

$$B^2-AC=\frac{a^2\eta^2}{b^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right);$$

следовательно, знак B^2-AC определяется знаком выражения

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1.$$

Легко видеть, что это выражение положительно, если точка (ξ, η) расположена вне эллипса, и отрицательно, если точка (ξ, η) находится внутри эллипса. Отсюда и следует наше утверждение. Если предыдущее выражение равно нулю, то точка (ξ, η) расположена на эллипсе, и мы имеем, как и следовало ожидать, одну („две совпадающие") касательную.

2. Доказать, что с точки зрения определения, данного в § 219, внешними точками по отношению к гиперболе являются те, которые находятся между двумя ветвями гиперболы, а внутренними — все остальные (кроме точек самой гиперболы).

3. Доказать, что точками внешними по отношению к параболе являются точки той части плоскости, где не находится фокус параболы.

IV. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИАМЕТРОВ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ

Изучим теперь более подробно вопрос о диаметрах каждой из нераспадающихся действительных линий второго порядка.

Во всем этом отделе координаты считаются прямоугольными, если противное не оговорено.

244. Диаметры эллипса. Начнем с эллипса, который будем считать заданным нормальным уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

В нашем случае

$$a_{11}=\frac{1}{a^2},\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=\frac{1}{b^2},$$

и уравнение, связывающее угловые коэфициенты k и k' сопряженных диаметров Δ, Δ', т. е. уравнение (5) § 230, сводится к следующему:

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}, \tag{2}$$

или, полагая $k = \operatorname{tg}\varphi$, $k' = \operatorname{tg}\varphi'$, где φ и φ' — углы, составляемые сопряженными диаметрами Δ и Δ' с осью Ox,

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi' = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad (2a)$$

Предположим, что (черт. 159) диаметр Δ проходит через первый координатный угол (а, следовательно, и через третий). Тогда можно принять, что

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = k \geqslant 0.$$

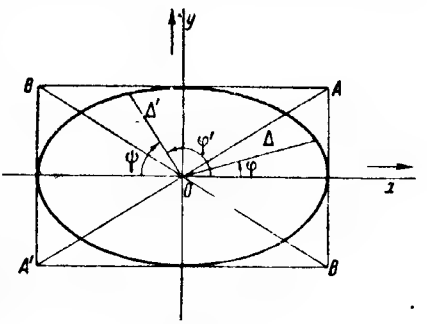
Из предыдущих формул вытекает, что в этом случае

$$\operatorname{tg}\varphi' = k' \leqslant 0,$$

т. е. что диаметр Δ', сопряженный с Δ, проходит через второй и четвертый координатные углы, и что, следовательно, можно считать

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi' \leqslant \pi.$$

Когда $\varphi = 0$, то на основании (2a) $\operatorname{tg}\varphi' = \infty$ и $\varphi' = \frac{\pi}{2}$; когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, то на основании той же формулы, $\operatorname{tg}\varphi' = 0$. Значит, оси координат являются главными диаметрами, т. е. осями эллипса, как мы это уже видели и раньше.



Черт. 159.

Легко проверить, что нет других главных диаметров (осей) кроме указанных, если только мы имеем дело с эллипсом в собственном смысле этого слова ($b < a$), а не с окружностью.

Действительно, для того чтобы два сопряженных диаметра были взаимно перпендикулярны, должно быть

$$kk' = -1.$$

Но, с другой стороны, по формуле (2) $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$, причем по условию $\frac{b^2}{a^2} < 1$. Значит, такие сопряженные диаметры не могут существовать, за исключением того случая, когда одна из величин k, k' равна нулю, а другая бесконечности, и для произведения $k \cdot k'$ получается неопределенность. Мы видели, что в этом последнем случае мы действительно получаем взаимно перпендикулярные сопряженные диаметры.

Посмотрим, далее, как изменяется направление диаметра Δ', когда диаметр Δ вращается вокруг O, так что φ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Положим, для большей ясности $\psi = \pi - \varphi'$. Формула (2a) примет вид

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2};$$

значит, $\operatorname{tg}\psi > \frac{b}{a}$, пока $\operatorname{tg}\varphi < \frac{b}{a}$; когда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, то и $\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}$; и, наконец, $\operatorname{tg}\psi < \frac{b}{a}$, когда $\operatorname{tg}\varphi > \frac{b}{a}$.

Если $A'A$ и $B'B$ обозначают диагонали прямоугольника, средними линиями[1]) которого являются оси $2a$, $2b$ эллипса (прямоугольник этот, очевидно, описан вокруг эллипса, так как касается его в вершинах), и если α обозначает острый угол, составляемый этими диагоналями с осью Ox, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Из предыдущего следует, что при $\varphi < \alpha$ будет: $\psi > \alpha$, т. е. пока Δ заключается в угле xOA (и вертикальном с ним), то Δ' заключается в угле yOB (и вертикальном с ним). Когда Δ приближается к $A'A$, то Δ' приближается к $B'B$. Когда Δ переходит в угол AOy, то Δ' переходит в угол между OB и отрицательною осью Ox. Диаметры, направленные по $A'A$ и $B'B$, являются единственными сопряженными диаметрами, симметрично расположенными относительно осей эллипса.

В случае окружности ($b = a$) имеем $kk' = -1$; значит, в этом случае все сопряженные диаметры взаимно перпендикулярны; каждый диаметр является главным, что, конечно, очевидно и непосредственно.

Заметим, наконец, что если из концов двух сопряженных диаметров провести касательные к эллипсу, то эти прямые составят параллелограм, описанный вокруг эллипса. Действительно, касательные, проведенные из концов одного диаметра, параллельны второму диаметру (§ 231). Средними линиями этого параллелограма (т. е. линиями, соединяющими середины противоположных сторон) являются, очевидно, взятые сопряженные диаметры.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что если спроектировать на плоскость окружность с ее двумя взаимно перпендикулярными диаметрами, то проекции этих диаметров будут сопряженными диаметрами эллипса, являющегося проекцией данной окружности.

Доказательство основано на том, что при проектировании параллельные хорды окружности обращаются в параллельные хорды эллипса, и что середины проектируемых хорд дают середины хорд в проекции.

2. Рассматривая эллипс как проекцию окружности, доказать, что площадь параллелограма, описанного вокруг данного эллипса, есть величина постоянная[2]).

Указание. Параллелограм, описанный вокруг данного эллипса, есть, очевидно, проекция квадрата, описанного вокруг проектируемой окружности.

245. Диаметры гиперболы. Рассмотрим гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

В этом случае

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -\frac{1}{b^2}$$

---

[1]) То-есть отрезками, соединяющими середины противоположных сторон.

[2]) Это — так называемая вторая теорема Аполлония для эллипса (см. § 251).

и угловые коэфициенты сопряженных диаметров связаны соотношением

$$kk' = \frac{b^2}{a^2}, \tag{2}$$

или

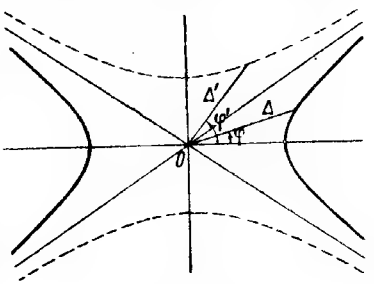
$$\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi' = \frac{b^2}{a^2}. \tag{2a}$$

Если $\operatorname{tg}\varphi > 0$, мы можем считать, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Из (2a) следует тогда, что $\operatorname{tg}\varphi' > 0$ и, следовательно, можно также считать, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

При $\varphi = 0$, имеем $\operatorname{tg}\varphi = 0$, и значит, на основании (2), $\operatorname{tg}\varphi' = \infty$, т. е. $\varphi' = \frac{\pi}{2}$.

Оси Ox и Oy являются, таким образом, взаимно перпендикулярными сопряженными диаметрами, т. е. главными диаметрами (осями) гиперболы.

Итак, если диаметр Δ проходит через первый и третий координатные углы, то и сопряженный с ним диаметр Δ' проходит через те же углы (черт. 160). Точно так же, как легко видеть, на основании симметрии, если диаметр проходит через второй и третий координатные углы, то и сопряженный с ним диаметр проходит через те же углы. В частности, очевидно, что оси симметрии являются единственными взаимно перпендикулярными сопряженными диаметрами.



Черт. 160.

Пусть α обозначает острый угол, составляемый асимптотами с осью Ox. Мы знаем, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Из (2a) следует, что если $\operatorname{tg}\varphi < \frac{b}{a}$, то $\operatorname{tg}\varphi' > \frac{b}{a}$, т. е. что если $\varphi < \alpha$, то $\varphi' > \alpha$. Значит, сопряженные диаметры находятся по разные стороны асимптоты; если один из них пересекает гиперболу (диаметр Δ на черт. 160), то другой ее не пересекает (диаметр Δ' на черт. 160), но зато пересекает сопряженную гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{1a}$$

изображенную на чертеже пунктиром.

Когда Δ приближается к асимптоте, то и Δ' приближается к ней, так что асимптоту можно рассматривать как самосопряженный диаметр, как было уже сказано раньше (§ 230).

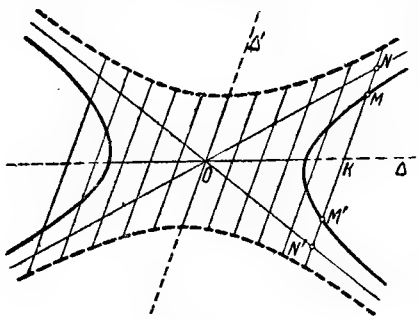
На основании формулы (2), которая одинаково относится к гиперболам (1) и (1a), заключаем, что данная гипербола (1) и сопряженная с ней гипербола (1a) имеют одни и те же диаметры, и что диаметры, сопряженные относительно одной из них, будут сопряженными и относительно другой. Одновременное рассмотрение данной и сопряженной

с ней гиперболы имеет то преимущество, что прямые, пересекающие одну из них в мнимых точках, пересекают другую в действительных, и диаметры могут быть рассматриваемы как геометрические места середин всегда действительных параллельных хорд либо данной, либо сопряженной гиперболы. Например, часть диаметра Δ, изображенная на черт. 161 сплошной чертой, делит пополам действительные хорды гиперболы (1а), параллельные диаметру Δ'; часть того же диаметра Δ, изображенная на чертеже пунктиром, делит пополам действительные хорды обеих гипербол.

Совокупность асимптот наших гипербол есть (распадающаяся) линия второго порядка, представляемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{3}$$

Угловые коэфициенты k и k' сопряженных диаметров этой линии связаны тем же соотношением (2) или (2а). Следовательно, диаметры, сопряженные относительно одной из линий (1), (1а), или (3), будут сопряженными относительно двух других.



Черт. 161.

Отсюда нетрудно вывести следующее простое предложение: *отрезки секущей, заключенные между гиперболой и асимптотами, равны между собою.*

Действительно, пусть MM' секущая, пересекающая гиперболу (1) в точках M и M' (черт. 161). Пусть K середина хорды MM'. Тогда OK есть диаметр, сопряженный с направлением нашей секущей. Пусть, далее, N и N' суть точки пересечения секущей с асимптотами. На основании предыдущего, диаметр OK делит пополам также и хорду NN' линии (3). Значит, мы имеем одновременно

$$KM = KM', \quad KN = KN',$$

откуда, вычитая, получим: $MN = M'N'$, а это и требовалось доказать.

Если из концов $A'A$, $B'B$ двух сопряженных диаметров (подразумевая под концами B, B' диаметра, не пересекающего гиперболу, точки его пересечения с сопряженной гиперболой) провести касательные к данной и сопряженной гиперболам, то мы получим параллелограм (черт. 162), средними линиями которого являются наши два диаметра (ср. конец предыдущего параграфа).

Легко показать, что диагонали этого параллелограма направлены по асимптотам. Действительно, направим оси Ox', Oy' необобщенной системы декартовых координат по упомянутым сопряженным диаметрам. Тогда уравнение гиперболы примет вид (§ 234)

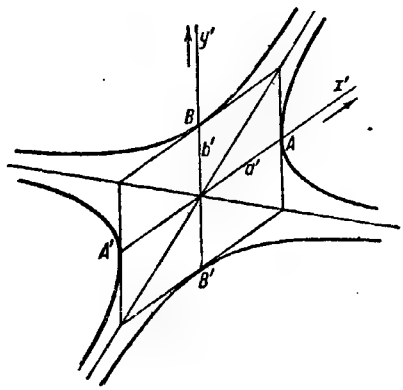
$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

где, как легко видеть, a' и b' суть длины соответствующих полудиаметров (действительно, полагая $y'=0$, получим $x'=\pm a'$).

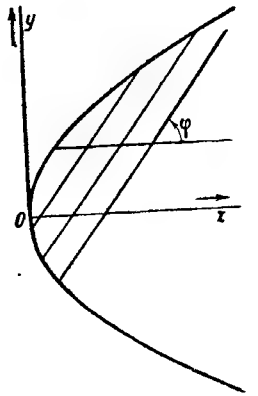
Уравнение совокупности асимптот в тех же координатах будет, как легко видеть, иметь вид [1])

$$\frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}=0. \qquad (*)$$

Далее, очевидно, что угловые коэфициенты упомянутых выше диагоналей равны, в новых координатах, $\pm\frac{b'}{a'}$; но тем же величинам равны, очевидно, угловые коэфициенты асимптот (*).



Черт. 162.



Черт. 163.

Рассмотреиный параллелограм мы будем для краткости называть *описанным* около данной гиперболы.

Легко видеть, что *площадь параллелограма, описанного около данной гиперболы, есть величина постоянная* [2]). Действительно, площадь эта равна, очевидно, учетверенной площади треугольника, заключенной между одной из сторон и асимптотами. А эта последняя есть величина постоянная, как показано в конце § 242.

Аналогичное предположение для эллипса указано в предыдущем параграфе (упражнение 2).

246. Диаметры параболы. Возьмем нормальное уравнение параболы

$$y^2-2px=0. \qquad (1)$$

Диаметр, сопряженный с направлением (X, Y), имеет уравнение

$$XF_1(x,y)+YF_2(x,y)=0,$$

---

[1]) См. § 229, упражнение 1 (там, как и здесь, координаты не предполагались прямоугольными).

[2]) Это — так называемая вторая теорема Аполлония для гиперболы (см. еще § 251).

или, так как в нашем случае $F(x, y) = y^2 - 2px$,

$$-pX + yY = 0.$$

Полагая $\frac{Y}{X} = k$, можно предыдущее уравнение переписать так:

$$y = \frac{p}{k}. \tag{2}$$

Мы видим, что все диаметры параллельны между собою (параллельны оси Ox), как мы знали и раньше (черт. 163).

Угол φ, составляемый диаметром с хордами, делимыми им пополам, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = k. \tag{3}$$

Диаметр будет главным (осью) только при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. при $k = \infty$. В этом случае уравнение (2) обращается в уравнение $y = 0$, т. е. уравнение оси Ox.

ИНВАРИАНТЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ И ПОЛОЖЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Мы уже знаем, к каким простейшим видам может быть приведено уравнение линии второго порядка в прямоугольных координатах. В этой главе мы займемся вопросом фактического осуществления таких приведений и вопросом непосредственного определения формы и положения кривой по виду ее уравнения.

Весьма существенную роль при этом будет играть понятие *инварианта*.

I. ИНВАРИАНТЫ

247. Преобразование уравнения при замене декартовых координат. Начнем с изучения вопроса о том, как изменяются коэфициенты левой части

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \qquad (1)$$

уравнения линии второго порядка при замене данной системы Oxy декартовых координат другою $O'x'y'$.

Мы знаем, что при такой замене старые и новые координаты одной и той же точки связаны линейными соотношениями вида:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + \alpha, \\ y &= m_1x' + m_2y' + \beta, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где постоянные l_1, l_2, m_1, m_2, α, β зависят от положения новой системы относительно старой и от размеров и направлений координатных векторов. А именно, α, β обозначают координаты нового начала O' относительно старой системы, а (l_1, m_1) и (l_2, m_2) — координаты новых координатных векторов. В частности, в случае, когда обе системы — прямоугольные, одного и того же класса (§ 69, стр. 115), причем новая система получается из старой путем переноса начала в точку (α, β) и поворота на угол φ, формулы (2) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + \alpha, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Если внести в полином (1) вместо x, y их выражения (2), то $F(x, y)$, обратится в полином также второй степени относительно x', y'. Этот

полином мы обозначим через $F'(x', y')$, а коэфициенты его соответственно через a'_{11}, $2a'_{12}$ и т. д., так что

$$F'(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33}. \quad (4)$$

Новые коэфициенты $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$ будут, конечно, определенным образом зависеть от старых коэфициентов $a_{11}, \ldots, a_{33}$ и от коэфициентов формул преобразования (2). Вопрос о выражении новых коэфициентов через старые, для упрощения выкладок, мы разобьем на два, рассматривая отдельно случай переноса начала координат без изменения координатных векторов и случай изменения координатных векторов без изменения начала.

1°. *Перенос начала.* В этом случае, если начало перенести в точку $O'(\alpha, \beta)$, старые координаты (x, y) связаны с новыми координатами (x', y') уравнениями

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta. \quad (5)$$

Подставляя эти значения в полином (1) и пользуясь формулой (11а) § 208, получим

$$F'(x', y') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \\ + 2F_1(\alpha, \beta)x' + 2F_2(\alpha, \beta)y' + F(\alpha, \beta). \quad (6)$$

Итак, мы получили следующий простой результат, который следует запомнить:

При переносе начала координат в точку (α, β), *полином* $F(x, y)$ *преобразуется следующим образом: коэфициенты членов второго измерения остаются без изменения. Коэфициенты при первых степенях новых переменных* x' *и* y' *равны соответственно значениям частных производных* $2F_1$, $2F_2$ *полинома* $F(x, y)$ *в точке* (α, β); наконец, свободный член равен значению полинома $F(x, y)$ в той же точке (α, β).

2°. *Изменение координатных векторов без изменения начала.* В этом случае

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y', \\ y &= m_1x' + m_2y'. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Если подставить эти выражения в полином $F(x, y)$, то мы получим полином $F'(x', y')$. Совершенно очевидно, на основании однородности формул преобразования (7), что члены второго измерения в полиноме $F'(x', y')$ произойдут исключительно от членов второго измерения в $F(x, y)$, члены первого измерения — от членов первого измерения, и что член нулевого измерения (свободный член) не изменится вовсе.

Таким образом будем иметь:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2, \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{13}x + a_{23}y &= a'_{13}x' + a'_{23}y, \\ a_{33} &= a'_{33}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Чтобы получить выражения новых коэфициентов при членах второго измерения, достаточно воспользоваться равенством (8), которое должно

обратиться в тождество, если в левую часть вместо x, y внести их выражения (7). Это даст:

$$a_{11}(l_1x'+l_2y')^2+2a_{12}(l_1x'+l_2y')(m_1x'+m_2y')+ \\ +a_{22}(m_1x'+m_2y')^2=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2.$$

Раскрывая скобки в левой части и приравнивая коэфициенты при x'^2, $x'y'$, y'^2 в обеих частях, получим:

$$\left.\begin{aligned} a'_{11}&=a_{11}l_1^2+a_{22}m_1^2+2a_{12}l_1m_1,\\ a'_{22}&=a_{11}l_2^2+a_{22}m_2^2+2a_{12}l_2m_2,\\ a_{12}&=a_{11}l_1l_2+a_{22}m_1m_2+a_{12}(l_1m_2+l_2m_1).\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Точно так же получим выражения новых коэфициентов при членах первого измерения, при помощи формулы (9), которая дает:

$$a_{13}(l_1x'+l_2y')+a_{23}(m_1x'+m_2y')=a'_{13}x'+a'_{23}y',$$

откуда (сравнивая коэфициенты):

$$\left.\begin{aligned} a'_{13}&=a_{13}l_1+a_{23}m_1,\\ a'_{23}&=a_{13}l_2+a_{23}m_2.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Напомним, наконец, что

$$a'_{33}=a_{33}.$$

В случае *поворота осей прямоугольных координат*, когда формулы преобразования имеют вид

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\quad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,$$

т. е. когда

$$l_1=\cos\varphi,\quad m_1=\sin\varphi,\quad l_2=-\sin\varphi,\quad m_2=\cos\varphi,$$

предыдущие формулы дают:

$$\left.\begin{aligned} a'_{11}&=a_{11}\cos^2\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi,\\ a'_{22}&=a_{11}\sin^2\varphi+a_{22}\cos^2\varphi-2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi,\\ a'_{12}&=-(a_{11}-a_{22})\sin\varphi\cos\varphi+a_{12}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi).\end{aligned}\right\} \qquad (10a)$$

$$\left.\begin{aligned} a'_{13}&=a_{13}\cos\varphi+a_{23}\sin\varphi,\\ a'_{23}&=-a_{13}\sin\varphi+a_{23}\cos\varphi,\\ a'_{33}&=a_{33}.\end{aligned}\right\} \qquad (11a)$$

В дальнейшем нам придется иметь дело главным образом с формулами (10a). Их можно несколько упростить. Именно, вспоминая, что

$$\cos^2\varphi=\frac{1+\cos2\varphi}{2},\quad \sin^2\varphi=\frac{1-\cos2\varphi}{2},\quad \sin\varphi\cos\varphi=\frac{\sin2\varphi}{2},$$

получим довольно простые формулы

$$\left.\begin{aligned} a'_{11}&=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos2\varphi+a_{12}\sin2\varphi,\\ a'_{22}&=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos2\varphi-a_{12}\sin2\varphi,\\ a'_{12}&=-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin2\varphi+a_{12}\cos2\varphi.\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Запоминать эти формулы нет надобности.

Если мы имеем преобразование общего вида (перенос начала, сопровождаемый изменением координатных векторов), то значения новых коэфициентов получим по предыдущим формулам, произведя последовательно перенос начала, а затем изменение координатных векторов (или в обратном порядке).

Для дальнейшего важно отметить следующее. До сих пор речь шла о преобразовании *полинома* $F(x, y)$ при изменении системы координат.

Если речь идет об *уравнении* данной линии $F(x, y) = 0$, то уравнение той же линии в новой системе $O'x'y'$ мы можем получить, заменяя в полиноме $F(x, y)$ переменные x, y их выражениями через x', y'. Но, после этого, мы можем еще умножить полученное таким образом уравнение $F'(x', y') = 0$ на произвольный постоянный множитель k. Тогда коэфициенты нового уравнения не будут уже теми, которые определяются предыдущими формулами, однако будут отличаться от них только постоянным множителем (притом произвольным, но отличным от нуля).

Когда в дальнейшем будет итти речь о преобразовании уравнения линии при замене координат, мы будем всегда подразумевать (если противное не оговорено особо), что преобразование производится *без умножения на постоянный множитель*, т. е. что речь идет о преобразовании *полинома* $F(x, y)$.

248. Понятие инварианта. Примеры. Мы переходим теперь к рассмотрению одного из важнейших вопросов, а именно к вопросу об *инвариантах*, связанных с уравнением линии второго порядка.

Мы начнем с пояснения этого понятия на примере. Будем, для простоты, считать, что координаты прямоугольные.

Если сложим первые две формулы (12), то получим:

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}.$$

Значит, хотя при повороте осей координат величины a_{11} и a_{22} изменяются каждая в отдельности (обращаются в новые величины a'_{11}, a'_{22}), но сумма их остается неизменной. Легко проверить, что этот результат справедлив и в том случае, когда системы координат различных классов. Мы знаем, кроме того, что a_{11} и a_{22} остаются неизменными при переносе начала. Итак, *сумма коэфициентов при квадратах переменных*

$$S = a_{11} + a_{22} \tag{1}$$

остается неизменной при любом преобразовании прямоугольных координат. Это обстоятельство выражают, говоря, что S есть *инвариант* полинома $F(x, y)$ *при преобразовании прямоугольных координат.*

Вообще, всякая функция

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

от коэфициентов полинома $F(x, y)$, называется *инвариантом при преобразовании прямоугольных координат*, если значение этой функции

остается неизменным при переходе от данной прямоугольной системы к любой другой прямоугольной, т. е. если

$$f(a'_{11}, \ldots, a'_{33}) = f(a_{11}, \ldots, a_{33}).$$

Основное значение понятия инварианта станет ясным, если заметить, что выражение вида $f(a_{11}, \ldots, a_{33})$ только в том случае может представлять геометрическую величину, характерную для самой рассматриваемой линии, не зависящую от случайного положения осей координат, если это выражение есть инвариант. Поэтому вопрос о разыскании инвариантов полинома $F(x, y)$ является одним из самых основных в теории линий второго порядка. Мы, как уже сказано, ограничимся пока разысканием инвариантов при преобразовании прямоугольных координат, или, как говорят, *ортогональных инвариантов*; в дальнейшем, говоря об инвариантах, мы будем подразумевать ортогональные инварианты, если противное не оговорено особо.

Приведем еще один пример инварианта. Формулы (12) § 247 дают

$$a'_{11} - a'_{22} = (a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + 2a_{12} \sin 2\varphi,$$
$$2a'_{12} = -(a_{11} - a_{22}) \sin 2\varphi + 2a_{12} \cos 2\varphi.$$

Если возвести предыдущие равенства в квадрат и сложить, то получим

$$(a'_{11} - a'_{22})^2 + 4a'^2_{12} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2.$$

Следовательно, выражение

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \tag{2}$$

есть также инвариант (этот результат справедлив и для систем различных классов).

Оно может быть переписано еще так:

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

Отметим теперь следующее почти очевидное обстоятельство. Если мы имеем несколько инвариантов $J_1, J_2, \ldots, J_n$ то всякая их функция $\Phi(J_1, \ldots, J_n)$ будет также инвариантом. Это совершенно ясно, так как если $J_1, \ldots, J_n$ остаются неизменными при замене координат, то и $\Phi(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ останется неизменной.

Таким образом, например, $S^2 = (a_{11} + a_{22})^2$ есть инвариант, ибо S есть инвариант. Вычитая S^2 из только что найденного инварианта $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, получим еще инвариант $-4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, или, отбросив постоянный множитель -4, инвариант

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

В следующем параграфе будет приведено другое доказательство инвариантности предыдущего выражения.

249. Основные инварианты уравнения линии второго порядка. Инварианты, найденные в предыдущем параграфе, могут быть получены еще иным путем на основании свойства дискриминанта квадратичной формы (см. Добавление, § 11); этим же путем мы найдем еще один

инвариант и получим таким образом все основные ортогональные инварианты, связанные с уравнением линии второго порядка.

Рассмотрим с этой целью квадратичную форму

$$\Phi(x, y, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2, \quad (1)$$

получающуюся из полинома $F(x, y)$ „дополнением до однородности", а также квадратичную форму

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad (2)$$

представляющую собою совокупность членов второго измерения полиома $F(x, y)$.

Напомним, что дискриминант квадратичной формы (1) есть

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

и что дискриминант квадратичной формы (2) представляет собою алгебраическое дополнение A_{33} элемента a_{33} в предыдущем определителе:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \quad (4)$$

Вспомним теперь предложение (см. Добавление, § 11), гласящее, что *дискриминант квадратичной формы, получающейся из данной в результате линейной однородной подстановки над переменными, равен дискриминанту исходной формы, умноженному на квадрат определителя подстановки.*

При переходе от системы прямоугольных осей Oxy к системе прямоугольных осей $O'x'y'$ переменные x, y в полиноме $F(x, y)$ подвергаются неоднородной подстановке [1])

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + \alpha, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + \beta. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Чтобы иметь дело с линейной *однородной* подстановкой над переменными x, y, t квадратичной формы $\Phi(x, y, t)$, условимся подвергать эти последние подстановке

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + \alpha t', \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + \beta t', \\ t &= t'. \end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

[1]) Мы рассматриваем, для сокращения письма, только тот случай, когда системы координат — одного класса (§ 69). В противном случае вместо формул (5) будем иметь формулы

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + \alpha, \\ y &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + \beta; \end{aligned}$$

все результаты, изложенные в настоящем параграфе, останутся справедливыми и в этом случае.

При $t = t' = 1$, эта подстановка обращается в подстановку (5), а исходная и преобразованная формы $\Phi(x, y, t)$ и $\Phi'(x', y', t')$ обращаются в исходный и преобразованный полиномы $F(x, y)$ и $F'(x', y')$.

Определитель подстановки (5а) равен

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \alpha \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Поэтому дискриминант A квадратичной формы $\Phi(x, y, t)$ останется неизменным при замене координат, т. е. мы будем иметь:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} a'_{12} a'_{13} \\ a'_{21} a'_{22} a'_{23} \\ a'_{31} a'_{32} a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Итак, дискриминант A есть инвариант.

Применим теперь ту же теорему к квадратичной форме $\varphi(x, y)$, рассматривая линейную подстановку:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Так как определитель этой подстановки равен 1, то дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y)$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$

остается неизменным при повороте осей координат. Так как, далее, перенос начала вовсе не изменяет коэфициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} полинома $F(x, y)$, то A_{33} остается неизменным при всяком преобразовании прямоугольных координат. Таким образом инвариантность A_{33} доказана снова.

Рассмотрим, далее, квадратичную форму[1])

$$\varphi(x, y) - \lambda(x^2 + y^2) = (a_{11} - \lambda) x^2 + 2a_{12}xy + (a_{22} - \lambda) y^2, \qquad (*)$$

где λ — произвольная постоянная.

При подстановке (6), эта квадратичная форма переходит в форму

$$\varphi'(x', y') - \lambda(x'^2 + y'^2) = (a'_{11} - \lambda) x'^2 + 2a'_{12}x'y' + (a'_{22} - \lambda) y'^2, \qquad (**)$$

ибо при подстановке (6) имеем тождественно

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

Так как дискриминанты форм (*) и (**) должны быть равны между собою, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, a_{12} \\ a_{21} \quad a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda, \ a'_{12} \\ a'_{21} \quad a'_{22} - \lambda \end{vmatrix},$$

[1]) Мы применяем здесь к частному случаю общий прием, указанный в Добавлении (§ 14).

или, раскрывая определители,

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=\lambda^2-(a'_{11}+a'_{22})\lambda+$$
$$+(a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}).$$

Это соотношение должно иметь место при всяких λ, следовательно, коэфициенты при различных степенях λ должны быть одинаковы в правой и левой частях. Это дает

$$a_{11}+a_{22}=a'_{11}+a'_{22},\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}.$$

Второе из этих равенств выражает инвариантность A_{33}; первое же показывает, что

$$S=a_{11}+a_{22}$$

есть также инвариант — результат, полученный в предыдущем параграфе иным путем.

Итак, мы приходим к следующему важному выводу: *выражения*

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad S=a_{11}+a_{22} \tag{7}$$

суть ортогональные инварианты полинома $F(x, y)$.

A и A_{33} суть соответственно дискриминанты форм $\Phi(x, y, t)$ и $\varphi(x, y)$. Мы будем их, для краткости, называть соответственно „большим“ и „малым“ дискриминантом полинома $F(x, y)$.

Замечание 1. Вспомним, что равенство $A=0$ выражает необходимое и достаточное условие того, чтобы наша линия второго порядка была распадающейся.

Равенство же $A_{33}=0$ выражает необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратичная форма $\varphi(x, y)$ была полным квадратом, т. е. чтобы

$$\varphi(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=\lambda(ax+by)^2;$$

см. Добавление, начало § 12.

Замечание 2. Кроме инвариантов (7) можно составить бесчисленное множество других: всякая функция от A, A_{33}, S будет также инвариантом (см. предыдущий параграф). Вопрос о том, есть ли, обратно, всякий инвариант функция указанных трех, будет рассмотрен ниже (§ 261).

Отметим, что, в частности, корни λ_1 и λ_2 квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-S\lambda+A_{33}=0 \tag{8}$$

суть также инварианты, ибо коэфициенты этого уравнения не изменяются при замене прямоугольных координат. В противоположность инвариантам (7), величины λ_1 и λ_2 — иррациональные инварианты (т. е. не выражаются рационально через коэфициенты полинома F). Инварианты S и A_{33} суть функции от λ_1, λ_2:

$$S=\lambda_1+\lambda_2,\quad A_{33}=\lambda_1\lambda_2.$$

К инвариантам могут быть также причислены ранги определителей A и A_{33}. Ранг определителя A не только ортогональный инвариант, но и проективный, ибо он остается неизменным при всяком проективном преобразовании (т. е. при всякой линейной однородной неособенной подстановке над x, y, z, t; см. Добавление, § 11).

250. Метрические инварианты в случае общих декартовых координат. Формулы, выражающие метрические свойства [1]) линии второго порядка, не должны зависеть от положения линии по отношению к системе декартовых координат, но они, вообще говоря, зависят от длин координатных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и угла ν между ними (т. е. от формы и размеров системы, но не от ее положения относительно линии).

Форма и размеры системы вполне характеризуются коэфициентами квадратичной формы (которую мы будем называть *основной метрической формой*)

$$g_{11}X^2 + 2g_{12}XY + g_{22}Y^2, \tag{1}$$

выражающей квадрат длины произвольного вектора $\mathbf{P}(X, Y)$; мы примевяем здесь обозначения § 56. Действительно, мы имеем (§ 55)

$$g_{11} = |\mathbf{u}|^2, \quad g_{22} = |\mathbf{v}|^2, \quad g_{12} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\nu, \tag{2}$$

что вполне определяет $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ и $\nu\,(0 < \nu < \pi)$, когда даны [2]) g_{11}, g_{22}, g_{12}.

В соответствии с этим, под *метрическими инвариантами* полинома $F(x, y)$ мы будем понимать функции

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, g_{11}, g_{12}, g_{22}),$$

зависящие от коэфициентов полинома F и от коэфициентов основной метрической формы (1), остающиеся неизменными при замене данной декартовой системы произвольной другой декартовой системой.

Мы найдем метрические инварианты, обобщающие ортогональные инварианты A, A_{33}, S и сводящиеся к этим последним в случае прямоугольной системы (т. е. когда $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$).

Заметим с этой целью следующее. При подстановке [ср. предыдущий параграф формулы (5а)]

$$x = l_1x' + l_2y' + \alpha t', \quad y = m_1x' + m_2y' + \beta t', \quad t = t' \tag{3}$$

форма $\Phi(x, y, t)$ переходит в форму $\Phi'(x', y', t')$; дискриминанты A и A' этих форм связаны соотношевием

$$A' = A\cdot\Delta^2 \tag{4}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \alpha \\ m_1 & m_2 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Подстановке (3) соответствует следующая подстановка для координат вектора:

$$\left.\begin{aligned} X &= l_1X' + l_2Y', \\ Y &= m_1X' + m_2Y'; \end{aligned}\right\} \tag{3а}$$

при этой подстановке форма (1) обращается в форму

$$g'_{11}X'^2 + \sqrt{2}g'_{12}X'Y' + g'_{22}Y'^2. \tag{1'}$$

---

[1]) Имеем в виду метрические свойства в узком смысле (§ 178).

[2]) g_{11}, g_{12}, g_{22} должны быть всегда задаваемы так, чтобы форма (1) была положительной. См. § 67, 2°.

Дискриминант

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{6}$$

формы (1) связан с дискриминантом G' формы (1′) соотношением

$$G' = G \cdot \Delta^2, \tag{7}$$

где Δ — тот же самый определитель, что и в (4), как это видно на основании (5). Из (4) и (7) следует:

$$\frac{A'}{G'} = \frac{A}{G},$$

т. е. $\frac{A}{G}$ есть метрический иввариант.

Точно так же докажем, что $\frac{A_{33}}{G}$, где A_{33} обозначает попрежнему дискриминант формы

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

есть инвариант при преобразованиях, не изменяющих начала координат.

Рассмотрим, наконец, форму

$$\varphi(x, y) - \lambda(g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2) =$$
$$= (a_{11} - \lambda g_{11})x^2 + 2(a_{12} - \lambda g_{12})xy + (a_{22} - \lambda g_{22})y^2.$$

На основании сказанного выше, отношение дискриминанта этой формы к G, т. е. отношение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda g_{11} & a_{12} - \lambda g_{12} \\ a_{21} - \lambda g_{21} & a_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} : G$$

есть инвариант при замене системы координат без изменения начала. Раскрывая определитель, получим после простых приведений, что это отношение равно

$$\lambda^2 - \lambda \frac{a_{11}g_{22} + a_{22}g_{11} - 2a_{12}g_{12}}{G} + \frac{A_{33}}{G}.$$

Так как предыдущее выражение инвариантно при всяких λ, то все коэфициенты при различных степенях λ — инварианты. Свободный член и коэфициенты при λ^2 не дают ничего нового. Остается еще один новый инвариант:

$$\frac{a_{11}g_{22} + a_{22}g_{11} - 2a_{12}g_{12}}{G}.$$

Итак, мы нашли три инварианта:

$$A^* = \frac{A}{G}, \quad A_{33}^* = \frac{A_{33}}{G}, \quad S^* = \frac{a_{11}g_{22} + a_{22}g_{11} - 2a_{12}g_{12}}{G}. \tag{8}$$

Инвариантность последних двух выражений доказана пока только при условии неизменности начала; но, очевидно, перенос начала вовсе не влияет на a_{11}, a_{12}, a_{22} и A_{33}; что же касается до g_{11}, g_{12}, g_{22}, то при их преобразовании мы пользуемся формулами (3а) для координат вектора, где положение начала вовсе не играет никакой роли.

В случае необобщенной декартовой (косоугольной) системы

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = \cos\nu, \quad g_{22} = 1,$$

$$G = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu \\ \cos\nu & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\nu$$

и инварианты (8) принимают вид

$$A^* = \frac{A}{\sin^2\nu}, \quad A_{33}^* = \frac{A_{33}}{\sin^2\nu}, \quad S^* = \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\nu}{\sin^2\nu}. \tag{9}$$

При $\nu = \frac{\pi}{2}$ эти инварнанты обращаются в ортогональные инварианты A, A_{33}, S.

251. Приложение: теоремы Аполлония. Пусть дан эллипс уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

в прямоугольных координатах Oxy. Взяв в качестве новых осей Ox', Oy' необобщенной системы два каких-либо сопряженных диаметра, получим уравнение вида (§ 234):

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - 1 = 0, \tag{1'}$$

изображающее ту же кривую. Полином в левой части (1') получается из полинома в левой части (1) заменой координат вида: $x = l_1x' + l_2y'$, $y = m_1x' + m_2y'$ без умножения результата на постоянный множитель; это следует из того, что свободные члены этих полиномов одинаковы.

Составляя инварианты

$$S^* = \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\nu}{\sin^2\nu}, \quad A_{33}^* = \frac{A_{33}}{\sin^2\nu}$$

для этих полиномов, получим два замечательных соотношения, связывающих длины полуосей a, b с длинами a', b' сопряженных полудиаметров[1]) и с углом ν между этими последними.

Действительно, для системы Ox, Oy имеем

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad a_{12} = 0, \quad \nu = \frac{\pi}{2},$$

и, следовательно,

$$S^* = S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad A_{33}^* = A_{33} = \frac{1}{a^2b^2}.$$

Для осей Ox', Oy' будем иметь аналогично

$$S^* = \left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}\right)\frac{1}{\sin^2\nu}, \quad A_{33}^* = \frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\nu}.$$

Приравнивая правые части, получим

$$a'^2b'^2\sin^2\nu = a^2b^2,$$

$$\frac{a'^2 + b'^2}{a'^2b'^2\sin^2\nu} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.$$

Последнее соотношение, в силу предпоследнего, дает

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

и, значит, мы имеем следующие соотношения

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2; \quad a'b'\sin\nu = ab. \tag{2}$$

Эти формулы выражают две следующие *теоремы Аполлония*.

1. *Сумма квадратов двух сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная* (равная сумме квадратов полуосей).

2. *Площадь параллелограма, построенного на двух сопряженных полу-*

[1]) То, что a', b' суть длины полудиаметров, направленных по Ox' и Oy' очевидно: полагая в (1') $y' = 0$, получим $x' = \pm a'$; аналогично и для b'.

диаметрах эллипса, есть величина постоянная (равная площади прямоугольника, построенного на двух полуосях).

Аналогичные теоремы имеем для гиперболы. Именно, путем, совершенно подобным предыдущему, получим формулы

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \quad a'b' \sin \nu = ab. \tag{3}$$

Значит, для гиперболы вторая теорема Аполлония формулируется точно так же, как для случая эллипса. Первая же заменяется следующей:

Разность квадратов двух сопряженных полудиаметров гиперболы есть величина постоянная (равная разности квадратов полуосей).

Замечания. Вторая теорема Аполлония для эллипса по существу совпадает с предложением, указанным в § 244, упр. 2.

Вторая же теорема Аполлония для гиперболы по существу совпадает с предложением, доказанным в конце § 245.

II. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

252. Преобразование к центру. Если линия второго порядка имеет центр (один или бесчисленное множество), то уравнение ее можно упростить, перенеся начало координат в центр (или один из центров). Именно, из § 228 мы знаем, что в уравнении линии относительно новой системы осей (с началом в центре) отсутствуют члены первой степени, и, значит, уравнение принимает вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0, \tag{1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} имеют те же значения, что и в исходном уравнении, а $a'_{33} = F(\alpha, \beta)$ (см. § 247).

Коэфициент a'_{33} очень легко также выразить через коэфициенты исходного уравнения в случае центральной линии (линии с одним определенным центром), т. е. когда

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0. \tag{2}$$

Действительно, мы знаем, что определитель, составленный из коэфициентов левой части исходного уравнения,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

есть инвариант, т. е. он равен аналогичному определителю, составленному из коэфициентов левой части уравнения (1). Но эта левая часть отличается от левой части исходного уравнения тем, что в левой части (1) величины a_{13} и a_{23} заменяются нулями, а a_{33} — величиной a'_{33}. Следовательно,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{33}A_{33},$$

откуда

$$a'_{33} = \frac{A}{A_{33}}. \tag{3}$$

Итак, если кривая, заданная уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

имеет определенный центр (т. е. $A_{33} \neq 0$), то уравнение той же линии после перенесения начала координат в центр, будет иметь вид

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0. \tag{4}$$

При выводе мы воспользовались свойством инвариантности величин A и A_{33} при преобразовании прямоугольных координат; однако легко показать, что результат остается справедливым и в случае декартовых координат общего вида.

Для этого достаточно в предыдущем выводе вместо A взять инвариант $A^* = \frac{A}{G}$; тогда вместо равенства $A = a'_{33}A_{33}$ мы получим

$$\frac{A}{G} = a'_{33}\frac{A_{33}}{G},$$

откуда снова следует формула (3).

Справедливость формулы (3) можно доказать и непосредственно, не пользуясь свойством инвариантности величины $\frac{A}{G}$ (или A, в случае прямоугольных координат).

Действительно, $a'_{33} = F(\alpha, \beta)$. Введем теперь вместо $F(x, y)$ квадратичную форму $\Phi(x, y, t)$, обращающуюся в $F(x, y)$ при $t = 1$. Подставляя в тождество

$$x\Phi_1 + y_2\Phi + t\Phi_3 = \Phi(x, y, t)$$

вместо x, y, t соответственно α, β, 1, где α, β координаты центра, и замечая, что

$$\Phi_1(\alpha, \beta, 1) = \Phi_2(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

получим

$$\Phi(\alpha, \beta, 1) = F(\alpha, \beta) = \Phi_3(\alpha, \beta, 1) = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}.$$

Но мы имеем [1])

$$\alpha = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \qquad \beta = \frac{A_{32}}{A_{33}} \tag{5}$$

и, значит,

$$a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33} = \frac{A_{31}a_{31} + A_{32}a_{32} + A_{33}a_{33}}{A_{33}} = \frac{A}{A_{33}},$$

откуда и следует искомый результат:

$$F(\alpha, \beta) = \frac{A}{A_{33}}. \tag{6}$$

Упражнения и дополнения

1. Найти центр линии

$$x^2 + 2y^2 - 4y = 0$$

и преобразовать ее уравнение к центру.

Ответ. Центр в точке (0, 1). Уравнение, преобразованное к центру, имеет вид

$$x'^2 + 2y'^2 - 2 = 0.$$

---

[1]) Эти формулы получаем, решая уравнения: $a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13} = 0$, $a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23} = 0$, определяющие положение центра.

2. Доказать инвариантность дискриминанта A (в прямоугольных координатах), исходя из формулы (6) и считая доказанной инвариантность A_{33}.

Доказательство. Будем считать сперва $A_{33} \neq 0$. Если вместо данной системы осей взять новую, полином $F(x, y)$ преобразуется в полином $F'(x', y')$, так что $F'(x', y') = F(x, y)$, если x, y и x', y' обозначают координаты одной и той же точки в различных системах. В частности, $F'(\alpha', \beta') = F(\alpha, \beta)$, где α, β и α', β' — суть координаты центра в старой и новой системах.

Следовательно, на основании формулы (6)

$$\frac{A'}{A'_{33}} = \frac{A}{A_{33}},$$

где A' и A'_{33} обозначают определители, составленные из коэфициентов выражения $F'(x', y')$ так же, как A и A_{33} составлены из коэфициентов выражения $F(x, y)$. Итак, отношение $\frac{A}{A_{33}}$ есть инвариант.

В случае прямоугольных координат, как мы знаем, величина A_{33} есть инвариант, значит, будет инвариантом и выражение $A_{33} \cdot \frac{A}{A_{33}} = A$.

Итак, мы доказали, что A есть инвариант при преобразовании прямоугольных координат. При доказательстве мы считали, что $A_{33} \neq 0$. Однако легко убедиться, что это ограничение не имеет значения.

Действительно, пусть $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. Заменим a_{12} величиною $a_{12} + \varepsilon$, где $\varepsilon \neq 0$ есть сколь угодно малая величина, оставив остальные коэфициенты неизменными. Тогда, очевидно, будем уже иметь $A_{33} \neq 0$, и значит, по доказанному, $A' = A$. В левой и правой частях мы имеем непрерывные функции (полиномы) от коэфициентов $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$, и соответственно $a_{11}, \ldots, a_{33}$; следовательно, равенство $A' = A$ остается справедливым, когда мы перейдем к пределу $\lim \varepsilon = 0$, а отсюда и вытекает наше утверждение.

253. Приведение квадратичной формы двух переменных к каноническому виду при помощи ортогональной подстановки. Мы видели, что путем переноса начала координат в центр (если таковой существует) можно уничтожить члены первой степени в полиноме $F(x, y)$.

Считая координаты прямоугольными, выясним теперь, какого упрощения можно добиться путем поворота осей.

Рассмотрим уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = C, \qquad (*)$$

где C — постоянная. Это уравнение представляет линию второго порядка, имеющую центр или прямую центров; действительно, ввиду отсутствия членов первой степени, начало координат является центром линии.

Будем сперва считать, что центр один ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$). Если повернуть систему осей так, чтобы одна из них совпала с одним из главных диаметров, то другая ось совпадет с другим главным диаметром и мы получим новое уравнение, где будет наверное отсутствовать член, содержащий произведение xy.

В случае, когда линия (*) имеет прямую центров, т. е. линия представляет собой пару параллельных прямых, мы получим тот же результат, если направим одну из осей по (единственному) диаметру. В этом случае (пары прямых) мы будем условно называть главным диаметром и (любую) прямую, перпендикулярную к диаметру в собственном смысле этого слова.

Итак, во всех случаях, если направить оси координат по главным диаметрам, в уравнении (*) исчезнет член с xy.

Мы докажем теперь это непосредственно. А именно мы докажем следующую *алгебраическую теорему*:

Путем поворота осей прямоугольных координат на подходящий угол, можно привести всякую квадратичную форму двух переменных x и y

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{1}$$

к каноническому виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2, \tag{2}$$

т. е. к квадратичной форме, содержащей только квадраты переменных; величины λ_1 и λ_2 обозначают постоянные, являющиеся корнями квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0. \tag{3}$$

Если a_{11}, a_{12}, a_{22} — действительные величины, то и λ_1, λ_2 будут действительными.

Эта теорема является частным случаем очень важной алгебраической теоремы о приведении, путем ортогональной подстановки, любой квадратичной формы к сумме квадратов [1]).

Мы видели (§ 247), что если новая ось Ox' составляет со старой Oy угол φ, то форма (1) преобразуется в следующую:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2, \tag{1a}$$

где, в частности,

$$a'_{12} = -\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\sin 2\varphi + a_{12}\cos 2\varphi.$$

Подобрав угол φ таким образом, чтобы $a'_{12} = 0$, т. е. полагая

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}, \tag{4}$$

мы получим форму требуемого вида (1), где

$$\lambda_1 = a'_{11}, \quad \lambda_2 = a'_{22};$$

величины λ_1 и λ_2 могут быть вычислены по формулам (12) § 247, куда вместо φ следует подставить значение, определяемое уравнением (4).

Правая часть уравнения (4) будет неопределенной только в том случае, если $a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22}$. В этом случае форма (1) имеет с самого начала вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = \lambda(x^2 + y^2),$$

где $\lambda = a_{11} = a_{22}$ и сохраняет этот вид при всяком угле φ.

Во всех остальных случаях уравнение (4) определяет четыре возможных направления оси Ox', которые расположены на двух взаимно пер-

[1]) Формулировку общего предложения см. в Добавлении, § 15.

пендикулярных прямых. Действительно, если φ есть один из углов [например острый[1])], удовлетворяющих условию (4), то другие возможные углы будут $\varphi+\frac{\pi}{2}$, $\varphi+\pi$, $\varphi+\frac{3\pi}{2}$ и всякие другие, отличающиеся от указанных на кратное 2π.

Взяв в качестве угла φ какой-либо из четырех упомянутых, получим вполне определенные направления новых осей Ox' и Oy' и, по формулам (12) § 247, вполне определенные значения для λ_1 и λ_2.

Однако величины λ_1 и λ_2 можно вычислить и проще. Мы знаем, что

$$S=a_{11}+a_{22}=a'_{11}+a'_{22},\quad A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}.$$

Замечая же, что

$$a'_{11}=\lambda_1,\quad a_{22}=\lambda_2,\quad a'_{12}=0,$$

получим

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2&=a_{11}+a_{22}=S,\\ \lambda_1\lambda_2&=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=A_{33},\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

откуда и следует, что λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения (3), как и было сказано в формулировке теоремы.

То обстоятельство, что λ_1 и λ_2 действительные числа, если только a_{11}, a_{12}, a_{22} — действительные, непосредственно вытекает из формул (12) § 247, а также из того, что

$$\begin{aligned}S^2-4A_{33}&=(a_{11}+a_{22})^2-4\,(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=\\&=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geqslant 0;\end{aligned}\qquad(6)$$

откуда следует, что корни уравнения (3) — действительные.

Для того чтобы определить, какой из двух корней уравнения (3) нужно взять в качестве λ_1, а какой в качестве λ_2, обратимся снова к формулам (12) § 247. Вычитая вторую из них из первой, получим

$$\begin{aligned}a'_{11}-a'_{22}&=(a_{11}-a_{22})\cos 2\varphi+2a_{12}\sin 2\varphi=\\&=2a_{12}\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}\cos 2\varphi+\sin 2\varphi\right).\end{aligned}$$

Замечая далее, что

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{1}{\operatorname{tg}2\varphi}=\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi},$$

и что

$$a'_{11}=\lambda_1,\quad a'_{22}=\lambda_2,$$

получим

$$\lambda_1-\lambda_2=\frac{2a_{12}}{\sin 2\varphi}.\qquad(7)$$

Эта формула и определяет вполне выбор обозначения корней. Если,

[1]) Так как $\operatorname{tg}2\varphi$ принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$ при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то всегда можно найти острый угол φ, удовлетворяющий условию (4).

например, мы считаем угол φ острым, то знак $\lambda_1 - \lambda_2$ должен совпадать со знаком a_{12}.

254. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка. После сказанного в предыдущих параграфах задача упрощения уравнения второго порядка решается весьма просто.

Начнем со случая центральной линии, т. е. такой, что

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0. \tag{1}$$

Перенося начало координат в центр $C(\alpha, \beta)$ линии, т. е. полагая $x = \alpha + x'$, $y = \beta + y'$, приведем уравнение данной линии к виду (§ 252)

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0. \tag{2}$$

Взяв, далее, вместо системы осей $Cx'y'$ систему $C\xi\eta$, ось $C\xi$ которой составляет с осью Cx' угол φ, определяемый уравнением

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \tag{3}$$

приведем уравнение (2) к виду

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + k = 0, \tag{4}$$

где для краткости положено

$$k = \frac{A}{A_{33}}, \tag{5}$$

а λ_1 и λ_2 суть корни уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0. \tag{6}$$

Так как, по условию, $A_{33} \neq 0$, то ни один из корней λ_1 и λ_2 не равен нулю. Рассмотрим теперь все возможные случаи комбинаций знаков коэфициентов уравнения (4).

Первый случай: $k \neq 0$, т. е. $A \neq 0$.

Этот случай разбивается, в свою очередь, на следующие:

1а) λ_1, λ_2 и k одного знака. Тогда мы можем написать:

$$\frac{\lambda_1}{k} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\lambda_2}{k} = \frac{1}{b^2}$$

и уравнение (4), по разделении на k, примет вид

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Это — уравнение *мнимого эллипса*.

Посмотрим, какими соотношениями между коэфициентами исходного уравнения характеризуется этот случай. На основании (6), для того чтобы λ_1 и λ_2 были одного знака, необходимо и достаточно условие $A_{33} > 0$.

Далее, при последнем условии знак k будет, в силу (5), совпадать со знаком A, а знак λ_1 и λ_2 со знаком $S = a_{11} + a_{22}$, ибо $\lambda_1 + \lambda_2 = S$.

Итак, случай 1а (*мнимый эллипс*) *характеризуется условиями*

$$A \neq 0, \quad A_{33} > 0, \quad A \text{ и } S \text{ одного знака.}$$

1b) λ_1, λ_2 одного знака, противоположного знаку k.
В этом случае, полагая

$$\frac{\lambda_1}{k} = -\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\lambda_2}{k} = -\frac{1}{b^2},$$

приведем уравнение (3) к виду

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Мы получаем, таким образом, нормальное уравнение действительного эллипса. Аналогично предыдущему убедимся, что *случай* 1b (*действительный эллипс*) *характеризуется следующими условиями*:

$$A \neq 0, \quad A_{33} > 0, \quad A \text{ и } S \text{ различных знаков.}$$

Уже раньше мы видели, что условия $A \neq 0$, $A_{33} > 0$ характеризуют эллипс. Теперь мы научились различать случаи действительного и мнимого эллипсов.

1c) λ_1 и λ_2 различных знаков. В этом случае можно написать

$$\frac{\lambda_1}{k} = \mp\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\lambda_2}{k} = \pm\frac{1}{b^2}$$

(одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки), и уравнение (4) примет вид

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = \pm 1.$$

Мы получили нормальное уравнение гиперболы. *Случай гиперболы характеризуется условиями*, которые мы знали и раньше:

$$A \neq 0, \quad A_{33} < 0.$$

Второй случай: $k = 0$, т. е. $A = 0$.
Здесь могут представиться два более частных случая:
2a) λ_1 и λ_2 одного знака. В этом случае можно положить:

$$\lambda_1 = \pm k_1^2, \quad \lambda_2 = \pm k_2^2$$

и уравнение (3) принимает вид

$$k_1^2\xi^2 + k_2^2\eta^2 = 0.$$

Это уравнение представляет совокупность двух мнимых сопряженных прямых

$$k_1\xi + ik_2\eta = 0,$$
$$k_1\xi - ik_2\eta = 0.$$

Рассматриваемый случай характеризуется условиями, которые мы получили и раньше

$$A = 0, \quad A_{33} > 0.$$

2b) λ_1 и λ_2 различных знаков. В этом случае, очевидно, уравнение (4) принимает вид

$$k_1^2\xi^2 - k_2^2\eta^2 = 0,$$

или

$$(k_1\xi + k_2\eta)(k_1\xi - k_2\eta) = 0;$$

значит, наша линия есть совокупность двух (действительных) пересекающихся прямых

$$k_1\xi + k_2\eta = 0 \quad \text{и} \quad k_1\xi - k_2\eta = 0.$$

Этот случай характеризуется условиями, уже известными нам раньше:

$$A = 0, \quad A_{33} < 0.$$

255. Упрощение уравнения линии без определенного центра. Нам остается рассмотреть случай, когда коэфициенты уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

удовлетворяют соотношению, характеризующему параболический тип

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \qquad (2)$$

В этом случае линия или вовсе не имеет центра (имеет несобственный центр), или же имеет прямую центров.

Начнем с поворота осей, для того чтобы привести квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ к каноническому виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

(§ 253). Для этого, как мы знаем, следует повернуть координатные оси на угол φ, определяемый равенством

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \qquad (3)$$

Величины же λ_1 и λ_2 будут корнями квадратного уравнения $\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0$, которое, в силу (2), принимает вид: $\lambda^2 - S\lambda = 0$; следовательно, можно взять $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = S$, и тогда уравнение (1) примет вид (мы знаем, что при повороте осей свободный член не изменяется):

$$Sy'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \qquad (4)$$

Из предыдущего следует, между прочим, что в рассматриваемом случае $S \neq 0$, так как иначе уравнение не было бы второго порядка.

Прежде чем перейти к дальнейшим упрощениям, заметим, что уравнение (4) можно получить и иным путем, более удобным на практике.

Мы можем считать, что $a_{11} \neq 0$, ибо если $a_{11} = 0$, то, в силу (2), будет $a_{12} = 0$, и уравнение уже имеет требуемый вид.

Итак, пусть

$$a_{11} \neq 0.$$

Тогда мы можем написать

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}^2x^2 + 2a_{12}a_{11}xy + a_{11}a_{22}y^2) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}^2x^2 + 2a_{12}a_{11}xy + a_{12}^2y^2) =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y)^2,$$

и уравнение (1) перепишется так:

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x+a_{12}y)^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \tag{5}$$

Чтобы привести это уравнение к виду (4), достаточно, очевидно, так повернуть оси координат, чтобы новая ось Ox' совпала с прямою $a_{11}x+a_{12}y=0$, ибо в таком случае мы будем иметь

$$a_{11}x+a_{13}y=ky', \tag{6}$$

где k — постоянная (§ 99). При повороте осей на угол φ имеем

$$y'=-x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

Мы должны подобрать φ согласно условию (6), которое дает

$$a_{11}x+a_{12}y=k(-x\sin\varphi+y\cos\varphi),$$

откуда

$$k\sin\varphi=-a_{11},\quad k\cos\varphi=a_{12}.$$

Возводя в квадрат и складывая, получим

$$k^2=a_{11}^2+a_{12}^2=a_{11}^2+a_{11}a_{22}=a_{11}S,$$

т. е.

$$k=\pm\sqrt{a_{11}S} \tag{7}$$

и

$$\cos\varphi=\frac{a_{12}}{\pm\sqrt{a_{11}S}},\qquad \sin\varphi=\frac{-a_{11}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}, \tag{8}$$

где перед радикалами следует брать либо верхние, либо нижние знаки. Вместо формул (8) можно пользоваться и следующей

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}. \tag{9}$$

Последняя часть приписана на основании равенства

$$a_{11}a_{22}=a_{12}^2.$$

Читателю предоставляется доказать, что формула (3) есть следствие формул (8) или (9).

Найдя таким образом $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и подставляя в (5) вместо x, y их выражения через x', y', получим, принимая во внимание (6):

$$\frac{k^2}{a_{11}}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a_{33}=0,$$

где согласно формулам (11а) § 247

$$\left.\begin{aligned} a'_{13}&=a_{13}\cos\varphi+a_{23}\sin\varphi=\frac{a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}=\frac{A_{32}}{\pm\sqrt{a_{11}S}},\\ a'_{23}&=-a_{13}\sin\varphi+a_{23}\cos\varphi=\frac{a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Замечая, далее, что $k^2=a_{11}S$, получим снова уравнение (4).

Для коэфициента a'_{13} можно найти еще другое выражение, исходя непосредственно из уравнения данной линии. Действительно, составляя инвариант A для левой части уравнения (4), будем иметь:

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & S & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix}=-Sa'^2_{13},$$

откуда [1])

$$a'_{13}=\pm\sqrt{-\frac{A}{S}}. \tag{11}$$

Сравнение (10) и (11) показывает, между прочим, что $A^2_{32}=-a_{11}A$; это равенство можно доказать и непосредственно (оно справедливо только при условии $A_{33}=0$).

Рассмотрим теперь отдельно два случая.

Первый случай: $A\neq 0$ (*парабола*).

Тогда на основаиии (11) $a'_{13}\neq 0$ и мы можем, путем переноса начала координат в подходящую точку (α, β), уничтожить в левой части уравнения (4) третий и четвертый члены. Действительно, полагая

$$x'=\alpha+\xi, \quad y'=\beta+\eta,$$

мы приведем уравнение (4) к виду

$$S\eta^2+2a'_{13}\xi+2(S\beta+a'_{23})\eta+S\beta^2+2a'_{13}\alpha+2a'_{23}\beta+a_{33}=0,$$

или

$$S\eta^2+2a'_{13}\xi+2(S\beta+a'_{23})\eta+(S\beta+a'_{23})\beta+2a'_{13}\alpha+a'_{23}\beta+a_{33}=0.$$

Достаточно выбрать α и β так, чтобы $S\beta+a'_{23}=0$, $2a'_{13}\alpha+a'_{23}\beta+a_{33}=0$, т. е.

$$\beta=-\frac{a'_{23}}{S}, \quad \alpha=-\frac{1}{2a'_{13}}\left(a_{33}-\frac{a'^2_{23}}{S}\right), \tag{12}$$

чтобы уравнение приняло требуемый вид

$$S\eta^2+2a'_{13}\xi=0.$$

Деля обе части на S, можно переписать это уравнение и так

$$\eta^2=2P\xi, \tag{13}$$

где положено: $P=\frac{-a'_{13}}{S}$. Мы видим, что параметр p нашей параболы равен $|P|$; а именно, при $P>0$, $p=P$ есть, очевидно, параметр. При $P<0$ можно, меняя направление оси ξ на обратное, т. е. заменяя ξ на $-\xi$, придать уравнению вид: $\eta^2=-2P\xi$ или $\eta^2=2p\xi$, где $p=-P>0$.

---

[1]) Из формулы (11) вытекает, что в рассматриваемом случае ($A_{33}=0$) инварианты A и S должны иметь противоположные знаки.

Это нетрудно доказать и непосредственно.

Легко выразить параметр p через инварианты A и S. Именно, на основании (11) из формулы $P=-\frac{a'_{13}}{S}$ вытекает

$$p=|P|=+\sqrt{-\frac{A}{S^3}} \tag{14}$$

(как уже было отмечено, под корнем у нас положительная величина).

Ось ξ является осью симметрии параболы, а новое начало — вершиной.

Теперь ясен геометрический смысл преобразований, которые были произведены: при первом преобразовании ось Ox' была направлена параллельно оси параболы, при втором — начало координат было перенесено в вершину ее.

Второй случай: $A=0$ (*пара параллельных прямых*).

В этом случае $a'_{13}=0$ и уравнение (4) принимает вид

$$Sy'^2+2a'_{23}y'+a_{33}=0,$$

или, перенося начало координат в точку (α, β), т. е. полагая $x'=\alpha+\xi$, $y'=\beta+\eta$:

$$S\eta^2+2(S\beta+a'_{23})\eta+S\beta^2+2a'_{23}\beta+a_{33}=0.$$

Полагая

$$S\beta+a'_{23}=0,$$

т. е.

$$\beta=-\frac{a'_{23}}{S},$$

и выбрав α произвольно (например $\alpha=0$), приведем уравнение к виду

$$S\eta^2+k=0, \tag{15}$$

где

$$k=a_{33}-\frac{a'^2_{23}}{S}.$$

Это — простейшее уравнение пары параллельных прямых.

Если S и k одного знака, то прямые мнимые. Если же эти величины различных знаков, то прямые действительные и различные. При $k=0$ имеем случай двух совпадающих прямых.

256. Второй способ упрощения уравнения совокупности двух параллельных прямых. Условный инвариант. В случае, когда

$$A=0, \quad A_{33}=0,$$

т. е. когда наша линия есть совокупность двух параллельных прямых, мы можем сразу написать уравнение этих прямых. А именно, как было показано в § 225а, эти прямые имеют уравнения

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\pm\sqrt{-A_{22}}=0, \tag{1}$$

или

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\pm\sqrt{-A_{11}}=0. \tag{2}$$

Если $a_{11} \neq 0$, то пригодны уравнения (1); если $a_{22} \neq 0$, то пригодны уравнения (2). Если обе величины a_{11} и a_{22} не равны нулю, то пригодны оба вида.

Эти уравнения пригодны и для случая общих декартовых координат.

Вернемся к случаю $a_{11} \neq 0$. Легко найти расстояние между параллельными прямыми (1) в том случае, когда они действительны, т. е. $A_{22} < 0$.

Будем считать координаты прямоугольными. Расстояния начала координат до прямых (1) даются соответственно формулами:

$$h_1 = \frac{a_{13} + \sqrt{-A_{22}}}{\pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}, \qquad h_2 = \frac{a_{13} - \sqrt{-A_{22}}}{\pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

Перед радикалами в знаменателях мы должны взять, в обеих формулах, одинаковые знаки, если условимся считать, что h_1 и h_2 одного знака, когда прямые находятся по одну сторону от начала координат, и разных знаков, когда прямые находятся от начала координат по разные стороны. Значит, расстояние h между прямыми равно $|h_2 - h_1|$, т. е.

$$h = \frac{2\sqrt{-A_{22}}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

Вспоминая, что $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, будем иметь

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{11}(a_{11} + a_{22}) = a_{11}S,$$

откуда

$$h^2 = \frac{-4A_{22}}{a_{11}S}. \tag{3}$$

Если $a_{22} \neq 0$, то совершенно аналогично, на основании формул (2), получим

$$h^2 = \frac{-4A_{11}}{a_{22}S}. \tag{4}$$

Если $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, то имеют место обе формулы (3) и (4), откуда следует

$$h^2 = -\frac{4A_{22}}{a_{11}S} = -\frac{4A_{11}}{a_{22}S} = \frac{-4A_{22} - 4A_{11}}{a_{11}S + a_{22}S},$$

или

$$h^2 = -\frac{4(A_{11} + A_{22})}{S^2}. \tag{5}$$

Последняя формула остается, очевидно, справедливой и тогда, когда одна из величин a_{11}, a_{22} равна нулю [1]).

Так как величина h^2 не зависит от выбора осей координат, то правая часть формулы (5) есть инвариант (при прямоугольных координатах); так как, далее, S есть инвариант, то приходим к следующему заключению:

Выражение

$$H = A_{11} + A_{22} \tag{6}$$

---

[1]) Действительно, если, например, $a_{11} = 0$, то, как мы видели выше (конец § 225а), и $A_{22} = 0$, и формула (5) дает

$$h^2 = -\frac{4A_{11}}{S^2} = -\frac{4A_{11}}{a_{22}^2},$$

т. е. то же, что формула (4), ибо в нашем случае $S = a_{22}$.

есть инвариант (в прямоугольных координатах), если соблюдены условия

$$A = A_{33} = 0, \tag{7}$$

или эквивалентные им условия (§ 225а):

$$A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0, \tag{8}$$

характеризующие случай распадения даниой линин на совокупность двух параллельиых прямых.

При выводе выражения для h мы предполагали, что наша линия распадается на две действительные прямые (т. е. что $A_{22} < 0$. соответственно, $A_{11} < 0$). Но легко убедиться, что это ограниченне может быть отброшено без нарушения справедливости результата относнтельно инвариантности величины

$$H = A_{11} + A_{22}.$$

В инвариантности величины H при условиях (7) также легко убедиться непосредственно.

Ввиду того что величина H является инвариантом только при ограничительных условнях (7) или, что то же (8), она называется *условным инвариантом.*

Пользуясь величиной H, легко вычислить величину k, входяшую в упрощенное уравнение $S\eta^2 + k = 0$. А именно, для функции $S\eta^2 + k$ имеем $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{22} = S$, $a_{33} = k$, откуда

$$A_{11} = Sk, \quad A_{22} = 0.$$

Следовательно,

$$H = Sk$$

и

$$k = \frac{H}{S}. \tag{9}$$

Заметим, наконец, что прямые, на которые распадается данная линия, будут мнимымн, если $H > 0$, действительными, если $H < 0$, совпадающими, если $H = 0$. Это следует из уравнения наших прямых

$$\eta^2 + \frac{k}{S} = 0,$$

или

$$\eta^2 + \frac{H}{S^2} = 0.$$

257. Сводка результатов. 1. Аффинная классификация линий второго порядка. Резюмируем результаты трех предыдущих параграфов. Результаты эти касаются:

1) Аффинной классификации линий второго порядка и способа определения по уравнению линии, характера этой линии (действительный эллипс, мнимый эллипс, гипербола, парабола, совокупность двух непараллельных мнимых прямых, совокупность двух непараллельных действительных прямых, совокупность двух параллельных прямых, действительных или мнимых); эта классификация была дана еще раньше (§ 225, 234, 235), но мы тогда не имели простых правил для распознавания, по виду уравнения, действительных и мнимых линий.

2) Способа определения метрических элементов, характеризующих форму и размеры линии, по ее уравнению.

3) Способа определения положения линии на плоскости Oxy.

Начнем с вопроса классификации.

Пусть дано уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{1}$$

Характер линии, представляемой этим уравнением, определяется следующими величинами, являющимися инвариантами при преобразовании прямоугольных координат:

$$\left.\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \\ S &= a_{11} + a_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Прежде всего имеем следующие общие положения:

1. Линия второго порядка распадается на две прямых (действительных или мнимых) тогда и только тогда, когда $A = 0$.

2. Неравенство $A_{33} > 0$ характеризует „эллиптический тип" линии (эллипс; мнимый эллипс; совокупность двух непараллельных сопряженных мнимых прямых).

3. Неравенство $A_{33} < 0$ характеризует „гиперболический тип" (гипербола, совокупность двух пересекающихся действительных прямых).

4. Равенство $A_{33} = 0$ характеризует линии „параболического типа" (парабола, совокупность двух параллельных прямых, действительных или мнимых). Эти же линии характеризуются отсутствием определенного центра: центра или нет (парабола) или имеется прямая центров (параллельные прямые).

Детальная сводка дается в следующей таблице:

I. $A \neq 0$.	II. $A = 0$.
Нераспадающаяся линия второго порядка.	Совокупность двух прямых.
1a) $A_{33} > 0$, A и S одного знака: мнимый эллипс.	1) $A_{33} > 0$: совокупность двух мнимых непараллельных сопряженных прямых.
1b) $A_{33} > 0$, A и S различных знаков: эллипс.	
2) $A_{33} < 0$: гипербола.	2) $A_{33} < 0$: совокупность двух действительных непараллельных прямых.
3) $A_{33} = 0$: парабола.	3) $A_{33} = 0$: совокупность параллельных прямых (действительных, мнимых, различных или совпадающих).

В последнем случае правого столбца ($A = A_{33} = 0$) для того, чтобы различить, имеем ли мы действительные и различные, мнимые или совпадающие [1]) прямые, можно, на основании сказанного в предыдущем параграфе, пользоваться следующим правилом. При $a_{11} \neq 0$, прямые будут действительными и различными, если $A_{22} < 0$; совпадающими, если $A_{22} = 0$; мнимыми, если $A_{22} > 0$. При $a_{11} = 0$ применяется то же правило, с заменой A_{22} на A_{11}.

[1]) Совпадающие прямые всегда действительные (мы, как всегда, предполагаем, что коэфициенты уравнения линии — действительные).

Вместо этого можно воспользоваться условным инвариантом $H = A_{11} + A_{22}$: при $H < 0$ прямые действительны и различны; при $H = 0$ они совпадают; при $H > 0$ прямые мнимые.

Хотя некоторые из приведенных в этом параграфе результатов получены нами для прямоугольных координат, *они остаются в силе и для декартовых координат общего вида.*

Действительно, пусть уравнение (1) относится к непрямоугольной системе. Рассмотрим наряду с данной линией другую, имеющую то же уравнение (1), но относительно прямоугольной системы. Эта новая линия является, очевидно, результатом аффинного преобразования данной. Поэтому обе линии имеют одинаковый характер в том смысле, в каком мы это рассматриваем в этом параграфе. С другой стороны, ко второй линии применимы все изложенные результаты. Отсюда и следует наше утверждение.

258. Сводка результатов. 2. Определение формы и размеров линии второго порядка по ее уравнению. Мы видели, как можно выяснить характер линии (эллипс, гипербола и пр.) по ее уравнению. Приступим теперь к вычислению элементов, характеризующих форму и размеры линии. Из сказанного выше следует, что за исключением случая, когда линия распадается на две параллельные прямые, элементы эти вполне характеризуются теми же инвариантами (мы считаем координаты прямоугольными)

$$A, \quad A_{33}, \quad S.$$

А именно, из сказанного в § 254—256 непосредственно вытекают следующие положения:

1. *В случае эллипса и гиперболы* для определения полуосей a, b достаточно решить квадратное уравнение

$$\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0. \tag{1}$$

Если λ_1 и λ_2 суть корни этого уравнения (они будут необходимо действительными), то:

а) *В случае действительного эллипса*:

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}}, \quad b^2 = -\frac{A}{\lambda_2 A_{33}}. \tag{2}$$

Будем считать, что $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|$. Тогда a будет большой полуосью, а b — малой. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то будем иметь окружность.

b) *В случае гиперболы*, считая, что

$$-\frac{A}{\lambda_1 A_{33}} > 0, \quad \frac{A}{\lambda_2 A_{33}} > 0, \tag{3}$$

будем иметь

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}}, \quad b^2 = \frac{A}{\lambda_2 A_{33}}, \tag{4}$$

где a и b — соответственно продольная и поперечная полуоси.

2. Угол 2α между асимптотами гиперболы можно определить следующим образом. Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \sqrt{-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2^2}} = \frac{\sqrt{-A_{33}}}{|\lambda_2|}, \tag{5}$$

где λ_2 есть один из корней уравнения (1). Если под 2α подразумевать именно тот угол, внутри которого заключена гипербола (а не смежный), λ_2 следует выбрать согласно условию (3).

Вместо формулы (5) можно пользоваться также более симметричной, которая получается так. Имеем

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

или, замечая, что $\lambda_1 + \lambda_2 = S$, $\lambda_2 - \lambda_1 = \pm\sqrt{S^2 - 4A_{33}}$,

$$\cos 2\alpha = \frac{S}{\pm\sqrt{S^2 - 4A_{33}}}. \tag{6}$$

Очевидно, $\cos 2\alpha > 0$, когда $a > b$ ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$), и $\cos 2\alpha < 0$, когда $a < b$ ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$). Так как $S = \lambda_1 + \lambda_2$ имеет знак того из чисел λ_1, λ_2, которое больше по абсолютной величине, то легко убедиться, что перед корнем всегда следует ставить знак числа λ_2.

Мы видим, что, как и следовало ожидать, угол между асимптотами зависит исключительно от коэфициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} первых трех членов уравнения линии.

3. Если линия распадается на две действительные пересекающиеся прямые, то угол между этими прямыми дается той же формулой (6), что предоставляется доказать читателю (способом, совершенно аналогичным предыдущему).

4. В случае параболы параметр ее p определяется по формуле

$$p = \sqrt{-\frac{A}{S^3}}.$$

5. Если линия распадается на совокупность двух параллельных прямых, то расстояние h между этими прямыми уже не может быть выражено через инварианты A, A_{33}, S (из которых первые два обращаются в нуль). Но расстояние это выражается через инвариант S и *условный инвариант* H по формуле (§ 256):

$$h^2 = -\frac{4H}{S^2}.$$

259. Сводка результатов. 3. Приведение уравнения к нормальному виду и определение положения линии на плоскости. Если кроме формы и размеров линии, заданной уравнением относительно данной прямоугольной системы[1]) Oxy требуется определить и ее положение на плоскости, то, очевидно, достаточно найти положение тех новых прямоугольных осей ξ, η, относительно которых уравнение принимает один из указанных выше простейших видов. Совершенно ясно, что положение этих новых осей (т. е. положение линии на плоскости Oxy) уже не может быть определено исключительно при помощи инвариантов, ибо инварианты как раз и обладают тем свойством, что не зависят от положения линии относительно осей координат.

Рассмотрим отдельно случаи центральной линии и линии без определенного центра.

1. Для приведения уравнения *центральной линии* к каноническому виду

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \tag{1}$$

[1]) Если линия отнесена не к прямоугольной системе, то достаточно предварительно перейти к какой-нибудь прямоугольной системе.

следует перенести начало координат в центр C линии, определяемый как точка пересечения прямых

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0, \quad a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0,$$

и затем взять систему осей $C\xi\eta$, ось $C\xi$ которой составляет с осью Ox угол φ, определяемый формулой

$$\operatorname{tg} 2\varphi=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}. \tag{2}$$

Если φ_0 есть острый положительный угол, удовлетворяющий этому условию, то для угла φ, в пределах 0, 2π, получим четыре значения:

$$\varphi=\varphi_0, \quad \varphi=\varphi_0+\frac{\pi}{2}, \quad \varphi=\varphi_0+\pi, \quad \varphi=\varphi_0+\frac{3\pi}{2}.$$

Ось $C\xi$ будет одной из осей симметрии, а $C\eta$ — другой.

Если мы хотим направить ось $C\xi$ по большой оси эллипса (или по продольной оси гиперболы), то, выбрав λ_1 и λ_2 соответственно условию $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ (для случая эллипса) или же соответственно условию (3) предыдущего параграфа (в случае гиперболы), подчиняем угол φ еще условию (см. конец § 253):

$$\sin 2\varphi=\frac{2a_{12}}{\lambda_1-\lambda_2} \tag{3}$$

(важен только знак правой части). Этому дополнительному условию удовлетворяют только два из указанных выше четырех значений φ, а именно φ_0 и $\varphi_0+\pi$, или $\varphi_0+\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_0+\frac{3\pi}{2}$. Эти два значения дают два взаимно противоположных направления оси $C\xi$.

2. Для приведения уравнения *параболы*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{4}$$

к нормальному виду, поступаем следующим образом.

Считая $a_{11}\neq 0$ и принимая во внимание, что $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$, переписываем уравнение в виде

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x+a_{12}y)^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0; \tag{5}$$

затем поворачиваем систему осей, направив новую ось Ox' по прямой $a_{11}x+a_{12}y=0$. Для этого угол поворота φ следует подчинить условию

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}. \tag{6}$$

Это условие дает для φ два возможных значения; если одно из них есть φ_0, то другое будет $\varphi_0+\pi$.

Вместо формулы (6) можно пользоваться формулами, вытекающими из нее:

$$\cos\varphi=\frac{a_{12}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}, \quad \sin\varphi=\frac{-a_{11}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}. \tag{6a}$$

Если в (5) подставить вместо x и y их выражения через новые координаты:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$

то оно приведется к виду

$$Sy'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0, \tag{4a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a'_{13} &= a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi = \frac{A_{32}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}, \\ a'_{23} &= -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi = \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{\pm\sqrt{a_{11}S}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Далее, перенося начало координат в точку (α, β), где

$$\alpha = -\frac{1}{2a'_{13}}\left(a_{33} - \frac{a'^2_{23}}{S}\right), \quad \beta = -\frac{a'_{23}}{S}, \tag{8}$$

приведем уравнение к виду

$$\eta^2 = 2P\xi,$$

где

$$P = -\frac{a'_{13}}{S} = \pm\sqrt{-\frac{A}{S^2}}. \tag{9}$$

Если мы хотим, чтобы ось ξ была направлена в ту сторону, в которую обращена вогнутость параболы, надо в формулах (6а) взять такой знак перед радикалом, чтобы величина a'_{13} имела знак, противоположный знаку S.

В случае, когда $a_{11} = 0$, будем иметь также $a_{12} = 0$, и уравнение (4) с самого начала имеет вид (4а).

3. Наконец, в случае, когда линия распадается на две параллельные прямые, уравнения этих прямых даются формулами:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \pm \sqrt{-A_{22}} = 0 \tag{10}$$

(если $a_{11} \neq 0$) или

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \pm \sqrt{-A_{11}} = 0 \tag{10a}$$

(если $a_{22} \neq 0$).

Упражнения к § 254–259

(Координаты прямоугольные)

1. Определить форму линии

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 8y + 6 = 0.$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad S = 3.$$

Так как $A_{33} > 0$, то линия эллиптического типа, и так как A и S различных знаков, то она — действительный эллипс. Для определения полуосей решаем квадратное уравнение

$$\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Полуоси a и b даются формулами:

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}} = \frac{4}{3 - \sqrt{5}} = 3 + \sqrt{5}, \quad b^2 = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} = 3 - \sqrt{5}.$$

2. Определить форму линии

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad S = 2.$$

Так как $A \neq 0$, $A_{33} < 0$, то кривая — гипербола. Для определения полуосей решаем уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Полуоси даются формулами:

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}} = 3, \quad b^2 = \frac{A}{\lambda_2 A_{33}} = 1.$$

3. Определить форму линии

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - x + 2 = 0.$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -\frac{1}{2} \\ 6 & 9 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}, \quad A_{33} = 0, \quad S = 13.$$

Так как $A \neq 0$, $A_{33} = 0$, то линия — парабола. Параметр ее

$$p = \sqrt{-\frac{A}{S^3}} = \frac{3}{26\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{338}.$$

4. Определить форму линии

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 + 3x + 2y = 0.$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = -\frac{1}{4}, \quad S = 5.$$

Так как $A=0$, то линия распадается на две прямых; так как $A_{33}<0$, то эти прямые действительные, пересекающиеся на конечном расстоянии.

Угол 2α между этими прямыми можно определить по формуле (6) § 258

$$\cos 2\alpha = \frac{S}{\sqrt{S^2 - 4A_{33}}} = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

5. Определить форму линии

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y - 8 = 0.$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -10 & 2 \\ -10 & 25 & -5 \\ 2 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{33} = 0.$$

Следовательно, мы имеем совокупность двух параллельных прямых. Чтобы найти эти прямые, переписываем данное уравнение так:

$$(2x - 5y + 1)^2 - 9 = 0,$$

откуда получаем уравнения двух параллельных прямых

$$2x - 5y + 4 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - 5y - 2 = 0.$$

Расстояние h между этими прямыми дается формулой

$$h = \frac{6}{\sqrt{29}}.$$

6. Определить форму линии

$$10x^2 + 6xy + 12y^2 + 40 = 0.$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 4440, \quad A_{33} = 111, \quad S = 22.$$

Так как $A_{33}>0$ и A одного знака с S, то линия мнимая (мнимый эллипс).

7. Определить форму линии

$$10x^2 + 6xy + 12y^2 = 0.$$

Решение. Имеем

$$A = 0, \quad A_{33} = 111.$$

Так как $A=0$, то мы имеем совокупность двух прямых; так как $A_{33}>0$, то эти прямые — мнимые (пересекающиеся в действительной точке $x=0$, $y=0$).

8. Найти положение эллипса из упражнения 1 на плоскости.

Решение. Координаты центра определяются из уравнений

$$x + y - 2 = 0, \quad x + 2y - 4 = 0,$$

откуда

$$x = 0, \quad y = 2.$$

Угол φ, который большая ось эллипса составляет с осью Ox, определяется из формулы

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2}{1-2} = -2,$$

при добавочном условии $\sin 2\varphi < 0$, ибо

$$\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{2}{-\sqrt{5}} < 0.$$

Считая 2φ заключенным между 0 и 2π, видим, что 2φ заключается в четвертой четверти.

9. Найти положение параболы из упражнения 3 на плоскости.

Решение [1]). Переписываем уравнение параболы так:

$$(2x+3y)^2 - x + 2 = 0.$$

Далее, поворачиваем оси координат таким образом, чтобы

$$2x+3y = ky' = k(-x\sin\varphi + y\cos\varphi),$$

откуда

$$-k\sin\varphi = 2,\quad k\cos\varphi = 3,\quad k^2 = 13,\quad k = \sqrt{13}\quad \text{(берем знак +)},$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}},\quad \sin\varphi = \frac{-2}{\sqrt{13}}.$$

Значит, наше уравнение приведется к виду (вспомним, что $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$):

$$13y'^2 - \frac{3x'}{\sqrt{13}} - \frac{2y'}{\sqrt{13}} + 2 = 0.$$

Полагая, далее, $x' = \alpha + \xi$, $y' = \beta + \eta$, получим

$$13\eta^2 + \left(26\beta - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)\eta - \frac{3}{\sqrt{13}}\xi - \frac{3\alpha}{\sqrt{13}} - \frac{2\beta}{\sqrt{13}} + 13\beta^2 + 2 = 0.$$

Подчиняем теперь α и β условиям

$$26\beta - \frac{2}{\sqrt{13}} = 0,\quad -\frac{3\alpha}{\sqrt{13}} - \frac{2\beta}{\sqrt{13}} + 13\beta^2 + 2 = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{337}{507}\sqrt{13},\quad \beta = \frac{\sqrt{13}}{169}.$$

260. Условие подобия двух линий второго порядка. На основании сказанного в предыдущих параграфах легко доказать следующее простое предложение, которое часто оказывается полезным.

Если в уравнениях двух данных действительных, нераспадающихся линий второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

и

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0 \qquad (2)$$

коэфициенты при членах второго измерения пропорциональны, т. е.

$$\frac{a'_{11}}{a_{11}} = \frac{a'_{12}}{a_{12}} = \frac{a'_{22}}{a_{22}}, \qquad (3)$$

то эти линии гомотетичны; исключение может представить случай, когда эти линии — гиперболы. В этом случае, гиперболы либо гомотетичны, либо одна из них гомотетична с гиперболой, сопряженной с другой.

Действительно, если имеет место условие (3), то мы можем, умножив одно из уравнений на подходящий множитель, добиться того, чтобы коэфициенты при членах второго измерения в обоих уравнениях были равны между собою, т. е. чтобы

$$a'_{11} = a_{11},\quad a'_{12} = a_{12},\quad a'_{22} = a_{22}. \qquad (3a)$$

[1]) Мы повторяем здесь на частном примере ход рассуждений и выкладок, проделанных нами в общем случае.

Так как тип линии (эллиптический, гиперболический, параболический) определяется только коэфициентами при членах второго измерения, то обе данные линии — одного и того же типа.

Рассмотрим сперва случай, когда наши линии — параболы. Так как направление оси параболы определяется исключительно коэфициентами при членах второго измерения, то оси этих парабол параллельны. Следовательно, наши параболы — гомотетичны (ибо их вершины и оси можно привести в совпадение поступательным смещением одной из них).

Перейдем теперь к случаю центральных линий. Если перенести начало координат в центр линии (1), то уравнение ее, как мы знаем, примет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0 \qquad (1a)$$

(мы, для простоты, обозначили новые координаты теми же буквами). Точно так же уравнение второй линии, отнесенной к осям координат, параллельным старым, но с началом в центре этой второй линии, будет

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{A'}{A_{33}} = 0, \qquad (2a)$$

где A' обозначает „большой“ дискриминант левой части уравнения (2) (дискриминанты A_{33} левых частей обоих уравнений равны, ибо, по условию, коэфициенты при членах второго измерения в них одинаковы).

Уравнения (1a) и (2a) относятся к двум различным системам осей координат, которые отличаются только положением начала. Сместив поступательно одну из этих систем, вместе с соответствующей линией, так, чтобы начала координат совпадали, можно считать, что уравнения (1a) и (2a) относятся к одной и той же системе осей.

Приведем в соответствие каждой точке (x, y) линии (1a) точку (x', y'), связанную с нею соотношениями

$$x = kx', \quad y = ky'. \quad (k \neq 0);$$

тогда линия (1a) обратится в линию

$$a_{11}k^2x'^2 + 2a_{12}k^2x'y' + a_{22}k^2y'^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

или

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{A}{k^2A_{33}} = 0, \qquad (1b)$$

гомотетичную с (1a), при центре гомотетии в начале координат и отношении подобия k.

Линия (1b) совпадает с линией (1a), если

$$\frac{A}{k^2A_{33}} = \frac{A'}{A_{33}}, \quad \text{т. е. } k^2 = \frac{A}{A'}. \qquad (4)$$

Если данные линии (действительные) эллипсы, то A и A' необходимо одного знака[1]) и, значит, такое k всегда можно подобрать; следовательно, данные эллипсы гомотетичны.

[1]) Ибо знак A или A' должен совпадать со знаком $S = a_{11} + a_{22}$ (§ 257).

Если наши линии гиперболы, то они будут гомотетичны тогда, когда A и A' одного знака. Если же A и A' различных знаков, то гипербола (2a) будет, очевидно, гомотетична с гиперболой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - \frac{A}{A_{33}} = 0, \qquad (2b)$$

сопряженной с гиперболой [1]) (1a); так же точно гипербола (1a) будет гомотетична с гиперболой, сопряженной с гиперболой (2a).

Таким образом наше предложение доказано вполне.

Легко также установить признак подобия линий (1) и (2) (без обязательной гомотетичности). Будем попрежнему считать, что наши линии действительные и нераспадающиеся; кроме того, будем для простоты считать оси координат прямоугольными.

Если данные линии — эллипсы или гиперболы, то для подобия необходимо и достаточно, чтобы полуоси их были пропорциональны (§ 207), т. е. чтобы

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \text{или} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

[штрихами мы отмечаем величины, относящиеся к линии (2)].

С другой стороны, на основании формул (2) и (3) § 258 имеем

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{(в случае эллипса)},$$

$$\frac{b^2}{a^2} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{(в случае гиперболы)},$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0. \qquad (*)$$

Аналогично

$$\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} \quad \text{(в случае эллипса)},$$

$$\frac{b'^2}{a'^2} = -\frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} \quad \text{(в случае гиперболы)},$$

где λ_1' и λ_2' — корни уравнения

$$\lambda'^2 - S'\lambda' + A'_{33} = 0. \qquad (**)$$

Отсюда следует, что корни уравнения (**) должны быть пропорциональны корням уравнения (*). Полагая $\lambda_1' = k\lambda_1$, $\lambda_2' = k\lambda_2$, где k — множитель пропорциональности, убеждаемся, что λ_1 и λ_2 должны удовлетворять уравнению

$$k^2\lambda^2 - S'k\lambda + A'_{33} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \frac{S'}{k}\lambda + \frac{A'_{33}}{k^2} = 0,$$

---

[1]) Две гиперболы, данные уравнениями

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + k = 0 \quad \text{и} \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - k = 0,$$

сопряженные, ибо одним и тем же поворотом осей, приводящим квадратичную форму $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{12}y^2$ к каноническому виду, их уравнения можно привести к виду

$$\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + k = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 - k = 0.$$

получающемуся из (**) подстановкой $\lambda' = k\lambda$. Так как последнее уравнение должно иметь те же корни, что и (*), то должно быть

$$\frac{S'}{k} = S, \quad \frac{A'_{33}}{k^2} = A_{33}$$

или

$$S' = kS, \quad A'_{33} = k^2 A_{33}, \tag{5}$$

откуда следует

$$\frac{S'^2}{A'_{33}} = \frac{S^2}{A_{33}}. \tag{6}$$

Обратно, если соблюдено условие (6), то, очевидно, всегда можно подобрать такое k, чтобы были соблюдены условия (5).

Условие (6) *есть необходимое условие подобия наших линий.* Оно оказывается также *достаточным*, когда $A_{33} > 0$, т. е. когда линии — эллипсы; если же линии — гиперболы ($A_{33} < 0$), то при соблюдении условия (6) они будут или подобны или одна из них будет подобна гиперболе, сопряженной с другой. Действительно, в случае эллипсов из пропорции $\lambda'_1 = k\lambda_1$, $\lambda'_2 = k\lambda_2$ следует, на основании формул (2) § 258

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

т. е. подобие эллипсов.

В случае гиперболы (т. е. $A_{33} < 0$), если λ_1 и λ_2 соответствуют продольной и поперечной осям гиперболы (1), то $\lambda'_1 = k\lambda_1$ и $\lambda'_2 = k\lambda_2$ могут соответствовать как продольной и поперечной осям гиперболы (2), так и поперечной и продольной. Значит, будем иметь либо

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

либо

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{a'^2}{b'^2},$$

а это и доказывает наше утверждение.

Наконец, в случае $A_{33} = 0$, линия (1) есть парабола; значит, и подобная ей линия должна быть параболой, т. е. должно быть $A'_{33} = 0$. Обратно, если $A_{33} = A'_{33} = 0$, то данные линии — параболы и, следовательно, подобны между собою.

261. Условие конгруэнтности двух линий второго порядка. Доказательство полноты системы ортогональных инвариантов A, A_{33}, S. Пусть даны две линии второго порядка:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

$$F'(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{12}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \tag{2}$$

отнесенные к одной и той же системе прямоугольных осей (для удобства мы отметили штрихами координаты точек второй линии, хотя обе линии отнесены, как сказано, к одной и той же системе осей).

Произведем в уравнении (2) подстановку

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + \alpha', \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi + \beta'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$F''(x, y) = a''_{11}x^2 + 2a''_{12}xy + a''_{22}y^2 + 2a''_{13}x + 2a''_{23}y + a''_{33} = 0. \tag{2a}$$

Подстановка, выражающая обратно x, y через x', y', будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + \alpha, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + \beta. \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Будем рассматривать теперь подстановку (3) или (3а) не как преобразование координат, а как формулы, выражающие движение [1]).

Если данные линии (1) и (2) конгруэнтны, то одна из них может быть совмещена с другой при помощи движения, т. е. должна существовать такая подстановка (3), после которой уравнение (2) обращается в уравнение (2а), выражающее ту же линию, что и уравнение (1). Обратно, если такая подстановка существует, то линии, очевидно, конгруэнтны.

Если уравнения (1) и (2а) выражают одну и ту же линию, то должно иметь место тождество

$$F''(x, y) = kF(x, y),$$

где k — некоторая постоянная, т. е. равенство

$$F'(x', y') = kF(x, y),$$

которое должно быть тождеством, если в левой части вместо x', y' подразумевать их выражения (3).

Прежде чем исследовать, при каких условиях это возможно, исследуем вопрос:

Какими условиями должны быть связаны коэфициенты полиномов $F(x, y)$ и $F'(x', y')$ для того, чтобы эти полиномы могли быть обращены один в другой при помощи подстановки вида (3). То-есть, при каких условиях мы можем иметь тождество

$$F'(x', y') = F(x, y),$$

где в левой части под x' и y' следует понимать их выражения вида (3).

Если возможно подобрать подстановку (3) указанным образом, то полиномы $F(x, y)$ и $F'(x', y')$ называются *эквивалентными* [2]) *относительно движений*, т. е. преобразований вида (3) или (3а).

Итак, мы ставим вопрос об эквивалентности двух заданных полиномов F и F'.

Ответить на этот вопрос не представляет никакого труда. Пусть A, A_{33}, S — инварианты, составленные для полинома $F(x, y)$, а A', A'_{33}, S' — инварианты, составленные для полинома $F'(x', y')$. Так как один полином может быть получен из другого при помощи подстановки вида (3), то на основании самого определения инвариантов

$$A = A', \quad A_{33} = A'_{33}, \quad S = S'. \tag{4}$$

Итак, условие (4) *необходимо* для эквивалентности полиномов $F(x, y)$ и $F'(x', y')$.

Докажем, что это условие также и *достаточно*, если исключить случай, когда $A = A_{33} = 0$.

Действительно, если $A_{33} \neq 0$, то, как было показано в § 254, оба полинома $F(x, y)$ и $F'(x', y')$ могут быть, путем подстановок вида (3), приведены к виду

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \frac{A}{A_{33}},$$

где λ_1 и λ_2 зависят исключительно от инвариантов A_{33}, S, и, следовательно, одинаковы для обоих полиномов.

В случае же $A_{33} = 0$, $A \neq 0$, оба полинома могут быть приведены к виду (§ 255)

$$S\eta^2 + 2\sqrt{-\frac{A}{S}}\,\xi.$$

В обоих случаях оба полинома эквивалентны одному и тому же третьему полиному, а потому, очевидно, и между собой.

---

[1]) Для того чтобы не усложнять формул, мы остановились на случае собственных движений. Но все сказанное ниже справедливо и для несобственных движений.

[2]) Это определение распространяется и на полиномы с комплексными коэфициентами. Однако мы, как и раньше, будем считать, что коэфициенты $a_{11}, \ldots, a_{33}$ действительные величины.

Таким образом наше утверждение доказано. В исключительном случае, $A = A_{33} = 0$, равенства (4) уже не гарантируют эквивалентности; но в этом случае достаточно добавить еще условие

$$H = H', \tag{5}$$

где $H = A_{11} + A_{22}$ есть условный инвариант, введеный в § 256. Действительно, в этом случае оба полинома могут быть приведены к виду

$$S\eta^2 + \frac{H}{S}.$$

Итак, мы имеем следующее важное предложение.

Для эквивалентности полиномов $F(x, y)$ и $F'(x', y')$ необходимо, чтобы инварианты A, A_{33}, S были одинаковы для обоих полиномов. Это условие может оказаться недостаточным только когда $A = A_{33} = 0$. В этом случае достаточно, чтобы кроме указанных инвариантов были одинаковы и условные инварианты H.

Доказанное предложение позволяет выяснить еще один важный вопрос.

Мы нашли в предыдущих параграфах три инварианта A, A_{33}, S (в прямоугольных координатах). Ясно, что всякая (однозначная) функция этих величин, например A^2, $A \cdot A_{33}$, $\frac{A}{S^2}$ и т. д., будет также инвариантом. Естественно возникает вопрос: существуют ли кроме инвариантов A, A_{33}, S еще другие, не являющиеся их функциями.

Ответ оказывается по существу отрицательным и дается следующим предложением: если исключить те значения коэфициентов, при которых $A = A_{33} = 0$, то *всякий инвариант J есть функция трех инвариантов A, A_{33}, S*. Действительно, инвариант J есть, по определению, функция коэфициентов $a_{11}, \ldots, a_{33}$ полинома $F(x, y)$, обладающая тем свойством, что она остается неизменной при подстановках вида (3), т. е. при замене коэфициентов полинома $F(x, y)$ коэфициентами любого другого, эквивалентного ему.

Но если A, A_{33}, S заданы (причем значения $A = A_{33} = 0$ исключаются), то, хотя этим значениям могут соответствовать различные полиномы $F(x, y)$, однако все эти полиномы будут эквивалентны, и, следовательно, J будет иметь вполне определенное значение, а это и значит, что J есть функция от A, A_{33}, S.

Более того, наше предложение можно, очевидно, уточнить так: всякий инвариант J есть определенная функция инвариантов A, A_{33}, S для тех значений коэфициентов, при которых не имеет место условие $A = A_{33} = 0$; при наличии же этого условия J есть функция инварианта S и условного инварианта H.

Не обращая внимания на исключение, могущее представится при $A = A_{33} = 0$, говорят, что *система инвариантов A, A_{33}, S является полной*, в том смысле, что всякий другой инвариант есть их функция. Мы видели, что для действительной полноты следует присоединить еще условный инвариант H, когда $A = A_{33} = 0$.

Легко показать, что если J есть непрерывная функция коэфициентов $a_{11}, \ldots, a_{33}$, то она будет функцией от A, A_{33}, S и в упомянутом исключительном случае. Далее, можно показать, что если J есть рациональная функция величин $a_{11}, \ldots, a_{33}$, то она будет также рациональной функцией от A, A_{33}, S. На доказательстве этих предложений мы не останавливаемся.

Возвратимся теперь к *вопросу о конгруэнтности* линий, представляемых уравнениями

$$F(x, y) = 0 \text{ и } F'(x', y') = 0.$$

На основании сказанного выше ясно, что линии конгруэнтны тогда и только тогда, когда при надлежащем выборе множителя $k \neq 0$ полиномы $F(x, y)$ и $kF'(x', y')$ будут эквивалентны.

Если A', A'_{33} и S' суть инварианты, составленные для полинома $F'(x', y')$, то, очевидно, соответствующие инварианты, составленные для полинома $kF'(x', y')$ будут

$$k^2A', \quad k^2A'_{33}, \quad kS',$$

и, значит, для эквивалентности полиномов F и kF', т. е. для конгруэнтности линий $F=0$ и $F'=0$, должно быть

$$A=k^3A', \quad A_{33}=k^2A'_{33}, \quad S=kS', \tag{6}$$

где k — надлежащим образом подобранное число, отличное от нуля.

Это условие также и достаточно, если A и A_{33} не обращаются одновременно в 0.

Исключая k, можем переписать условие (6) так

$$\frac{A^2}{A'^2}=\frac{A_{33}^3}{A_{33}'^3}=\frac{S^6}{S'^6}. \tag{7}$$

Следовательно, для конгруэнтности двух линий $F=0$ и $F'=0$ необходимо и достаточно, чтобы инварианты A^2, A_{33}^3, S^6, составленные для одной линии, были пропорциональны соответствующим инвариантам другой [1]).

Исключение может представить случай $A=A_{33}=0$. В этом случае, вместо (6) мы будем, очевидно, иметь условия

$$S=kS', \quad H=k^2H', \tag{6a}$$

или

$$\frac{S^2}{S'^2}=\frac{H}{H'}. \tag{8}$$

Упражнения

1. Вывести при помощи результатов этого параграфа условие того, чтобы уравнение $F(x, y)=0$ представляло окружность радиуса r.

Решение. Будем считать координаты прямоугольными. Вопрос сводится к выяснению условия конгруэнтности данной линии и окружности $x^2+y^2-r^2=0$. Инварианты, составленные для этой последней, будем отмечать штрихами. Имеем

$$A'=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix}=-r^2,$$

$$A'_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1, \quad S'=2.$$

Условия (6) принимают вид:

$$A=-k^3r^2, \quad A_{33}=k^2, \quad S=2k.$$

Из двух последних получаем $A_{33}=\frac{S^2}{4}$, или

$$4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=(a_{11}+a_{22})^2=a_{11}^2+a_{22}^2+2a_{11}a_{22},$$

или еще (перенося все члены в одну часть):

$$(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2=0.$$

Это условие может быть соблюдено только в том случае, если $a_{12}=0$ и $a_{11}-a_{22}=0$, ибо мы считаем коэфициенты действительными. Таким образом мы получили иным путем те же условия, что и раньше (§ 239). Для r^2 получаем выражение

$$r^2=-\frac{A}{k^3}=-\frac{8A}{S^3}.$$

[1]) Пропорцию (7) надо, как всегда, понимать в том смысле, что если один из знаменателей обращается в нуль, то числитель соответствующей дроби тоже приравнивается нулю, а сама дробь вычеркивается из пропорции.

Но в нашем случае $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$; значит, $S = 2a_{11}$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}^2 a_{33} - a_{11} a_{23}^2 - a_{11} a_{13}^2 = a_{11}(a_{11} a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2),$$

откуда

$$r^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11} a_{33}}{a_{11}^2},$$

что также совпадает с результатом § 239. Для того чтобы окружность была действительной, должно быть соблюдено условие

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{21} a_{33} > 0.$$

2. Выяснить необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ выражало равностороннюю гиперболу (координаты прямоугольные).

Решение. Для этого данная кривая должна быть конгруэнтна кривой

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0,$$

где a — постоянная. Для этой последней имеем

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{vmatrix} = a^2, \quad A'_{33} = -1, \quad S' = 0.$$

Условия (6) дают

$$A = k^3 a^2, \quad A_{33} = -k^2, \quad S = 0. \qquad (*)$$

Следовательно, искомые условия сводятся к следующим:

$$S = 0, \quad A_{33} < 0.$$

Если эти условия соблюдены, то всегда можно найти числа k и a, удовлетворяющие условиям (*); именно, получим

$$k = \pm \sqrt{-A_{33}}, \quad a^2 = \frac{A}{\pm \sqrt{-A_{33}^3}},$$

причем знак перед радикалом следует взять такой, чтобы

$$a^2 > 0.$$

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ, ЦЕНТР, ДИАМЕТРЫ

Мы переходим теперь к изучению поверхностей второго порядка, причем мы не будем подробно останавливаться на тех результатах, которые получаются аналогично соответствующим результатам для линий второго порядка.

1. ПРОЕКТИВНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ

262. Обозначения. Уравнение поверхности второго порядка в неоднородных декартовых координатах имеет вид

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

где $F(x, y, z)$ — полином второй степени; в самом общем случае

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}, \tag{2}$$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{44}$ — постоянные коэфициенты (числом 10)[1].

В *однородных* декартовых координатах x_1, x_2, x_3, x_4, данных отношениями

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

это уравнение принимает вид

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{1a}$$

где Φ — однородный полином второго порядка (квадратичная форма):

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2, \tag{3}$$

обращающийся в полином $F(x, y, z)$, если положить $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = 1$, так что

$$F(x, y, z) = \Phi(x, y, z, 1). \tag{4}$$

---

[1]) Когда речь идет о коэфициентах полинома (2), мы будем, смотря по удобству, писать a_{32} вместо a_{23}, a_{13} вместо a_{31} и т. д., т. е. считать, что a_{ij} и a_{ji} $(i_j = 1, 2, 3, 4)$ обозначают одну и ту же величиву.

В дальнейшем мы будем применять еще обозначения (ср. § 208):

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\ \Phi_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\ \Phi_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\ \Phi_4 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и аналогичные

$$\left.\begin{aligned}F_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},\\ F_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24},\\ F_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь также имеет место „тождество Эйлера" (ср. § 208):

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\Phi_1 + x_2\Phi_2 + x_3\Phi_3 + x_4\Phi_4 \tag{7}$$

и аналогичное

$$\begin{aligned}F(x, y, z) = {} & x\Phi_1(x, y, z, 1) + y\Phi_2(x, y, z, 1) + \\ & + z\Phi_3(x, y, z, 1) + \Phi_4(x, y, z, 1).\end{aligned} \tag{7a}$$

Наряду с квадратичной формой Φ нам придется встречаться с симметричной билинейной формой, „полярной" по отношению к Φ:

$$\begin{aligned}\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) = {} & y_1\Phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \\ & + y_2\Phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + y_3\Phi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + \\ & + y_4\Phi_4(x_1, x_2, x_3, x_4),\end{aligned} \tag{8}$$

которую кратко мы будем обозначать через $\Omega(x; y)$. Имеем

$$\Omega(x; y) = \Omega(y; x), \tag{9}$$

$$\Omega(x; x) = \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{10}$$

Далее, непосредственная проверка показывает, что (ср. § 208)

$$\begin{aligned}\Phi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) = {} & \\ = \Omega(x; x) + 2\Omega(x; y) + \Omega(y; y), & \end{aligned} \tag{11}$$

откуда следует еще

$$\begin{aligned}F(x + x', y + y', z + z') = {} & \varphi(x, y, z) + \\ + 2[xF_1(x', y', z') + yF_2(x', y', z') + zF_3(x', y', z')] + {} & F(x', y', z'),\end{aligned} \tag{11a}$$

где

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \tag{12}$$

есть квадратичная форма, представляющая собой совокупность членов второго измерения в полиноме $F(x, y, z)$.

Дискриминант формы Ф мы будем обозначать через A:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

а алгебраические дополнения элементов a_{ij} в определителе A через A_{ij}. В частности,

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (14)$$

есть дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y, z)$.

Часто вместо x_1, x_2, x_3, x_4 мы будем писать x, y, z, t. *Во всем дальнейшем мы будем всегда считать коэфициенты a_{ij} действительными числами.*

Далее, *в этом отделе*, посвященном проективным свойствам, мы не будем исключать случай, когда все коэфициенты при членах второго измерения полинома $F(x, y, z)$ равны нулю, т. е. когда

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.$$

В этом случае уравнение (1а) принимает вид

$$x_4(2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}x_4) = 0$$

и поверхность распадается на несобственную плоскость $x_4 = 0$ и на плоскость (вообще собственную)

$$2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0.$$

Мы всегда будем исключать случай, когда все коэфициенты формы Ф (или полинома F) равны нулю.

Во всем этом отделе, под x_1, x_2, x_3, x_4 можно подразумевать проективные однородные координаты общего вида, а не только декартовы. (В этом случае, конечно, уравнение $x_4 = 0$ уже не изображает, вообще говоря, несобственную плоскость).

263. Распадающиеся поверхности второго порядка. Условие совпадения. Поверхность второго порядка будет распадающейся тогда и только тогда, когда квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ разлагается на два линейных множителя, т. е. когда тождественно

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \\ = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)\cdot(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4), \qquad (1)$$

где $a_1, \ldots, a_4$, $b_1, \ldots, b_4$ — постоянные. А *для этого необходимо и достаточно, чтобы ранг дискриминанта A был равен двум или единице* (см. Добавление, § 13).

В этом и только в этом случае поверхность распадается и представляет собою совокупность двух (действительных или мнимых) плоскостей. Если ранг A равен единице, то мы будем иметь

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = k(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^2, \qquad (1а)$$

где k — постоянная, и поверхность представляет собою совокупность двух совпадающих плоскостей (всегда действительных; см. следующий параграф).

Заметим еще, что для совпадения двух поверхностей второго порядка

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad \text{и} \quad \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество (ср. § 209)

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = k\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{2}$$

где k — постоянная, отличная от нуля.

Так как общее уравнение поверхности второго порядка содержит десять коэфициентов a_{ij}, то форма и положение поверхности определяется девятью величинами (отношение девяти из коэфициентов a_{ij} к десятому).

Поэтому *для задания поверхности второго порядка достаточно, вообще говоря, задать девять ее точек.*

Вопрос о проведении поверхности второго порядка через девять заданных точек сводится к решению системы девяти линейных однородных уравнений с десятью неизвестными a_{ij} (ср. § 212). Эта система дает, вообще говоря, вполне определенные значения для отношений девяти из величин a_{ij} к десятой. Но система может оказаться и неопределенной, и тогда мы получим бесчисленное множество поверхностей второго порядка, проходящих через заданные точки. Во всяком случае *всегда существует поверхность второго порядка, проходящая через девять произвольно заданных точек.*

Отметим теперь же одно важное обстоятельство. Мы знаем, что если вместо переменных x_1, x_2, x_3, x_4 ввести новые x_1', x_2', x_3', x_4', связанные с предыдущими линейной однородной неособенной подстановкой, иначе говоря, если ввести новую систему проективных координат, то форма Φ превратится в новую форму Φ' переменных x_1', x_2', x_3', x_4', дискриминант A' которой связан с дискриминантом A формы Φ соотношением (см. Добавление, § 11):

$$A' = A \cdot \Delta^2,$$

где $\Delta \neq 0$ — определитель подстановки. Следовательно, знак дискриминанта A остается неизменным при замене проективных координат. Этот знак останется неизменным и при замене уравнения поверхности $\Phi = 0$ эквивалентным ему уравнением $\Psi = 0$. Действительно, так как эти уравнения, по условию, эквивалентны, то имеет место тождество (2), из которого следует, что коэфициенты формы Ψ получаются из коэфициентов формы Φ умножением на одно и то же число k. Но если в определителе четвертого порядка A заменить все элементы a_{ij} элементами $k \cdot a_{ij}$, то определитель умножится на k^4, т. е. не изменит знака.

Итак, *знак дискриминанта A инвариантен как при замене проективных координат, так и при замене уравнения поверхности эквивалентным ему уравнением*[1]).

[1]) Аналогичный дискриминант A в случае линий второго порядка (см. предыдущие главы) не обладает этим свойством, ибо в этом случае A — определитель третьего порядка и умножается не на k^4, а на k^3. Следовательно, при $k < 0$ он изменяет знак на обратный.

264. Проективная классификация поверхностей второго порядка. Путем надлежащей линейной однородной неособенной подстановки с действительными коэфициентами, выражающей переменные x_1, x_2, x_3, x_4 через новые переменные x_1', x_2', x_3', x_4' квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ может быть приведена к „каноническому“ виду (см. Добавление, § 12; ср. еще § 211):

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3', x_4') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 + \varepsilon_4 x_4'^2, \qquad (1)$$

где ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 равны ± 1 или 0, и уравнение поверхности приводится к „каноническому“ виду

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3', x_4') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 + \varepsilon_4 x_4'^2 = 0. \qquad (2)$$

Будем рассматривать наше преобразование как переход к новым проективным координатам и рассмотрим все случаи, которые могут здесь представиться.

а) *Неособенные поверхности второго порядка.* Так мы будем называть поверхности, для которых дискриминант A отличен от нуля.

В этом случае ни одно из чисел ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 не равно нулю. В зависимости от знаков этих чисел уравнение поверхности в новых координатах приводится к одному из видов[1])

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0, \qquad (a_1)$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2 = 0, \qquad (a_2)$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 = 0. \qquad (a_3)$$

В первом случае поверхность — целиком мнимая. Во втором и третьем — поверхность действительная.

Если заранее известно, что поверхность — действительная, то легко определить, по коэфициентам исходного уравнения $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, какой из двух видов (a_2) или (a_3) мы имеем. А именно легко видеть, что в первом случае $A < 0$, а во втором $A > 0$. Действительно, составляя дискриминант A' для левых частей (a_2) и (a_3), мы увидим, что в первом случае[2]) $A' < 0$, а во втором $A' > 0$. Но знаки A и A' совпадают (см. предыдущий параграф); отсюда следует наше утверждение.

О том, какими геометрическими свойствами различаются друг от друга поверхности (a_2) и (a_3) будет сказано ниже[3]) (§ 267).

b) *Особенные нераспадающиеся поверхности.* Так мы будем называть нераспадающиеся поверхности, для которых $A = 0$. В этом случае ранг A должен быть равен трем (ибо если бы он был меньше трех, поверхность была бы распадающейся). Так как ранг A равен трем, то одно

---

[1]) В случае надобности мы заменяем знаки всех членов на обратные и изменяем нумерацию переменных.

[2]) Например, для левой части (a_2)

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

[3]) См. также упражнения 3–5 настоящего параграфа.

из чисел ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 равно нулю, остальные же отличны от нуля. Пусть $\varepsilon_4 = 0$. В зависимости от знаков ε_1, ε_2, ε_3, канонические уравнения будут иметь один из следующих двух видов:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0, \qquad (b_1)$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0. \qquad (b_2)$$

В первом случае поверхность мнимая, но не целиком: она содержит одну действительную точку (0, 0, 0, 1). Во втором — поверхность действительная. Докажем теперь, что поверхности (b_1) и (b_2) — *конусы* (в первом случае — „мнимый конус"). Это вытекает из того, что всякая прямая, соединяющая точку (0, 0, 0, 1) с какой-либо точкой $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ поверхности, целиком принадлежит ей. Действительно, координаты любой точки $M(x_1', x_2', x_3', x_4')$ этой прямой даются формулами (вспомним параметрическое представление прямой):

$$x_1' = \lambda \cdot 0 + \mu\xi_1, \quad x_2' = \lambda \cdot 0 + \mu\xi_2, \quad x_3' = \lambda \cdot 0 + \mu\xi_3, \quad x_4 = \lambda \cdot 1 + \mu\xi_4,$$

т. е. $x_1' = \mu\xi_1$, $x_2' = \mu\xi_2$, $x_3' = \mu\xi_3$, $x_4' = \lambda + \mu\xi_4$. Подставляя эти значения в (b_1) или (b_2), видим, что уравнения эти удовлетворяются тождественно (ибо μ^2 выносится за скобку, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 удовлетворяют, по условию, этим уравнениям). Мы видим, что вершиной конусов (b_1), (b_2) является точка (0, 0, 0, 1). Вершина называется также *двойной точкой* поверхности [1]).

c) *Распадающиеся поверхности* (их мы тоже включаем в категорию особенных) В этом случае ранг A равен двум или единице. Пусть он равен двум. Тогда уравнение поверхности приведется к одному из видов:

$$x_1'^2 + x_2'^2 = 0, \qquad (c_1)$$
$$x_1'^2 - x_2'^2 = 0. \qquad (c_2)$$

В первом случае мы имеем совокупность двух мнимых плоскостей, а во втором — двух действительных. В обоих случаях плоскости пересекаются по действительной прямой

$$x_1' = 0, \quad x_2' = 0.$$

Каждая точка этой прямой называется *двойной точкой* поверхности.

Пусть теперь ранг A равен 1. Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$$x_1'^2 = 0 \qquad (c_3)$$

и она представляет собою двойную (действительную) плоскость. Все точки поверхности — „двойные". Случай c) можно, конечно, рассматривать как частный случай конуса („распадающийся конус").

Так как линейную подстановку можно трактовать, не только как замену координат, но и как проективное преобразование, то из сказанного в этом параграфе можно сделать следующее заключение.

С проективной точки зрения неособенные поверхности второго порядка разбиваются на следующие категории:

---

[1] Если вершина — несобственная точка, то конус обращается в цилиндр. *С проективной точки зрения* цилиндры не отличаются от конусов.

a) Неособенные поверхности, разделяющиеся, в свою очередь, на: a_1) мнимые; a_2) действительные, с отрицательным дискриминантом; a_3) действительные, с положительным дискриминантом.

b) Особенные нераспадающиеся поверхности (конусы), разделяющиеся на: b_1) мнимые конусы и b_2) действительные конусы.

c) Распадающиеся поверхности, разделяющиеся на: c_1) пару мнимых сопряженных (различных) плоскостей, c_2) пару действительных различных плоскостей и c_3) пару совпадающих плоскостей.

Поверхности, принадлежащие одной и той же из категорий a_1), a_2), a_3), b_1), b_2), c_1), c_2), c_3), могут быть переведены одна в другую проективным преобразованием.

Замечание 1. Легко найти двойную точку (или двойные точки) особенных поверхностей. Действительно, во всех случаях особенных поверхностей их уравнение приводится к виду

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 = 0$$

(в случае нераспадающегося конуса $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 \neq 0$; в случае пары различных плоскостей $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_3 = 0$; в случае пары совпадающих плоскостей $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$). Как легко проверить, во всех случаях координаты двойной точки удовлетворяют системе уравнений:

$$\Phi_1' = \varepsilon_1 x_1' = 0, \quad \Phi_2' = \varepsilon_2 x_2' = 0, \quad \Phi_3' = \varepsilon_3 x_3' = 0,$$
$$\Phi_4' = 0 \cdot x_4' = 0$$

и обратно, такая точка будет двойной. Но система эта эквивалентная системе (см. Добавление, § 11):

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ \Phi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ \Phi_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0, \\ \Phi_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Следовательно, координаты двойной точки (или двойных точек) найдем, решая систему (3). Вообще, под двойной точкой поверхности мы будем понимать любую точку, координаты которой удовлетворяют системе (3).

Если ранг определителя A равен четырем (т. е. $A \neq 0$), то система (3) не имеет решений (кроме $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$); следовательно, неособенные поверхности не имеют двойных точек. Если ранг A равен трем, то система (3) имеет одно независимое решение, т. е. имеется одна двойная точка; если ранг равен двум, то два из уравнений (3) суть следствия двух других и двойные точки составляют прямую; наконец, если ранг равен 1, то среди уравнений (3) имеется только одно независимое, и мы имеем плоскость двойных точек, которые и составляют всю поверхность.

Замечание 2. Легко видеть, что в однородных проективных координатах x_1, x_2, x_3, x_4 всякое уравнение вида

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{4}$$

где φ — квадратичная форма, не содержащая x_4, представляет конус

(второго порядка) с вершиной в точке (0, 0, 0, 1). Действительно, координаты точек прямой, соединяющей эту точку с любой точкой $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ поверхности даются формулами (см. выше): $x_1 = \mu\xi_1$, $x_2 = \mu\xi_2$, $x_3 = \mu\xi_3$, $x_4 = \lambda + \mu\xi_4$, подстановка которых в $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ дает

$$\varphi(\mu\xi_1, \mu\xi_2, \mu\xi_3) = \mu^2\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

ибо точка $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ находится на поверхности (4).

Раньше (§ 117) мы определили конус как геометрическое место прямых (образующих), проходящих через данную точку (вершину) и пересекающих данную кривую (направляющую). Поверхность, названная здесь конусом, подходит, конечно, под это определение. В качестве направляющей можно взять любую линию начерченную на конусе и пересекающую все образующие, например линию пересечения конуса с какой-либо плоскостью, не проходящей через вершину; это будет линия второго порядка (так как поверхность — второго порядка). Проще всего, в нашем случае, взять пересечение поверхности (4) с плоскостью $x_4 = 0$. Тогда уравнением линии пересечения в этой плоскости будет то же уравнение (4), где x_1, x_2, x_3 надо уже рассматривать как однородные координаты на плоскости $x_4 = 0$. (Если мы имеем дело с проективными координатами общего вида, то плоскость $x_4 = 0$ не является непременно несобственной плоскостью.)

Если линия эта распадается на две прямые, то конус распадается на совокупность двух плоскостей.

Будем теперь рассматривать x_1, x_2, x_3, x_4 как однородные *декартовы* координаты.

Тогда уравнение конуса (4) в неоднородных декартовых координатах $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ примет вид

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

т. е. *сохранит* внешне *ту же форму*.

Легко видеть, что, вообще, всякое уравнение вида

$$\varphi(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0, \tag{5а}$$

где x, y, z — неоднородные декартовы координаты, x_0, y_0, z_0 — постоянные, а φ — квадратичная форма (однородный полином аргументов $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$), представляет конус второго порядка с вершиной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно перенести начало координат в точку (x_0, y_0, z_0).

Упражнения и дополнения

1. Доказать непосредственно, что уравнение (5а) представляет конус с вершиной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Доказательство. Если точка $M'(x', y', z')$ расположена на поверхности (5а), то любая точка прямой M_0M' имеет координаты $x = x_0 + (x' - x_0)\cdot s$, $y = y_0 + (y' - y_0)s$, $z = z_0 + (z' - z_0)s$, где s — параметр. Отсюда $(x - x_0) = (x' - x_0)s$, $y - y_0 = (y' - y_0)s$, $z - z_0 = (z' - z_0)s$. Внося эти значения в левую часть (5а), увидим, что она обращается в $s^2\varphi(x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0)$, т. е. в 0, ибо точка M' находится, по условию, на поверхности; следовательно, всякая точка прямой M_0M' принадлежит поверхности.

2. Доказать, что если направляющая конуса — любая линия γ второго порядка, то конус — второго порядка.

Доказательство. Возьмем плоскость Π линии γ за плоскость $x_4 = 0$ основного координатного тетраэдра, а вершину C конуса — в качестве вершины тетраэдра, противолежащей этой плоскости. Прочие элементы тетраэдра выберем произвольно. Тогда, если $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ есть уравнение γ на плоскости Π, то уравнение конуса будет тоже $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ (см. выше, замечание 2); следовательно, наш конус — поверхность второго порядка.

3. Доказать, что прямая

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= \lambda(x_2 - x_4), \\ x_1 + x_3 &= -\frac{1}{\lambda}(x_2 + x_4), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где λ — произвольная постоянная целиком принадлежит поверхности

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

То же самое доказать относительно прямой

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_4 &= \lambda(x_2 - x_3), \\ x_1 + x_4 &= -\frac{1}{\lambda}(x_2 + x_3). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Доказательство. Перемножая левые и правые части уравнений (6), получим

$$x_1^2 - x_3^2 = -x_2^2 + x_4^2, \quad \text{откуда} \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

т. е. все точки прямой (6) принадлежат нашей поверхности. Точно такое же доказательство применяется к прямой (7).

Отсюда вытекает, что всякая поверхность категории (a_3) (см. выше) имеет действительные общие точки с любою действительною плоскостью, так как всякая действительная плоскость пересекает любую из прямых (6), (7) в действительных точках, если только в качестве λ мы возьмем действительное число.

4. Доказать, что на поверхности категории (a_2)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$$

нет действительных прямых.

Доказательство. Если бы на этой поверхности существовали действительные прямые, то эта поверхность имела бы с любой плоскостью действительные общие точки. Между тем, например, плоскость $x_4 = 0$ не имеет с поверхностью ни одной общей действительной точки.

5. На основании результатов упражнений 3 и 4 можно характеризовать поверхности категорий (a_2) и (a_3) таким образом: поверхность принадлежит к категории (a_2), если она неособенная, действительная и не содержит действительных прямых; поверхность принадлежит к категории (a_3), если она неособенная и содержит действительные прямые.

§ 265. Уравнение, определяющее пересечение прямой с поверхностью второго порядка в однородных координатах. Пусть требуется найти точки пересечения поверхности второго порядка

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

с прямою, которую мы будем считать заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \lambda x_1' + \mu x_1'', \quad x_2 = \lambda x_2' + \mu x_2'', \quad x_3 = \lambda x_3' + \mu x_3'', \\ x_4 = \lambda x_4' + \mu x_4''; \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

здесь (x_1', x_2', x_3', x_4') и $(x_1'', x_2'', x_3'', x_4'')$ обозначают две какие-нибудь точки M' и M'', взятые на рассматриваемой прямой. Подставляя (*) в (1), получим совершенно так же, как в § 216, уравнение определяющее отношение параметров λ, μ, соответствующих точкам пересечения [1]):

$$\lambda^2\Omega(x';\ x') + 2\lambda\mu\Omega(x';\ x'') + \mu^2\Omega(x'';\ x'') = 0, \qquad (2)$$

где приняты обозначения § 262. Для определения $h = \frac{\lambda}{\mu}$ получаем уравнение

$$h^2\Omega(x';\ x') + 2h\Omega(x';\ x'') + \Omega(x'';\ x'') = 0. \qquad (2a)$$

Если одновременно

$$\Omega(x';\ x') = \Omega(x';\ x'') = \Omega(x'';\ x'') = 0, \qquad (3)$$

то уравнение (2) удовлетворяется тождественно, и прямая целиком принадлежит поверхности. В противном случае уравнение (2a) имеет два решения (действительных, мнимых, различных или совпадающих) и мы имеем две точки пересечения.

Если уравнение (2a) имеет более двух решений, т. е. если прямая пересекает поверхность более, чем в двух точках, то необходимо имеют место равенства (3) и прямая целиком принадлежит поверхности.

266. Касательные прямые. Касательная плоскость. Прямая, пересекающая поверхность второго порядка в двух совпадающих точках, называется *касательной* к ней. Точка пересечения называется точкой касания.

Прямые, целиком принадлежащие поверхности, мы будем также причислять к касательным.

Посмотрим, сколько касательных в данной своей точке $M_0(y_1, y_2, y_3, y_4)$ имеет поверхность второго порядка. Пусть $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — какая-либо точка касательной. Возьмем в качестве точек M' и M'' в уравнении (2a) предыдущего параграфа соответственно точки M и M_0.

Тогда, если заметить, что $\Omega(y;\ y) = \Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ (так как M_0 находится на поверхности), уравнение (2a) примет вид

$$h^2\Omega(x;\ x) + 2h\Omega(x, y) = 0.$$

Один из корней этого уравнения h равен нулю (он соответствует точке M_0); для того чтобы и второй корень равнялся нулю, необходимо и достаточно условие

$$\Omega(x;\ y) = 0, \qquad (1)$$

или, подробнее,

$$x_1\Phi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) + x_2\Phi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) + \\ + x_3\Phi_3(y_1, y_2, y_3, y_4) + x_4\Phi_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0. \qquad (2)$$

Предыдущее уравнение, при постоянных y_1, y_2, y_3, y_4, есть уравнение плоскости. Мы видим, таким образом, что все прямые M_0M, касатель-

[1]) Уравнение это внешне ничем не отличается от уравнения (4) § 216; здесь, однако, Ω обозначает билинейную форму четырех пар переменных, тогда как там Ω — билинейная форма трех пар переменных.

ные к поверхности, расположены на плоскости (2); всякая прямая этой плоскости, проходящая через M_0, касается поверхности.

Поэтому плоскость (2) называется *касательной плоскостью* в точке M_0. Касательная плоскость может быть неопределенной только в том случае, когда координаты точки M_0 удовлетворяют одновременно уравнениям

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0;$$

но мы знаем[1]), что это может быть только в случае, когда поверхность особенная, а точка M_0 ее двойная точка (или одна из двойных точек).

В этом случае мы будем считать, что всякая плоскость (или прямая), проходящая через двойную точку — „касательная".

В неоднородных координатах x, y, z уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1a}$$

напишется, очевидно, так:

$$x\Phi_1(x_0, y_0, z_0, 1) + y\Phi_2(x_0, y_0, z_0, 1) + \\ + z\Phi_3(x_0, y_0, z_0, 1) + \Phi_4(x_0, y_0, z_0, 1) = 0, \tag{2a}$$

или еще, как легко провернть,

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0, z_0) + \\ + (z - z_0)F_3(x_0, y_0, z_0) = 0; \tag{2b}$$

ср. конец § 217.

267. Поверхности с эллиптическими, гиперболическими и параболическими точками. Касательная плоскость, как и всякая другая, пересекает поверхность второго порядка по линии второго порядка[2]), если только не принадлежит ей целиком; последнее может иметь место лишь в случае распадающейся поверхности. В этом параграфе мы исключаем из рассмотрения распадающиеся поверхности.

Линия второго порядка, по которой пересекается поверхность своею касательной плоскостью — всегда распадающаяся (мнимая или действительная) с двойной точкой в месте касания.

В самом деле, пусть γ линия (второго порядка) пересечения поверхности

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

с касательной плоскостью в точке $M_0(y_1, y_2, y_3, y_4)$; уравнение этой плоскости есть

$$\Omega(x; y) = 0. \tag{2}$$

Пусть теперь $M'(x_1', x_2', x_3', x_4') = 0$ — любая точка линии γ. Так как эта точка одновременно находится на поверхностях (1) и (2), то $\Omega(x'; x') = \Phi(x_1', x_2', x_3', x_4') = 0$, $\Omega(x'; y) = 0$. Кроме того, $\Omega(y; y) = 0$, ибо M_0 находится на (1). Итак, имеем

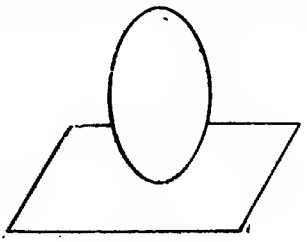
$$\Omega(x'; x') = \Omega(x'; y) = \Omega(y; y) = 0;$$

---

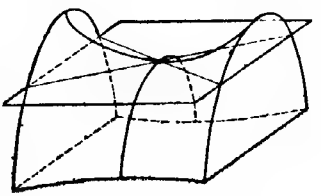
[1]) § 264, замечание 1.

[2]) Не надо думать, что касательная плоскость имеет с поверхностью только одну общую точку; см. ннже.

это показывает (см. § 265), что прямая M_0M' целиком принадлежит поверхности (1); так как эта прямая принадлежит и плоскости (2), то она является составной частью γ и, следовательно, γ — распадающаяся линия; очевидно, M_0 является двойной точкой, ибо, как мы видели, прямые, соединяющие M_0 с любой точкой на γ, принадлежат целиком γ.



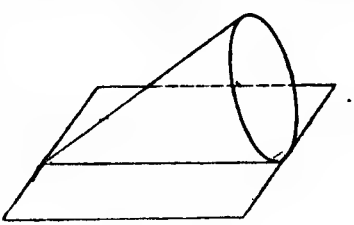
Черт. 164.



Черт. 165.

Легко видеть, что и обратно, если плоскость пересекает поверхность второго порядка по двум прямым, то она касается поверхности в точке пересечения M_0 этих прямых. Действительно, прямая, целиком принадлежащая поверхности, есть частный случай касательной. Так как, далее, плоскость проходит через две касательные к поверхности в точке M_0, то она совпадает с касательной плоскостью, ибо эта последняя тоже должна содержать обе упомянутые касательные.

Остановимся теперь на случае действительных поверхностей. Если касательная плоскость в (действительной) точке M_0 пересекает поверхность по двум мнимым (сопряженным) прямым, то точка M_0 называется *эллиптической точкой* поверхности; в этом случае имеется только одна действительная точка пересечения (черт. 164); если пересечение происходит по двум действительным различным прямым, то точка называется *гиперболической* (черт. 165); наконец, если пересечение пронсходит по двум совпадающим прямым, то точка называется *параболической* (черт. 166).



Черт. 166.

Легко показать, что все точки одной и той же поверхности второго порядка — одного и того же типа (эллиптические, гиперболические, параболические) и что тип этот вполне характеризуется знаком дискриминанта A; мы исключаем, естественно, двойные точки особенных поверхностей.

Действительно, пусть M какая-либо точка поверхности и Π — касательная плоскость в этой точке. Примем M за вершину (0, 0, 0, 1) основного тетраэдра, а плоскость Π — за плоскость $x_3 = 0$. В точке M(0, 0, 0, 1) имеем

$$\Phi_1 = a_{14}, \quad \Phi_2 = a_{24}, \quad \Phi_3 = a_{34}, \quad \Phi_4 = a_{44},$$

и уравнение касательной плоскости Π в точке M напишется так:

$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0.$$

Так как плоскость эта должна совпадать с плоскостью $x_3 = 0$, то мы должны иметь

$$a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0, \quad a_{34} \neq 0\ ^{1}). \qquad (*)$$

Линия пересечения касательной плоскости $x_3 = 0$ с поверхностью $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ будет дана, в плоскости $x_3 = 0$, уравнением $\Phi(x_1, x_2, 0, x_4) = 0$, т. е. в раскрытом виде

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Мы убеждаемся еще раз, что это — распадающаяся линия. Она будет парой различных мнимых, различных действительных или совпадающих (действительных) прямых, в зависимости от того, будет ли выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ больше нуля, меньше нуля или равно нулю [2]).

Составим теперь дискриминант A; принимая во внимание (*), получим

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = -a_{34}^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

Следовательно, знак A противоположен знаку $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$. Мы знаем, далее, что знак A инвариантен. Поэтому мы под A можем подразумевать дискриминант, составленный при любом выборе системы (проективных) координат.

Итак, мы имеем следующий результат: *при* $A < 0$, *все точки поверхности — эллиптические, при* $A > 0$ *— все точки гиперболические, при* $A = 0$ *— все точки параболические.* Условие $A = 0$ характеризует, как мы знаем, конус (мы ведь не рассматриваем здесь распадающихся поверхностей). Геометрически также совершенно очевидно, что касательная плоскость касается конуса вдоль целой образующей и, следовательно, имеет с ним общими две совпадающие прямые.

Возвращаясь к неособенным поверхностям, мы видим, чем различаются геометрически поверхности категорий (a_2) и (a_3) § 264: в первом случае — все точки поверхности эллиптические, во втором — гиперболические [3]).

В каждой точке неособенной поверхности можно провести определенную касательную плоскость; поэтому через каждую точку поверхности категории (a_3) проходят две действительные прямые, целиком ей принадлежащие („прямолинейные образующие").

Поверхность категории (a_3) имеет со всякой действительной плоскостью II действительные общие точки, ибо каждая ее образующая пересекает всякую плоскость (в собственной или несобственной точке). Поверхность же категории (a_2) имеет действительные общие точки не со всеми плоскостями; например, если взять уравнение поверхности

---

[1]) Если бы $a_{34} = 0$, касательная плоскость была бы неопределенной, что может быть только в двойной точке.

[2]) См. Добавление, конец § 13 (пример).

[3]) Действительно, в первом случае $A < 0$, а во втором $A > 0$.

в виде (a_2) § 264, то ясно, что плоскость $x_4' = 0$ не имеет с нею ни одной общей действительной точки.

Отсюда легко заключаем, что на поверхностях (a_2) нет действительных прямых (мы это уже доказали раньше, в § 264, упражнения). Этот же результат можно получить и так. Пусть существует действительная прямая Δ, целиком расположенная на поверхности. Всякая плоскость Π, проведенная через Δ, пересечет поверхность еще по одной действительной прямой Δ' (ибо в пересечении должна получиться линия второго порядка, которая, наверняка, содержит, как составную часть, прямую Δ). В точке M_0 пересечения Δ и Δ' плоскость Π должна касаться поверхности. Но тогда точка касания — гиперболическая, а этого быть не может, если поверхность — категории (a_2).

268. Касательный конус. Полярная плоскость и полюс. Тангенциальное уравнение. Поставим себе теперь такую задачу: дана точка $N(y_1, y_2, y_3, y_4)$ пространства; найти все касательные, которые можно провести через эту точку к данной поверхности второго порядка Γ (точка N вообще не находится на Γ).

Пусть $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ точка касания какой-либо из касательных NM, проведенных из N к Γ. Взяв в уравнении (2a) § 265 в качестве точек M' и M'' соответственно точки N и M, получим

$$h^2\Omega(y; y) + 2h\Omega(x; y) = 0, \qquad (*)$$

ибо, по условию, точка M находится на Γ и $\Omega(x; x) = 0$. Один из корней этого уравнения h равен нулю (он дает точку M); для того, чтобы и второй был равен нулю (ведь только при этом условии прямая MN будет касательной), необходимо и достаточно условие

$$\Omega(x; y) = 0. \qquad (1)$$

Кроме того, координата точки M должна удовлетворять уравнению поверхности Γ

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \qquad (2)$$

Если будем теперь рассматривать x_1, x_2, x_3, x_4 как текущие координаты, то увидим, что искомые точки касания M суть точки пересечения плоскости (1) с поверхностью (2). Это пересечение — линия второго порядка, которую мы обозначим через γ; касательные, проведенные к Γ из N, составляют конус, с вершиной N и направляющей γ. Он называется *касательным конусом*.

Плоскость же (1) называется *полярной плоскостью* точки N относительно Γ; N есть *полюс* плоскости (1). Плоскость (1) всегда действительная, если N — действительная точка. Но она может пересекать Γ и по мнимой линии, и тогда касательный конус — мнимый.

Уравнение полярной плоскости формально имеет тот же вид, что и уравнение касательной плоскости. Только здесь (y_1, y_2, y_3, y_4) есть произвольная постоянная точка пространства, а не непременно точка поверхности Γ.

Если N находится на Γ, то полярная плоскость обращается в касательную плоскость и касательный конус вырождается в ту же плоскость.

Легко непосредственно составить уравнение касательного конуса. Действительно, пусть $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ обозначает теперь какую-нибудь точку касательной, проведенной из N к Γ (а не непременно точку касания). Тогда вместо (*) будем иметь полное квадратное уравнение относительно h:

$$h^2\Omega(y;\ y) + 2h\Omega(x;\ y) + \Omega(x;\ x) = 0.$$

Для того чтобы прямая MN была касательной, оба корня этого уравнения должны совпадать, а это равносильно условию

$$\Omega(x;x)\,\Omega(x;y) - \Omega^2(x;y) = 0. \tag{3}$$

Это есть уравнение, которому должна удовлетворять любая точка любой касательной к Γ, проведенной из N. Следовательно, это есть уравнение касательного конуса. Мы видим, что конус этот — второго порядка. То, что уравнение (3) представляет конус с вершиной в точке $N(y_1, y_2, y_3, y_4)$, легко проверить и непосредственно, что мы предоставляем сделать читателю [1]). Не исключен, конечно, случай распадения конуса (3) на две плоскости.

Вернемся к уравнению полярной плоскости. В раскрытом виде оно напишется так:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1(y_1, y_2, y_3, y_4), \quad u_2 = \Phi_2(y_1, y_2, y_3, y_4), \\ u_3 &= \Phi_3(y_1, y_2, y_3, y_4), \quad u_4 = \Phi_4(y_1, y_2, y_3, y_4). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Формулы (5) определяют координаты u_1, u_2, u_3, u_4 полярной плоскости по координатам полюса.

Если поверхность Γ неособенная, то уравнения (5) однозначно разрешимы относительно y_1, y_2, y_3, y_4, ибо в этом случае определитель A отличен от нуля.

Таким образом всякая неособенная поверхность второго порядка устанавливает обратимо однозначное соответствие между точками и плоскостями пространства. Это — частный вид корреляции (§ 194), называемый *полярностью* и характеризуемый аналитически тем, что коэфициенты подстановки (5) составляют симметричную таблицу (ср. аналогичные свойства полярности на плоскости в § 219—221).

Геометрически полярность характерна тем, что (в отличие от корреляции общего вида) она обладает следующим свойством: если точка M находится на полярной плоскости точки N, то точка N находится на полярной плоскости точки M; это есть непосредственное следствие соотношения

$$\Omega(x;y) = \Omega(y;x),$$

---

[1]) Можно, например, поступить так: обозначив через $\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ левую часть уравнения (3), непосредственной подстановкой убедиться, что уравнения $\Psi_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} = 0$, $\Psi_2 = 0$, $\Psi_3 = 0$, $\Psi_4 = 0$ удовлетворяются при $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$, из чего будет следовать, что поверхность (3) особенная, с двойной точкой в N.

выражающего симметрию формы Ω, т. е. симметрию таблицы подстановки (5).

Две точки M и N, каждая из которых расположена на полярной плоскости другой, называются *сопряженными*. Также и две плоскости, каждая из которых проходит через полюс другой, называются сопряженными.

Можно дать другое, приводящее к тому же результату, определение сопряженных точек, вполне аналогичное определению § 220. А именно, точки M и N сопряжены относительно поверхности Γ, если они гармонически сопряжены с точками A, B пересечения прямой MN с Γ.

Совершенно так же, как в § 220, докажем, что геометрическое место точек, сопряженных с $N(y_1, y_2, y_3, y_4)$ относительно Γ, дается уравнением $\Omega(x; y) = 0$, т. е. представляет собою полярную плоскость точки N.

Аналогией автополярному треугольнику (§ 222) здесь является *автополярный тетраэдр*, вершины которого суть полюсы противоположных граней. Предоставляем читателю доказать возможность построения бесчисленного множества автополярных тетраэдров, либо непосредственно, исходя из приведенных выше свойств полюса и полярной плоскости, либо доказав, что если уравнение поверхности приведено к каноническому виду

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2 = 0,$$

то основной координатный тетраэдр будет автополярным. Это дает, вместе с тем, геометрическую интерпретацию приведения уравнения к каноническому виду.

Вполне аналогично тому, что было сказано в § 223, можно легко показать (предоставляем это читателю), что, в случае неособенных поверхностей, координаты u_1, u_2, u_3, u_4 связаны уравнением второго порядка

$$\Psi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \tag{6}$$

где

$$\Psi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum b_{ij} u_i u_j$$

есть *квадратичная форма, союзная с* $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, понимая под этим, что коэфициенты b_{ij} связаны с коэфициентами a_{ij} соотношениями

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A}. \tag{7}$$

Уравнение (6) есть *тангенциальное уравнение* нашей поверхности. Так как оно — второго порядка, то говорят, что поверхность — *второго класса*. Следовательно (неособенная), поверхность второго порядка есть в то же время поверхность второго класса (порядок и класс для других алгебраических поверхностей, вообще говоря, не совпадают).

II. АФФИННЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЦЕНТР, ДИАМЕТРЫ

269. Пересечение с несобственной плоскостью. Аффинная классификация. Так же, как и в случае линии второго порядка, мы положим в основу аффинной классификации поверхностей второго порядка рассмотрение несобственных их элементов.

В дальнейшем мы будем применять однородные и неоднородные *декартовы* координаты, причем мы будем обозначать однородные координаты через x, y, z, t, а неоднородные через x, y, z. В соответствии с этим уравнение поверхности второго порядка Г напишется в виде

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

в неоднородных координатах и в виде

$$\Phi(x, y, z, t) = 0 \tag{1a}$$

— в однородных. Обозначения здесь те же, что и в § 262.

Во всем дальнейшем мы будем считать, что *не все коэфициенты при членах второго измерения в* (1) *равны нулю*; иначе поверхность (1) не была бы второго порядка.

Найдем все несобственные точки этой поверхности, т. е. точки ее, расположенные на несобственной плоскости $t = 0$ (точки пересечения поверхности Г с несобственной плоскостью).

Полагая $t = 0$ в (1а), получим уравнение (обозначения § 262)

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{14}yz + a_{33}z^2 = 0. \tag{2}$$

Несобственные точки поверхности γ определяются, следовательно, уравнением (2) совместно с условием $t = 0$.

Согласно принятому раньше условию (§ 174) мы будем говорить, что уравнение (2) определяет некоторую линию второго порядка на несобственной плоскости. Эту линию мы обозначим теперь через γ_∞.

Уравнение (2), взятое само по себе, представляет собою конус второго порядка [1]) с вершиной в начале координат O, пересекающей несобственную плоскость по той же линии γ_∞, что и данная поверхность Г; образующие этого конуса дают направления, в которых удалены несобственные точки поверхности Г; такие направления называются асимптотическими. Поэтому конус (2) называется *конусом асимптотических направлений*, проведенных из O.

Вместо того чтобы рассматривать линию γ_∞, можно рассматривать конус (2). Мы рекомендуем читателю при чтении дальнейшего текста этого параграфа высказывания о линии γ_∞ „переводить“ на высказывания о конусе (2); например, когда мы будем говорить, что линия γ_∞ — распадается на две прямые, это будет одновременно означать, что конус (2) распадается на две плоскости.

На рассмотрении линии γ_∞ (или, что сводится к тому же — конуса асимптотических направлений), в связи с той или иной проективной категорией (§ 264), к которой относится поверхность Г и основана

[1]) См. § 264, замечание 2.

приводимая ниже *аффинная классификация* поверхностей второго порядка.

Существенно при этом будет ли линия γ_∞ действительной, мнимой, нераспадающейся или распадающейся. Это всегда легко выяснить приведением формы $\varphi(x, y, z)$ к каноническому виду $\varphi'(x', y', z') = \varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2 + \varepsilon_3 z'^2$ при помощи линейной подстановки, что требует только применения простых рациональных операций (см. Добавление, § 12).

В частности, линия γ_∞ будет распадающейся тогда и только тогда, когда дискриминант

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

формы $\varphi(x, y, z)$ равен нулю.

Начнем с рассмотрения *неособенных поверхностей*, характеризуемых, как известно, условием

$$A \neq 0,$$

и перечислим возможные случаи.

1°. Линия γ_∞ нераспадающаяся и мнимая. Так как в этом случае поверхность Γ не имеет ни одной несобственной действительной точки, то любая (действительная) плоскость пересекает Γ по линии второго порядка, не имеющей действительных несобственных точек, т. е. по линии эллиптического типа [1]). Поверхность Γ в этом случае называется *эллипсоидом*. Поверхность эта может принадлежать только к категориям (a_1) или (a_2) § 264, ибо поверхность категории (a_3) имеет со всякой действительной плоскостью (в частности с несобственной) действительные общие точки (§ 267). В первом случае эллипсоид — мнимый, а во втором — действительный. Эти два случая отличаются друг от друга тем, что в первом $A > 0$, а во втором $A < 0$.

Итак, если линия γ_∞ — нераспадающаяся и мнимая, то при $A > 0$ имеем мнимый, а при $A < 0$ действительный эллипсоид.

2°. Линия γ_∞ — нераспадающаяся и действительная. Поверхность Γ может принадлежать только к категориям (a_2) и (a_3) § 264, ибо содержит действительные точки. Пусть Π произвольная (действительная) плоскость пространства. Если Π пересекает линию γ_∞ в двух действительных различных точках [2]), то линия пересечения Π и Γ — гиперболического типа. Если Π пересекает γ_∞ в мнимых точках, то линия пересечения Π и Γ — эллиптического типа. Если, наконец, Π пересекает γ_∞ в двух совпадающих точках, то линия пересечения Π и Γ — параболического типа. Следовательно, в пересечении поверхности Γ плоскостями могут получиться линии всех трех типов.

---

[1]) Если плоскость не касательна к γ, то линия пересечения — нераспадающаяся, т. е. в нашем случае эллипс. Аналогичное замечание относится к случаям, перечисленным ниже.

[2]) Пересечение плоскости Π с линией второго порядка γ дается пересечением линии γ с прямою Δ пересечения Π с плоскостью линии γ. Если Δ касается γ, то две точки пересечения совпадают.

Поверхность Γ называется в этом случае *гиперболоидом*. Если гиперболоид принадлежит к категории (a_2), т. е. имеет только эллиптические точки, то он называется *двухполостным*; есла же он принадлежит к категории (a_3), т. е. имеет только гиперболические точки, то он называется *однополостным* (происхождение названий сделается ясным при изучении формы этих поверхностей).

Итак, *если линия* γ_∞ *— нераспадающаяся и действительная, то при* $A > 0$ *имеем однополостный гиперболоид, а при* $A < 0$ *— двухполостный.*

3°. Линия γ_∞ — распадающаяся и мнимая. В этом случае γ_∞ имеет единственную действительную точку — двойную точку G линии γ_∞. Несобственная плоскость является касательной к Γ в G. Всякая собственная плоскость, проходящая через G, пересекает Γ по параболе [1]); все эти плоскости параллельны одной и той же прямой, а именно любой из прямых, в направлении которых удалена точка G. Всякая иная плоскость пересекает Γ по линии эллиптического типа. Все точки поверхности — эллиптические (т. е. $A < 0$), ибо таковой является, например, точка G.

Поверхность называется *эллиптическим параболоидом*. Она, как легко видеть, принадлежит к категории (a_2).

4°. Линия γ_∞ — распадающаяся и действительная. Она необходимо состоит из двух различных прямых [2]). И здесь несобственная плоскость касается Γ в двойной точке G линии γ_∞.

Всякая плоскость, проходящая через G, пересекает Γ по линии параболического типа. Всякая иная плоскость пересекает Γ по линии гиперболического типа. Все точки поверхности — гиперболические.

Поверхность называется *гиперболическим параболоидом*. Она, очевидно, принадлежит к категории (a_3).

Запомним, что в случае эллипсоидов и гиперболоидов $A_{44} \neq 0$, и в случае параболоидов $A_{44} = 0$. В обоих случаях $A \neq 0$.

Переходя к *особенным нераспадающимся поверхностям* ($A = 0$, ранг A равен 3), заметим только, что с аффинной точки зрения уже следует отличать конус от цилиндра и что имеются различные виды цилиндров: эллиптический (направляющая — эллипс), гиперболический (направляющая — гипербола), параболический (направляющая — парабола); см. ниже § 281, 282.

270. Уравнение, определяющее пересечение поверхности второго порядка и прямой в неоднородных декартовых координатах. В дальнейшем мы будем применять неоднородные декартовы координаты и поэтому начнем с составления уравнения, определяющего пересечение поверхности второго порядка

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

---

1) Пересечение — линия параболического типа с несобственной точкой в G. Если бы линия пересечения была парой параллельных прямых (пересекающихся в G), то плоскость была бы касательной к Γ в G. Но таковой является только несобственная плоскость.

2) Если бы прямые эти совпадали, то несобственная плоскость касалась бы Γ вдоль прямой и поверхность Γ имела бы параболические точки, что возможно только в случае особенных поверхностей (§ 267).

заданной уравнением в этих координатах, с прямою, заданной параметрически:

$$x = x_0 + X \cdot s, \quad y = y_0 + Y \cdot s, \quad z = z_0 + Z \cdot s, \tag{2}$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая точка прямой, (X, Y, Z) — вектор ее направления, а s — переменный параметр. Подставляя (2) в (1), получим квадратное уравнение [1]), служащее для определения s:

$$\varphi(X, Y, Z)\, s^2 + 2\,[XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0)]\, s + F(x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{3}$$

где попрежнему

$$\varphi(X, Y, Z) = a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY. \tag{4}$$

Если

$$\varphi(X, Y, Z) = 0, \tag{5}$$

то по крайней мере один из корней s_1, s_2 предыдущего уравнения равен ∞, т. е. прямая пересекает поверхность в несобственной точке, а это значит, что она имеет асимптотическое направление (§ 269). Мы могли бы получить этот результат и непосредственно из уравнения конуса асимптотических направлений (2) § 269. Действительно, выражая что несобственная точка, удаленная в направлении вектора (X, Y, Z), т. е. точка с однородными координатами $(X, Y, Z, 0)$, принадлежит конусу (2) § 269, непосредственно получим условие (5).

271. Центр. Центром поверхности второго порядка называется точка, обладающая тем свойством, что все хорды, проведенные через нее, делятся ею пополам.

Для того чтобы точка $C(x_0, y_0, z_0)$ была центром поверхности, необходимо и достаточно, чтобы при всех возможных направлениях (X, Y, Z) средний коэфициент в уравнении (3) предыдущего параграфа равнялся нулю (ибо только тогда, для всех направлений, корни s_1 и s_2 этого уравнения удовлетворяют условию $s_1 + s_2 = 0$).

А из этого следует, что координаты центра определяются уравнениями (ср. § 228)

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

или, подробнее,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если рассматривать в предыдущих уравнениях x, y, z как текущие координаты, то каждое из них представляет собою уравнение некоторой плоскости. Центр, следовательно, определяется как пересечение трех плоскостей (1).

---

[1]) Обозначения см. в § 262.

Если определитель системы (2)

$$A_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то имеется один и только один собственный центр. В этом случае поверхность называется *центральной*.

В частности, эллипсоиды и гиперболоиды (§ 269) — центральные поверхности.

Если $A_{44}=0$, то плоскости (2) либо вовсе не пересекаются (в собственных точках) и тогда центра (собственного) нет, либо пересекаются по одной прямой и тогда имеется прямая центров, либо сливаются в одну плоскость и тогда имеется плоскость центров.

Вводя несобственные элементы, можно обобщить понятие о центре, условно называя центром всякую точку (собственную или несобственную), однородные координаты которой удовлетворяют уравнениям (2), приведенным к однородному виду

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t=0, \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

или, короче,

$$\Phi_1(x, y, z, t)=0, \quad \Phi_2=0, \quad \Phi_3=0. \tag{1a}$$

Не различая собственные и несобственные элементы, можно сказать, что поверхность имеет определенный центр, когда ранг таблицы

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \tag{3}$$

равен трем; прямую центров, когда ранг равен двум; плоскость центров, когда ранг равен единице.

В случае неособенных поверхностей ранг таблицы (3) всегда равен трем; действительно, если этот ранг меньше трех, то $A=0$, как в этом легко убедиться, разлагая определитель A по элементам последней строки.

Отсюда, в частности, вытекает, что параболоиды имеют один единственный несобственный центр, ибо в этом случае $A_{44}=0$ и $A\neq 0$, и ранг таблицы (3) равен трем. Решая же систему (2а) по способу, указанному в Добавлении (§ 6а), убеждаемся, что $t=0$.

Заметим еще, что если имеется плоскость центров, то она не может быть несобственной. Действительно, если бы все плоскости (2а) совпадали с несобственной плоскостью, то мы имели бы $a_{ij}=0$ ($i, j=1, 2, 3$), что противоречит принятому раньше условию.

Во всем дальнейшем, если противное не будет оговорено особо, *говоря о существовании или несуществовании центра, мы будем иметь в виду собственный центр.*

Заметим, что центральные поверхности (т. е. имеющие один определенный *собственный* центр) характеризуются условием

$$A_{44}\neq 0.$$

Добавим, наконец, что *если начало координат есть центр поверхности, то в уравнении ее отсутствуют члены первой степени, и обратно* (ср. § 228).

272. Диаметральные плоскости. Найдем теперь геометрическое место середин всех хорд поверхности второго порядка, параллельных данному постоянному направлению (X, Y, Z); мы будем считать, что это направление — не асимптотическое.

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ какая-либо из точек искомого геометрического места. Точки пересечения поверхности с прямою, проходящей через (x_0, y_0, z_0) и параллельной направлению (X, Y, Z), даются корнями s_1, s_2 уравнения (3) § 270. Для того чтобы M_0 была серединой хорды, мы должны иметь $s_1 + s_2 = 0$, откуда следует

$$XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Предыдущее уравнение и есть уравнение искомого геометрического места, если рассматривать x_0, y_0, z_0 как текущие координаты.

Обозначая x_0, y_0, z_0 просто через x, y, z, перепишем это уравнение в виде

$$XF_1(x, y, z) + YF_2(x, y, z) + ZF_3(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} X(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + Y(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \\ + Z(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0, \end{aligned} \tag{1a}$$

или еще

$$Lx + My + Nz + K = 0, \tag{2}$$

где для краткости введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} L &= a_{11}X + a_{21}Y + a_{31}Z = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial X}, \\ M &= a_{12}X + a_{22}Y + a_{32}Z = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial Y}, \\ N &= a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial Z}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и

$$K = a_{14}X + a_{24}Y + a_{34}Z. \tag{4}$$

Легко показать, что коэфициенты L, M, N в (2) не могут быть равны нулю одновременно, если, как мы предполагаем, данное направление (X, Y, Z) — не асимптотическое.

Действительно, умножая равенства (3) соответственно на X, Y, Z и складывая, получим, очевидно,

$$LX + MY + NZ = \varphi(X, Y, Z). \tag{5}$$

Если бы $L = M = N = 0$, то было бы $\varphi(X, Y, Z) = 0$, т. е. (X, Y, Z) было бы асимптотическим направлением.

Мы видим, таким образом, что уравнение (2), а следовательно, и (1) изображают некоторую плоскость; эта плоскость называется *диаме-*

тральной плоскостью, сопряженной с данным направлением (X, Y, Z).

Легко запомнить правило составления уравнения диаметральной плоскости, сопряженной с направлением (X, Y, Z); это правило вытекает из (1): для того чтобы составить уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с данным направлением, достаточно взять частные производные полинома $F(x, y, z)$ по x, y и z, умножить их соответственно на X, Y, Z, результаты сложить и сумму приравнять нулю.

Укажем теперь следующее важное свойство диаметральных плоскостей: *все диаметральные плоскости проходят через центр* (все центры) *поверхности.* Это непосредственно вытекает из вида уравнения (1), ибо центр (центры) представляет собою пересечение трех плоскостей

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0.$$

Если, в частности, имеется прямая центров, то все диаметральные плоскости проходят через нее. Если имеется плоскость центров, то все диаметральные плоскости сливаются с ней.

Сказанное выше применяется, очевидно, и к случаю несобственных центров Если имеется один несобственный центр, то все диаметральные плоскости проходят через него и, следовательно, параллельны одной и той же прямой. Если имеется несобственная прямая центров, то все диаметральные плоскости проходят через нее и, следовательно, параллельны между собою.

Вообще во всех случаях отсутствия определенного собственного центра все диаметральные плоскости параллельны одной и той же прямой.

До сих пор мы считали, что направление (X, Y, Z) — не асимптотическое. Но мы можем обобщить понятие диаметральной плоскости, определяя диаметральную плоскость, сопряженную с направлением (X, Y, Z), уравнением (1), при *любых* X, Y, Z, не равных одновременно нулю.

Если (X, Y, Z) — одно из асимптотических направлений, то диаметральная плоскость, сопряженная с ним, параллельна ему (т. е. параллельна направлению, с которым она сопряжена); это непосредственно следует из тождества (5). Из того же тождества следует, что если (X, Y, Z) — не асимптотическое направление, то оно не может быть параллельным диаметру, с ним сопряженному.

Плоскость (2) может оказаться, при допущении, что (X, Y, Z) — асимптотическое направление, несобственной или неопределенной.

273. Диаметральные плоскости и диаметры центральных поверхностей. Остановимся несколько подробнее на *центральных поверхностях.* Если поместить начало координат в центр, то уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением (X, Y, Z), примет вид (ибо в этом случае $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$, см. конец § 271)

$$Lx + My + Nz = 0, \tag{1}$$

где L, M, N даются формулами (3) предыдущего параграфа. Так как в нашем случае $A_{44} \neq 0$, то уравнения (3) предыдущего параграфа однозначно разрешимы относительно X, Y, Z. Следовательно, всякая плоскость (1), проходящая через центр, есть диаметральная плоскость, сопряженная с вполне определенным направлением (X, Y, Z).

Всякая *прямая, проходящая через центр, называется диаметром.* Диаметр и диаметральная плоскость называются *сопряженными,* если диаметральная плоскость сопряжена с направлением диаметра.

Пусть Δ — некоторый диаметр не асимптотического направления. Примем его за ось Oz, а за плоскость Oxy возьмем диаметральную плоскость, сопряженную с Δ. Взяв в качестве вектора направления Δ (т. е. оси Oz) вектор (0, 0, 1), получим для диаметральной плоскости, сопряженной с Δ, по формулам (3) предыдущего параграфа $L = a_{31}$, $M = a_{32}$, $N = a_{33}$. Так как, далее, эта диаметральная плоскость должна совпадать с плоскостью Oxy, то должно быть $L = M = 0$, т. е. $a_{31} = a_{32} = 0$.

Следовательно, уравнение поверхности примет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + a_{44} = 0. \qquad (2)$$

Пересечем поверхность какою-либо плоскостью $z = h$, параллельной Oxy. Подставляя $z = h$ в предыдущее уравнение, получим

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + C = 0, \qquad (3)$$

где $C = a_{44} + a_{33}h^2$. Уравнение (3) представляет на плоскости Oxy проекцию линии пересечения на плоскость Oxy, взятую параллельно Oz. Мы видим, что линия (3) — центральная, с центром в O. Следовательно, линия пересечения нашей поверхности с плоскостью $z = h$ — центральная, с центром на оси Oz.

Отсюда мы выводим заключение: *диаметр* (неасимптотического направления) *есть геометрическое место центров линий пересечения поверхности с плоскостями, параллельными диаметральной плоскости, с которою данный диаметр сопряжен.*

Аналогичные предложения (с некоторыми видоизменениями) имеют место и для нецентральных поверхностей. Во всех случаях диаметрами называют прямые, проходящие через (собственный или несобственный) центр.

274. Диаметральные плоскости как полярные плоскости несобственных точек. Аналогично изложенному в § 232, можно определить диаметральную плоскость, сопряженную с направлением (X, Y, Z), как полярную плоскость несобственной точки $(X, Y, Z, 0)$. Так же точно центр можно рассматривать как полюс несобственной плоскости.

Из этих новых определений можно легко вывести все свойства диаметральных плоскостей и центра, выведенные выше иным путем. Но на этом мы здесь останавливаться не будем.

275. Асимптоты. *Асимптотой* поверхности второго порядка Γ называется всякая прямая, обе точки пересечения которой с Γ совпадают в несобственной точке. Иными словами, асимптота есть касательная к Γ в несобственной точке.

Пусть N — некоторая точка пространства, Π — ее полярная плоскость относительно Γ и γ — пересечение Π и Γ. Касательные, проведенные из N к Γ, соединяют N с точками γ. Те из касательных, которые касаются Γ в несобственных точках, должны проходить через те точки γ, которые находятся на несобственной плоскости. Таких точек, вообще говоря, две (точки пересечения γ с несобственной плоскостью). Следовательно, из данной произвольной точки можно провести, вообще говоря, две асимп

тоты поверхности Г. Но если N находится в центре поверхности, то плоскость П (полярная плоскость точки N относительно Г) есть несобственная плоскость; линия γ — целиком несобственная, и всякая прямая, проведенная через N и любую точку γ, будет асимптотой.

Следовательно, асимптоты, проведенные из центра, образуют конус, называемый *асимптотическим конусом*. Это, очевидно, конус асимптотических направлений, проведенных из центра. Не надо, конечно, забывать, что асимптоты могут быть мнимыми, а также несобственными.

III. МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА. ГЛАВНЫЕ ДИАМЕТРАЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К НОРМАЛЬНОМУ ВИДУ

Во всем этом отделе, посвященном метрическим свойствам, координаты предполагаются прямоугольными, если противное не оговорено.

276. Главные диаметральные плоскости и главные направления. Направление (X, Y, Z) называется *главным* (по отношению к данной поверхности второго порядка), если диаметральная плоскость, сопряженная с ним, перпендикулярна к нему. Соответствующая диаметральная плоскость также называется главной. Она, очевидно, является плоскостью симметрии поверхности.

Разыскание главных направлений есть одна из важнейших задач в метрической теории поверхностей второго порядка, и мы теперь приступаем к решению этого вопроса.

Мы знаем из § 272, что уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением (X, Y, Z), имеет вид

$$Lx + My + Nz + K = 0, \tag{1}$$

где (мы пишем теперь индексы в другом порядке)

$$\left.\begin{aligned} L &= a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ M &= a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ N &= a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для того чтобы направление (X, Y, Z) было главным, т. е. плоскость (1) была перпендикулярна направлению (X, Y, Z), необходимо и достаточно, чтобы величины L, M, N были пропорциональны величинам X, Y, Z, т. е. чтобы имели место соотношения

$$L = \lambda X, \quad M = \lambda Y, \quad N = \lambda Z, \tag{3}$$

где λ — некоторое число; или, подробнее,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z &= \lambda X, \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z &= \lambda Y, \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z &= \lambda Z, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

или еще (перенося все члены в левую часть)

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z &= 0, \\ a_{21}X + (a_{22} - \lambda)Y + a_{23}Z &= 0, \\ a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33} - \lambda)Z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Таким образом величины X, Y, Z должны удовлетворять системе уравнений (4а). Если определитель

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \tag{5}$$

этой системы отличен от нуля, то единственным решением ее является $X=0$, $Y=0$, $Z=0$. Но, по условию, X, Y, Z (координаты вектора направления) не должны равняться нулю одновременно. Значит, число λ должно удовлетворять уравнению

$$D(\lambda)=0. \tag{6}$$

Это уравнение третьей степени, ибо $D(\lambda)$ есть, очевидно, полином третьей степени:

$$D(\lambda)=S_0\lambda^3+S\lambda^2+S'\lambda+S''.$$

Нетрудно вычислить коэфициенты этого полинома. Действительно, очевидно, что члены, содержащие λ^3 и λ^2, произойдут исключительно от произведения членов главной диагонали определителя $D(\lambda)$, т. е. от

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda).$$

Отсюда ясно, что коэфициент при λ^3 равен -1, а коэфициент при λ^2 есть $a_{11}+a_{22}+a_{33}$. Далее, свободный член S'' в $D(\lambda)$ равен $D(0)$; значит,

$$S''=D(0)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель есть дискриминант формы $\varphi(x, y, z)$, который мы условились обозначать через A_{44}. Легко также найти выражение для S', но оно нам не понадобится.

Итак, имеем

$$D(\lambda)=-\lambda^3+S\lambda^2+S'\lambda+A_{44}, \tag{7}$$

где, в частности,

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33}. \tag{8}$$

Пусть λ обозначает один из корней уравнения [1]) $D(\lambda)=0$. Если теперь в системе (4а) подразумевать под λ это значение, то система эта будет, как известно, допускать решения (X, Y, Z), отличные от нуля. Таких решений будет даже бесчисленное множество, ибо если (X, Y, Z) есть одно какое-либо решение, то (kX, kY, kZ), где k — совершенно произвольный множитель, будет, очевидно, также решением.

Однако два решения, отличающиеся друг от друга только общим множителем, мы не будем считать различными [2]).

---

[1]) Ниже будет показано, что все корни уравнения $D(\lambda)=0$ действительные. Но мы пока этим фактом не пользуемся.

[2]) Решение (kX, kY, kZ) дает, очевидно, то же направление, что и (X, Y, Z). Поэтому-то мы условились не считать различными решения, отличающиеся общим множителем.

Предположим, в частности, что λ есть действительный корень уравнения $D(\lambda)=0$. Тогда, очевидно, соответствующая система (4а) допускает действительное решение (X, Y, Z), ибо все коэфициенты этой системы — действительные числа.

Направление, характеризуемое вектором (X, Y, Z), будет одним из искомых главных направлений. Исключение может представить только тот случай, когда направление (X, Y, Z) окажется асимптотическим, ибо в этом случае ему не соответствует диаметральная плоскость в собственном смысле этого слова. Однако мы условимся называть главным направлением всякое направление, коэфициенты (X, Y, Z) которого удовлетворяют системе (4) или (4а); мы будем говорить, что это направление соответствует данному корню λ уравнения $D(\lambda)=0$.

Мы видели, что каждому (действительному) корню λ соответствует по крайней мере одно главное направление. Мы увидим ниже, что данному корню, вообще говоря, будет соответствовать только одно главное направление. Но в некоторых случаях данному корню может соответствовать и бесчисленное множество главных направлений.

277. Некоторые общие предложения о преобразовании квадратичной формы трех переменных. Для облегчения чтения дальнейшего мы изложим здесь (иногда приводя и доказательства) те предложения о преобразовании квадратичных форм, которые доказаны в Добавлении для общего случая. Здесь мы будем вести изложение применительно к интересующему нас случаю квадратичной формы

$$\varphi(X, Y, Z)=a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{23}YZ+ \\ +2a_{31}ZX+2a_{12}XY \tag{1}$$

трех переменных.

Начнем со следующего замечания. Определитель

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \tag{2}$$

есть дискриминант квадратичной формы

$$\psi(X, Y, Z)=\varphi(X, Y, Z)-\lambda(X^2+Y^2+Z^2). \tag{3}$$

При преобразовании прямоугольных координат величины X, Y, Z преобразуются, как мы знаем, подстановкой вида

$$\left.\begin{aligned} X&=l_1X'+l_2Y'+l_3Z', \\ Y&=m_1X'+m_2Y'+m_3Z', \\ Z&=n_1X'+n_2Y'+n_3Z', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем

$$X^2+Y^2+Z^2=X'^2+Y'^2+Z'^2,$$

т. е. подстановка (4) — ортогональная. Значит, определитель подстановки

$$\Delta=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}=\pm 1; \tag{5}$$

это было доказано уже в § 71[1]).

При преобразовании (4) квадратичная форма $\varphi(X, Y, Z)$ преобразуется в форму

$$\varphi'(X', Y', Z') = a'_{11}X'^2 + a'_{22}Y'^2 + a'_{33}Z'^2 + 2a'_{23}Y'Z' + \\ + 2a'_{32}Z'X' + 2a'_{12}X'Y', \tag{1a}$$

где $a'_{11}, \ldots, a'_{33}$ выражаются вполне определенным образом через коэфициенты первоначальной формы $\varphi(X, Y, Z)$ и коэфициенты $l, \ldots, n_3$ подстановки (4), и форма ψ преобразуется в форму

$$\psi'(X', Y', Z') = \varphi'(X', Y', Z') - \lambda(X'^2 + Y'^2 + Z'^2). \tag{3a}$$

Дискриминанты форм (3) и (3а) равны между собою, на основании сказанного в Добавлении (§ 14). Значит,

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix} \tag{6}$$

при *всяких* λ. Итак, $D(\lambda)$ есть инвариант при ортогональных подстановках, т. е. *ортогональный инвариант*. Если раскрыть этот определитель и расположить по степеням λ, т. е. написать (см. предыдущий параграф):

$$D(\lambda) = -\lambda^3 + S\lambda^2 + S'\lambda + A_{44}, \tag{7}$$

то S, S', A_{44} также должны быть инвариантами. Отметим, в частности, два инварианта

$$A_{44} \quad \text{и} \quad S = a_{11} + a_{22} + a_{33}. \tag{8}$$

Инвариантами являются также корни уравнения $D(\lambda) = 0$, ибо уравнение это остается неизменным.

Далее, весьма важно отметить, что *ранг определителя* $D(\lambda)$ также *остается неизменным при преобразованиях* (4); доказательство см. в Добавлении, § 11. Напомним, наконец, что (как показано в § 11 Добавления), система линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial X} &= (a_{11}-\lambda)X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial Y} &= a_{21}X + (a_{22}-\lambda)Y + a_{23}Z = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial Z} &= a_{31}X + a_{32}Y + (a_{33}-\lambda)Z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

после подстановки (2) переходит в систему, эквивалентную следующей:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial X} &= (a'_{11}-\lambda)X' + a'_{12}Y' + a'_{13}Z' = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial Y} &= a'_{21}X' + (a'_{22}-\lambda)Y' + a'_{23}Z' = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\psi'}{\partial Z} &= a'_{31}X' + a'_{32}Y' + (a'_{33}-\lambda)Z' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

[1]) См. еще Добавление, § 14

Это значит, если X, Y, Z удовлетворяют системе (9), то величины X', Y', Z', связанные с ними подстановкой (4), удовлетворяют системе (9а), и обратно, если X', Y', Z' удовлетворяют системе (9а), то соответствующие X, Y, Z удовлетворяют системе (9).

278. Свойства корней уравнения $D(\lambda)=0$ и соответствующих главных направлений. Теперь мы переходим к доказательству ряда предложений о корнях уравнения $D(\lambda)=0$ и соответствующих главных направлениях.

1. *Все корни уравнения $D(\lambda)=0$ — действительные.* В самом деле, пусть наше уравнение имеет мнимый (комплексный) корень $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Тогда, на основании известной теоремы алгебры, оно будет иметь также сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Пусть X_1, Y_1, Z_1 — какое-либо решение системы (4а) или (4) § 276, соответствующие значению $\lambda = \lambda_1$, т. е. пусть

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}Y_1 + a_{13}Z_1 &= \lambda_1 X_1, \\ a_{21}X_1 + a_{22}Y_1 + a_{23}Z_1 &= \lambda_1 Y_1, \\ a_{31}X_1 + a_{32}Y_1 + a_{33}Z_1 &= \lambda_1 Z_1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Пусть X_2, Y_2, Z_2 — числа, соответственно сопряженные с числами X_1, Y_1, Z_1. Числа эти будут, очевидно, удовлетворять системе

$$\left.\begin{aligned} a_{11}X_2 + a_{12}Y_2 + a_{13}Z_2 &= \lambda_2 X_2, \\ a_{21}X_2 + a_{22}Y_2 + a_{23}Z_2 &= \lambda_2 Y_2, \\ a_{31}X_2 + a_{32}Y_2 + a_{33}Z_2 &= \lambda_2 Z_2, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

полученной из (1) путем замены фигурирующих в ней комплексных величин сопряженными. Умножим теперь уравнения (1) соответственно на X_2, Y_2, Z_2 и сложим. Тогда получим

$$(a_{11}X_1 + a_{12}Y_1 + a_{13}Z_1)X_2 + (a_{21}X_1 + a_{22}Y_1 + a_{23}Z_1)Y_2 + \\ + (a_{31}X_1 + a_{32}Y_1 + a_{33}Z_1)Z_2 = \lambda_1 (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2).$$

Поступая аналогично с системой (2), т. е. умножая уравнения (2) соответственно на X_1, Y_1, Z_1 и складывая, получим

$$(a_{11}X_2 + a_{12}Y_2 + a_{13}Z_2)X_1 + (a_{21}X_2 + a_{22}Y_2 + a_{23}Z_2)Y_1 + \\ + (a_{31}X_2 + a_{32}Y_2 + a_{33}Z_2)Z_1 = \lambda_2 (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2).$$

Левые части двух предыдущих равенств, очевидно, тождественны в силу того, что $a_{ij} = a_{ji}$. Поэтому, вычитая эти равенства, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2) = 0. \quad (3)$$

Но величина $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$ необходимо отлична от нуля[1]). Значит, должно быть $\lambda_1 - \lambda_2 = (\alpha + \beta i) - (\alpha - \beta i) = 2i\beta = 0$, т. е. $\beta = 0$. Значит, величина λ_1 должна быть действительной, а это и требовалось доказать.

---

[1]) Произведение комплексного числа $\alpha + i\beta$ на сопряженное $\alpha - i\beta$ равно $\alpha^2 + \beta^2$. Значит, если данное число не нуль, то произведение это будет положительным.

2. *Главные направления, соответствующие двум различным корням уравнения* $D(\lambda)$, *взаимно перпендикулярны.*

Действительно, пусть λ_1 и λ_2 два различных корня уравнения $D(\lambda)=0$; теперь мы знаем, что эти корни — действительные. Пусть (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) — направления, соответствующие этим корням. Величины эти удовлетворяют соответственно системам (1) и (2), из которых, как мы видели, вытекает равенство (3). Но так как по условию $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$, то необходимо

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0, \tag{4}$$

а это есть как раз условие перпендикулярности векторов (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2).

3. *Если все три корня уравнения* $D(\lambda)=0$ *различны, то каждому корню, соответствует только одно главное направление, так что имеются три и только три главных направления* (которые, на основании предыдущей теоремы, будут взаимно перпендикулярны). *Если направить новые оси координат* Ox', Oy', Oz' *параллельно этим трем главным направлениям, то квадратичная форма*

$$\varphi(X, Y, Z)=a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{23}YZ+2a_{31}ZX+2a_{12}XY$$

приведется к „каноническому виду“:

$$\varphi'(X', Y', Z')=\lambda_1X'^2+\lambda_2Y'^2+\lambda_3Z'^2.$$

Действительно, мы знаем, что каждому из корней λ_1, λ_2, λ_3 соответствует по крайней мере по одному главному направлению. Если данному корню соответствует несколько главных направлений (ниже мы увидим, что этого быть не может), то возьмем какое-либо одно из них, так что будем иметь три (взаимно перпендикулярных) направления (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3), соответствующих трем корням λ_1, λ_2, λ_3.

Направим оси Ox', Oy', Oz' новой системы соответственно параллельно этим направлениям. Тогда квадратичная форма $\varphi(X, Y, Z)$ перейдет в квадратичную форму новых переменных X', Y', Z', которую мы обозначим так:

$$\varphi'(X', Y', Z')=a'_{11}X'^2+\ldots+2a'_{12}X'Y'.$$

Если X'_1, Y'_1, Z'_1 суть новые координаты вектора X_1, Y_1, Z_1, то они должны удовлетворять системе (см. конец предыдущего параграфа)

$$\left.\begin{aligned}(a'_{11}-\lambda_1)X'_1+a'_{12}Y'_1+a'_{13}Z'_1&=0,\\ a'_{21}X'_1+(a'_{22}-\lambda_1)Y'_1+a'_{23}Z'_1&=0,\\ a'_{31}X'_1+a'_{32}Y'_1+(a'_{33}-\lambda_1)Z'_1&=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Но ведь при новой системе осей вектор X'_1, Y'_1, Z'_1 параллелен оси Ox', т. е. мы должны иметь $X'_1\neq 0$, $Y'_1=Z'_1=0$.

Подставляя эти значения в (5), получаем

$$(a'_{11}-\lambda_1)X'_1=0,\quad a'_{21}X'_1=0,\quad a'_{31}X'_1=0,$$

откуда следует

$$a'_{11}=\lambda_1,\quad a'_{21}=0,\quad a'_{31}=0. \tag{6}$$

Так же докажем, что $a'_{22} = \lambda_2$, $a'_{33} = \lambda_3$ и что все коэфициенты, содержащие различные индексы, обращаются в нуль. Таким образом форма φ' имеет вид

$$\varphi'(X', Y', Z') = \lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2 \qquad (7)$$

(*канонический вид*).

Система уравнений (4а) § 276, определяющая главные направления, составленная применительно к новой системе осей, т. е. применительно к форме (7), принимает вид

$$(\lambda_1 - \lambda) X' = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda) Y' = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda) Z' = 0.$$

Эта система может иметь решения только при λ, равном одному из значений λ_1, λ_2, λ_3, что мы уже знали раньше. Но отсюда вытекает еще такое следствие.

При $\lambda = \lambda_1$ система эта обращается в следующую:

$$0 \cdot X = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda_1) Y' = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda_1) Z' = 0.$$

Так как $\lambda_2 - \lambda_1$ и $\lambda_3 - \lambda_1$, по условию, отличны от нуля, то необходимо $Y' = Z' = 0$; величина же X' остается произвольной; мы ее должны взять отличной от нуля, ибо иначе было бы

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

Значит, корню $\lambda = \lambda_1$ отвечает одно и только одно направление $(X', 0, 0)$, т. е. направление оси Ox'. Так же точно докажем, что корням λ_2 и λ_3 отвечает только по одному направлению (а именно, направления осей Oy' и Oz').

Таким образом наше предложение 3 доказано вполне. Оно является частным случаем предложения, изложенного в следующем пункте.

4. *Каждому простому корню уравнения $D(\lambda) = 0$ соответствует одно, вполне определенное главное направление. Двойному корню соответствует бесчисленное множество главных направлений* (а именно, главными направлениями, соответствующими двойному корню, будут все направления, перпендикулярные к главному направлению, которое соответствует корню, отличному от данного двойного); наконец, *если уравнение имеет один тройной корень, то все направления будут главными. Во всех случаях существует по крайней мере одна тройка взаимно перпендикулярных главных направлений и если придать новым осям координат эти направления, то форма φ обратится в форму*

$$\varphi' = \lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2, \qquad (8)$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни уравнения $D(\lambda) = 0$, которые могут быть и равными между собою.

Докажем это предложение. Пусть λ_3 один какой-нибудь корень уравнения $D(\lambda) = 0$, все равно, простой или кратный. Возьмем новую систему осей, направив Oz' параллельно главному направлению, соответствующему этому корню (или параллельно одному из них, если таких направлений несколько); оси Ox' и Oy' направим произвольно (но так, разумеется, чтобы они были перпендикулярны к Oz' и между собою).

Тогда совершенно так же, как при доказательстве предыдущего предложения, найдем, что

$$a'_{33} = \lambda_3, \quad a'_{13} = 0, \quad a'_{23} = 0.$$

Значит, при данном выборе осей будем иметь

$$\varphi'(X', Y', Z') = \lambda_3 Z'^2 + a'_{11}X'^2 + 2a'_{12}X'Y' + a'_{22}Y'^2.$$

Но из предыдущего мы знаем [1]), что путем подходящего поворота осей $Ox'y'$ в их плоскости (при этом координата Z' не изменяется) квадратичную форму двух переменных

$$a_{11}X'^2 + 2a_{12}X'Y' + a_{22}Y'^2$$

можно привести к каноннческому виду

$$\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2.$$

Мы для простоты снова обозначили через X', Y' новые координаты относительно повернутой системы. Итак, путем подходящего выбора осей квадратичная форма φ приводится к каноническому виду

$$\varphi' = \lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2.$$

Относительно λ_1 и λ_2 мы пока не знаем, являются ли они корнями уравнения $D(\lambda) = 0$. Но это весьма легко показать. Действительно, составляя определитель $D(\lambda)$ применительно к форме φ', получим тождество [2])

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda).$$

Следовательно, λ_1, λ_2, λ_3 суть корни уравнения $D(\lambda) = 0$,

Рассмотрим теперь отдельно три случая.

а) Все корни λ_1, λ_2, λ_3 различны. В этом случае, как мы уже знаем, каждому корню соответствует только одно главное направление; это вытекает также из нижеследующего.

Для нахождения координат X_1, Y_1, Z_1 главного направления (в старой системе осей), соответствующего корню λ_1, следует решить систему

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)X_1 + a_{12}Y_1 + a_{13}Z_1 &= 0, \\ a_{21}X_1 + (a_{22} - \lambda_1)Y_1 + a_{23}Z_1 &= 0, \\ a_{31}X_1 + a_{32}Y_1 + (a_{33} - \lambda_1)Z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ранг определителя $D(\lambda_1)$ этой системы равен двум, ибо определи-

---

[1]) Это доказано в § 253. Независимо от доказанного в § 253 можно доказать упомянутое предложение, применяя прием, изложенный в настоящем параграфе, к квадратичной форме двух переменных

$$\varphi(X, Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2.$$

[2]) Вспомним, что определитель $D(\lambda)$ остается неизменным при преобразовании координат.

тель $D(\lambda_1)$, составленный применительно к преобразованной форме (8), есть

$$D(\lambda_1)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

и ранг его [1]), очевидно, равен двум, ибо $D(\lambda_1)=0$, а определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)$$

отличен от нуля, ибо λ_1, λ_2, λ_3 различны, по предположению.

Значит, одно из уравнений системы (9) есть следствие двух других, которые дают вполне определенные значения для отношения величин X_1, Y_1, Z_1, т. е. вполне определенное главное направление.

Так же найдем главные направления, соответствующие корням λ_1 и λ_2. Эти три направления, как мы знаем, будут взаимно перпендикулярными.

b) Два корня λ_1 и λ_2 равны между собою, а третий λ_3 не равен им:

$$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3.$$

При $\lambda=\lambda_3$ мы получим, как и в предыдущем случае, вполне определенное главное направление (X_3, Y_3, Z_3).

При $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ ранг определителя $D(\lambda_1)$ системы (9) будет равен 1, ибо определитель $D(\lambda_1)$, составленный применительно к преобразованной форме, будет

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix},$$

и ранг его, очевидно, равен 1.

Значит, в системе (9), два из уравнений будут следствиями одного единственного, которое мы, для краткости, запишем так:

$$AX+BY+CZ=0. \tag{10}$$

Мы получаем, таким образом, бесчисленное множество главных направлений, соответствующих двойному корню $\lambda_1=\lambda_2$. Этими направлениями будут, очевидно, все направления, перпендикулярные вектору (A, B, C). Но так как все эти направления должны быть перпендикулярны к вектору (X_3, Y_3, Z_3), то выходит, что векторы (A, B, C) и (X_3, Y_3, Z_3) параллельны и что главными направлениями, соответствующими двойному корню $\lambda_1=\lambda_2$, являются те и только те направления, которые перпендикулярны к направлению (X_3, Y_3, Z_3), соответствующему простому корню λ_3. Выбрав произвольным образом одно из них (X_1, Y_1, Z_1) и затем взяв какой-нибудь вектор (X_2, Y_2, Z_2), перпендикулярный к обоим векторам (X_1, Y_1, Z_1) и (X_3, Y_3, Z_3), получим

[1]) Вспомним, что ранг $D(\lambda)$ не меняется при преобразовании.

тройку взаимно перпендикулярных направлений. Взяв оси координат параллельными этим направлениям, приведем форму φ к каноническому виду (8).

с) Наконец, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то ранг определителя системы (9) равен нулю, ибо все элементы определителя $D(\lambda_1)$, составленного применительно к преобразованной форме (8), будут равны нулю. Значит, система (9) удовлетворяется тождественно всяким направлением (X, Y, Z); всякое направление будет главным. В этом случае форма φ имеет канонический вид (8) при всяком выборе (прямоугольных) осей координат, в частности, и в исходной системе.

Итак, мы имеем следующую алгебраическую теорему: *При помощи ортогональной подстановки, всякая квадратичная форма трех переменных может быть приведена к каноническому виду*

$$\varphi = \lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \lambda_3 Z'^2,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — *корни уравнения* $D(\lambda) = 0$, *все действительные.* Вместе с тем мы имеем способ действительно произвести указанные преобразования.

279. Преобразование уравнения поверхности при замене декартовых координат. В следующих параграфах мы займемся упрощением уравнения поверхности второго порядка путем замены прямоугольных координат. Предварительно заметим следующие обстоятельства (сказанное в этом параграфе справедливо и в случае декартовых координат общего вида):

1°. При переносе начала координат

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma$$

полином $F(x, y, z)$ изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x' + \alpha, y' + \beta, z' + \gamma) = {} & a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + \\ & + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + 2F_1(\alpha, \beta, \gamma)x' + \\ & + 2F_2(\alpha, \beta, \gamma)y' + 2F_3(\alpha, \beta, \gamma)z' + F(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \tag{1}$$

т. е. *при переносе начала координат в точку* (α, β, γ) *полином* $F(x, y, z)$ *преобразуется так: коэфициенты при членах второго измерения остаются без изменения; коэфициенты при первых степенях новых переменных* x', y', z' *равны соответственно значениям частных производных* $2F_1$, $2F_2$, $2F_3$ в точке (α, β, γ); наконец, *свободный член есть значение полинома* $F(x, y, z)$ *в той же точке.*

2°. Не выписывая формул, дающих изменение коэфициентов полинома $F(x, y, z)$ при изменении координатных векторов, без изменения начала, заметим только, что в этом случае свободный член остается без изменения, члены второго измерения преобразованного полинома происходят исключительно от членов второго измерения первоначального, и аналогично ведут себя члены первого измерения.

280. Ортогональные инварианты. Так же, как и в случае линий второго порядка, основную роль в вопросе преобразования уравнения поверхности второго порядка играют *инварианты.*

Прежде всего легко показать, что „большой дискриминант" полинома $F(x, y, z)$ — так мы будем называть дискриминант A формы

$\Phi(x, y, z, t)$ — есть инвариант при преобразовании прямоугольных координат. Действительно, мы знаем, что формулы перехода имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + \alpha, \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + \beta, \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где α, β, γ — координаты нового начала O', а (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) — косинусы направления новых осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ относительно старых.

Рассмотрим наряду с ними подстановку:

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x' + l_2y' + l_3z' + \alpha t, \\ y &= m_1x' + m_2y' + m_3z' + \beta t, \\ z &= n_1x' + n_2y' + n_3z' + \gamma t, \\ t &= t'. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

При $t = t' = 1$ получим подстановку (1), и форма Φ обратится в полином $F(x, y, z)$.

Определитель подстановки (1а) равен

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & \alpha \\ m_1 & m_2 & m_3 & \beta \\ n_1 & n_2 & n_3 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{2}$$

Отсюда заключаем, что дискриминант A есть инвариант, ибо при преобразовании формы $\Phi(x, y, z, t)$ подстановкой (1а) дискриминант, как мы знаем, умножается на квадрат определителя подстановки, который равен единице.

Далее, мы знаем, что дискриминант квадратичной формы

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy, \tag{3}$$

представляющей собою совокупность членов второго измерения в полиноме $F(x, y, z)$, т. е. определитель

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

[„малый дискриминант" полинома $F(x, y, z)$] есть инвариант при подстановках вида (1), если $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Но, очевидно, величины α, β, γ вовсе не влияют на коэфициенты членов второго измерения. Значит, A_{44} есть инвариант при всякой подстановке вида (1).

Кроме того, мы видели, что корни λ_1, λ_2, λ_3 уравнения

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

также остаются неизменными. Значит, λ_1, λ_2, λ_3 суть инварианты (в противоположность инвариантам A, A_{44} — это иррациональные инварианты).

Итак, мы нашли следующие *ортогональные инварианты* полинома $F(x, y, z)$ (т. е. инварианты при преобразовании *прямоугольных* осей):

$$A, \quad A_{44}, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3. \tag{6}$$

Ранги определителей A и A_{44} также остаются неизменными, и их поэтому следует причислить к инвариантам.

Мы увидим, что перечисленные инварианты вполне определяют вид поверхности (1).

Замечание. Легко видеть, что

$$A_{44} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3, \tag{7}$$

ибо A_{44} есть свободный член уравнения (5), т. е. уравнения (7) § 277. Это следует еще из того, что, составляя инвариант A_{44} применительно к форме φ, приведенной к каноническому виду $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$, будем иметь

$$A_{44} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

281. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. I. Центральные поверхности. Начнем с поверхностей, имеющих определенный (собственный) центр, т. е. таких, что

$$A_{44} \neq 0. \tag{1}$$

Пусть $O'(\alpha, \beta, \gamma)$ — центр поверхности, который мы умеем находить. Перенеся начало координат в эту точку, т. е., произведя подстановку

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma,$$

мы приведем $F(x, y, z)$ к виду (§ 271)

$$\left.\begin{aligned} F'(x', y', z') = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + \\ + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + a'_{44}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где исчезнут члены, содержащие первые степени координат. Мы знаем, кроме того (§ 279), что $a'_{14} = F(\alpha, \beta, \gamma)$. Но легко найти a'_{44}, и не вычисляя $F(\alpha, \beta, \gamma)$. Действительно, составляя инвариант A применительно к полиному (2), получим

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} \end{vmatrix} = a'_{44} A_{44} \text{ и, значит, } a'_{44} = \frac{A}{A_{44}}.$$

Итак, при перенесении начала в центр, уравнение $F(x, y, z) = 0$ приводится к виду

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + 2a_{12}x'y' + \frac{A}{A_{44}} = 0. \tag{3}$$

Далее, найдем три главных взаимно перпендикулярных направления

нашей поверхности, по правилам, указанным в § 278, и возьмем новые оси $O'\xi$, $O'\eta$, $O'\zeta$ по этим направлениям, оставляя начало неизменным. Подставив вместо x', y', z' их выражения через ξ, η, ζ, мы приведем уравнение (3) к виду

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2+\frac{A}{A_{44}}=0 \qquad (4)$$

(свободный член не изменяется, так как, при повороте осей, x', y', z' — суть линейные и однородные функции от ξ, η, ζ). Так как $A_{44}\neq 0$, то λ_1, λ_2, λ_3 — все отличны от нуля, ибо $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=A_{44}$ [1]).

Пусть сперва $A\neq 0$. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$k_1\xi^2+k_2\eta^2+k_3\zeta^2=1, \qquad (5)$$

где

$$k_1=-\frac{\lambda_1 A_{44}}{A},\quad k_2=-\frac{\lambda_2 A_{44}}{A},\quad k_3=-\frac{\lambda_3 A_{44}}{A}. \qquad (6)$$

Вид поверхности зависит от знаков величин k_1, k_2, k_3. Могут представиться следующие случаи.

a) k_1, k_2, k_3 все положительны. Полагая

$$k_1=\frac{1}{a^2},\quad k_2=\frac{1}{b^2},\quad k_3=\frac{1}{c^2},$$

получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1;$$

это — уравнение *действительного эллипсоида* (см. § 269, 1°); в самом деле, поверхность эта — нераспадающаяся ($A\neq 0$) и имеет действительные точки. Линия γ_∞ (§ 269) имеет уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=0;$$

она — нераспадающаяся и мнимая.

b) k_1, k_2, k_3 все три отрицательны. Тогда, подобно предыдущему, получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=-1,$$

это, очевидно — уравнение *мнимого эллипсоида*.

c) Одно из чисел k_1, k_2, k_3 отрицательно, другие положительны. Мы можем считать (изменив, если нужно, нумерацию), что $k_1>0$, $k_2>0$, $k_3<0$. Полагая

$$k_1=\frac{1}{a^2},\quad k_2=\frac{1}{b^2},\quad k_3=-\frac{1}{c^2},$$

получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$

это — уравнение *однополостного гиперболоида* (см. § 269, 2°). В самом

[1]) См. § 280, замечание.

деле, эта поверхность принадлежит к категории (a_3) § 264, ибо в однородных координатах (ξ, η, ζ, τ) ее уравнение напишется так:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}-\tau^2=0;$$

линия γ_∞ имеет уравнение

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0;$$

она — нераспадающаяся действительная.

d) Два числа k_1, k_2, k_3 отрицательны, одно — положительно. Мы можем, например, считать $k_1<0$, $k_2<0$, $k_3>0$. Полагая

$$k_1=-\frac{1}{a^2},\quad k_2=-\frac{1}{b^2},\quad k_3=\frac{1}{c^2},$$

получим уравнение

$$-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,.$$

т. е. уравнение *двухполостного гиперболоида* (см. § 269, 2°), как легко убедиться (ср. предыдущий случай).

Пусть теперь $A=0$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2=0$$

и, в зависимости от знаков λ_1, λ_2, λ_3, получим, подобно предыдущему, уравнения одного из двух видов

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

(*мнимый конус*; в этом случае λ_1, λ_2, λ_3 — все одного знака), или

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

(*действительный конус*; в этом случае λ_1, λ_2, λ_3 не все одного знака).

Этим исчерпываются поверхности второго порядка, имеющие определенный центр.

282. Приведение уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 2. Поверхности без определенного центра. Предположим теперь, что

$$A_{44}=0, \tag{1}$$

т. е. что поверхность или не имеет центра[1]) или имеет их бесчисленное множество. В этом случае один или два корня уравнения $D(\lambda)=0$ равны нулю, ибо, как мы знаем, $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=A_{44}$. Будем считать, что $\lambda_3=0$.

Теперь мы начнем с того, что найдем три главных взаимно перпендикулярных направления и повернем оси координат так, чтобы они сде-

---

[1]) То-есть центр несобственный.

лались параллельными этим направлениям. Тогда совокупность членов второго измерения примет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

а уравнение $F(x, y, z) = 0$ преобразуется в следующее:

$$F'(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0 \quad (2)$$

(свободный член не изменится, ибо мы производим поворот осей без изменения начала). Составляя дискриминант A для преобразованного полинома $F'(x', y', z')$, получим

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix} = -a'^2_{34}\lambda_1\lambda_2. \quad (3)$$

Пусть сперва $A \neq 0$. Тогда $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_{34} \neq 0$.

Перенося начало координат в некоторую точку (α, β, γ), т. е., полагая $x' = \xi + \alpha$, $y' = \eta + \beta$, $z' = \zeta + \gamma$, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + 2a'_{34}\zeta + 2(a'_{14} + \lambda_1\alpha)\xi + 2(a'_{24} + \lambda_2\beta)\eta + a_{44} + \lambda_1\alpha^2 + \\ + \lambda_2\beta^2 + 2a'_{14}\alpha + 2a'_{24}\beta + 2a'_{34}\gamma = 0.$$

Подберем теперь α, β и γ так, чтобы $\lambda_1\alpha + a'_{14} = 0$, $\lambda_2\beta + a'_{24} = 0$,

$$a_{44} + \lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 + 2a'_{14}\alpha + 2a'_{24}\beta + 2a'_{34}\gamma = 0.$$

Это всегда можно сделать: первые два из предыдущих условий определяют α и β, а третье [1]) определяет γ. После этого наше уравнение примет вид

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + 2a'_{34}\zeta = 0. \quad (4)$$

Если λ_1 и λ_2 одного знака (это будет при $A < 0$), то (переменив, в случае надобности, направление оси ζ на обратное) можно считать, что

$$\frac{1}{p} = -\frac{\lambda_1}{a'_{34}} > 0, \quad \frac{1}{q} = -\frac{\lambda_2}{a'_{34}} > 0,$$

и уравнение (4) примет вид

$$\frac{\xi^2}{p} + \frac{\eta^2}{q} = 2\zeta;$$

соответствующая поверхность — *эллиптический параболоид.*

---

[1]) Третье условие, в силу первых двух, упрощается и сводится к следующему:

$$a_{44} + a'_{14}\alpha + a'_{24}\beta + 2a'_{34}\gamma = 0.$$

Действительно, в нашем случае линия γ_∞ (см. § 269, 3°)

$$\frac{\xi^2}{p}+\frac{\eta^2}{q}=0$$

распадающаяся и мнимая.

Если λ_1 и λ_2 — различных знаков (это будет при $A>0$), то таким же способом получим уравнение

$$\frac{\xi^2}{p}-\frac{\eta^2}{q}=2\zeta,$$

т. е. уравнение *гиперболического параболоида*, ибо линия γ_∞ распадающаяся и действительная (§ 269, 4°). Так как на основании (3)

$$a'_{34}=\pm\sqrt{-\frac{A}{\lambda_1\lambda_2}}, \tag{3a}$$

то p и q можно вычислить, не производя преобразования координат.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $A=0$. В этом случае $a'^2_{34}\lambda_1\lambda_2=0$.

Значит, одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, a'_{34}$ равно нулю. Если λ_1 и λ_2 оба отличны от нуля, $a'_{34}=0$, и уравнение (2) обращается в уравнение с двумя переменными x, y; значит, оно изображает цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz. В частности, цилиндр этот может распадаться на две плоскости (действительные или мнимые). Исключая этот случай (он характеризуется тем, как мы знаем, что ранг определителя A равен 1 или 2) будем иметь один из следующих случаев:

1) λ_1 и λ_2 одного знака; тогда уравнение (2) представляет, очевидно, на плоскости Oxy, эллипс и путем переноса начала координат ему можно придать вид

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=\pm 1.$$

В этом случае поверхность — *эллиптический цилиндр* (действительный или мнимый).

2) λ_1 и λ_2 различных знаков; тогда получим аналогично

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1,$$

т. е. *гиперболический цилиндр*.

3) Одно из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю [1]); тогда мы будем иметь *параболический цилиндр* или *совокупность двух параллельных плоскостей* (действительных или мнимых). В самом деле, наше уравнение (2) приводится к виду (если, например, $\lambda_1=0$)

$$\lambda_2 y'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a_{44}=0.$$

Возьмем новую систему осей $O\xi\eta\zeta$ такую, что $O\eta$ совпадает с Oy', а система $O\xi\zeta$ повернута относительно системы $Ox'z'$ на угол α.

Тогда будем иметь

$$y'=\eta,\quad x'=\xi\cos\alpha-\zeta\sin\alpha,\quad z'=\xi\sin\alpha+\zeta\cos\alpha,$$

[1]) Оба корня λ_1 и λ_2 нулю быть равны не могут, ибо в противном случае мы бы имели уравнение поверхности не второго, а первого порядка.

и предыдущее уравнение примет вид

$$\lambda_2\eta^2 + 2\xi(a'_{14}\cos\alpha + a'_{34}\sin\alpha) + 2a'_{24}\eta + 2\zeta(-a'_{14}\sin\alpha + a'_{34}\cos\alpha) + a_{44} = 0.$$

Выбирая угол α так, чтобы

$$-a'_{14}\sin\alpha + a'_{34}\cos\alpha = 0, \quad \text{т. е. } \operatorname{tg}\alpha = \frac{a'_{34}}{a'_{14}},$$

мы приведем уравнение к виду

$$\lambda_2\eta^2 + 2a''_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a_{44} = 0.$$

Если $a''_{14} \neq 0$, то мы можем, путем переноса начала в плоскости $O\xi\eta$ привести уравнение к виду

$$\eta^2 = 2p\xi$$

и поверхность — *параболический цилиндр*. Если же $a''_{14} = 0$, то, как легко видеть, поверхность есть совокупность двух параллельных плоскостей. Этот последний случай отличается от параболического тем, что ранг определителя A равен 1 или 2 (что, вообще, характеризует распадение поверхности на две плоскости).

283. Приведенне уравнения поверхности второго порядка к нормальному виду. 3. Сводка результатов. Резюмируя изложенное в предыдущих параграфах, можно сказать следующее.

1. Поверхность второго порядка распадается на две плоскости тогда и только тогда, когда ранг определителя A равен 1 или 2 [1]).

2. *Если исключить случай распадения,* то все остальные возможные случаи сводятся к указанным в нижеследующих двух таблицах, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ обозначают корни уравнения $D(\lambda) = 0$ и (в случае $A \neq 0$)

$$k_1 = -\frac{\lambda_1 A_{44}}{A}, \quad k_2 = -\frac{\lambda_2 A_{44}}{A}, \quad k_3 = -\frac{\lambda_3 A_{44}}{A}.$$

I. $A \neq 0$ (неособенные поверхности).

$A_{44} \neq 0$: Центральные поверхности (имеется *один* собственный центр).	$A_{44} = 0$: Поверхности без центра (имеется *один* несобственный центр).
1) k_1, k_2, k_3 положительны: *действительный эллипсоид.*	1) $A < 0$. *Эллиптический параболоид.*
1а) k_1, k_2, k_3 отрицательны: *мнимый эллипсоид.*	
2) Среди k_1, k_2, k_3 два положительных: *однополостный гиперболоид.*	2) $A > 0$. *Гиперболический параболоид.*
3) Среди k_1, k_2, k_3 два отрицательных: *двухполостный гиперболоид.*	

[1]) Нулю ранг равен быть не может, так как тогда все коэфициенты данного равнения должны были бы быть равны нулю.

II. $A=0$. Особенные поверхности (конусы и цилиндры).	
$A_{44}\neq 0$: Центральные поверхности (имеется один собственный центр).	$A_{44}=0$ ($\lambda_3=0$): Поверхности без определенного центра (имеется прямая центров, собственная или несобственная).
1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака: *мнимый конус*.	1) λ_1, λ_2 одного знака: *эллиптический цилиндр* (действительный или мнимый).
2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различных знаков: *действительный конус*.	2) λ_1, λ_2 различных знаков: *гиперболический цилиндр*.
	3) λ_1 или λ_2 равно нулю: *параболический цилиндр*.

Замечания. 1. Для определения, к какому из перечисленных видов принадлежит данная поверхность, нет необходимости решать уравнение $D(\lambda)=-\lambda^3+S\lambda^2+S'\lambda+A_{44}=0$; достаточно определить только знаки корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (которые, как мы знаем, всегда действительные). Определение знаков можно произвести, например, по известному правилу Декарта [1]).

2. В случае поверхности без определенного центра ($A_{44}=0$), один из корней уравнения $D(\lambda)=0$ равен нулю; два другие определяются *квадратным* уравнением: $-\lambda^2+S\lambda+S'=0$.

3. В случае распадающейся поверхности второго порядка, которая характеризуется тем, что ранг определителя A равен единице или двум, достаточно разложить полином $F(x, y, z)$ на два линейных множителя по способу, указанному в Добавлении (§ 13), для того чтобы получить уравнения плоскостей, на которые распадается поверхность.

283а. О правиле знаков Декарта. Скажем несколько слов о правиле знаков Декарта, на которое мы сослались в замечании 1 к таблицам предыдущего параграфа.

Пусть дано алгебраическое уравнение n-й степени

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0, \tag{1}$$

в котором некоторые из коэфициентов могут быть равны нулю. Если все коэфициенты отличны от нуля, то уравнение называется *полным*. Если два соседних коэфициента имеют разные знаки, то говорят, что имеет место *перемена знака*; если же два соседних коэфициента имеют одинаковые знаки, то говорят, что имеет место *постоянство знака*. При этом имеются в виду только коэфициенты, отличные от нуля. Например, в уравнении

$$x^5-3x^3-2x^2+1=0$$

имеют место две перемены знака (первый и второй члены, третий и четвертый члены) и одно постоянство (второй и третий члены).

Пусть p — число перемен знака, а q — число постоянств. Ясно, что $p+q=m-1$, где m — число коэфициентов, отличных от нуля. В *полном* уравнении $p+q=n$.

Правило Декарта, в общем случае, гласит: *число положительных корней уравнения $f(x)=0$ равно числу перемен знака, или меньше него на четное число* [2]). Отсюда очевидно следует: число отрицательных корней равно числу

[1]) См. следующий параграф.

[2]) Доказательство этого правила дается в курсах алгебры.

перемен знака в уравнении $f(-x)=0$, или меньше него на четное число. Если $f(x)=0$ — полное уравнение, то каждой перемене знака отвечает постоянство знака в уравнении $f(-x)=0$, и каждому постоянству — перемена (ибо из двух соседних членов один всегда четной, а другой нечетной степени, так что при замене x на $-x$, один меняет знак, а другой нет). Поэтому можно в случае полного уравнения утверждать: число положительных корней равно числу перемен знака или меньше него на четное число; число же отрицательных корней равно числу постоянств знака или меньше него на четное число.

Отсюда, далее, следует: если все корни полного уравнения — действительные, то число положительных корней в точности равно числу p перемен знака, а число отрицательных — числу q постоянств[1]). Таким образом правило Декарта вполне решает вопрос о знаках корней, если данное уравнение полное и если заранее известно, что все корни его — действительные. Последнее обстоятельство как раз имеет место в интересующем нас случае характеристического уравнения $D(\lambda)=0$. Легко, далее, видеть, что в нашем случае уравнения третьей степени с действительными корнями всегда имеет место предложение: *число положительных корней в точности равно числу перемен знака.* Действительно, в случае полного уравнения, это уже доказано. В случае неполного уравнения число перемен равно 0, 1 или 2 (ибо число коэфициентов не превосходит трех). В первом и втором случае предложение очевидно. В случае же двух перемен знака, число положительных корней согласно общему правилу может быть или 2 или 0. Докажем, что последнее не может иметь место. Действительно, тогда уравнение должно было бы иметь три отрицательных корня и, следовательно, в уравнении $D(-\lambda)=0$ должно было бы быть по крайней мере три перемены знака, что невозможно, ибо уравнение — неполное. При доказательстве последнего пункта мы не учли, что наше уравнение может иметь корни, равные нулю. Но и в этом случае, как легко непосредственно проверить (мы предоставим это читателю), правило остается в силе.

---

[1]) Действительно, если бы число положительных корней было меньше p, или число отрицательных меньше q, то число всех действительных корней было бы меньше $p+q=n$, что противоречит условию

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ОТДЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ. КРУГОВЫЕ СЕЧЕНИЯ

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ОТДЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

284. Перечень нормальных уравнений отдельных поверхностей. Мы убедились в предыдущих параграфах, что самое общее уравнение поверхности второго порядка (с действительными коэфициентами) путем надлежащего выбора осей прямоугольных координат, может быть приведено к одному из нижеследующих видов (p и q обозначают положительные величины):

А. Неособенные поверхности второго порядка

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (действительный эллипсоид).

1а. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ (мнимый эллипсоид).

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (однополостный гиперболоид).

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (двухполостный гиперболоид).

4. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ (эллиптический параболоид).

5. $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ (гиперболический параболоид).

В. Нераспадающиеся особенные поверхности второго порядка

6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (действительный конус второго порядка).

6а. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (мнимый конус второго порядка).

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (действительный эллиптический цилиндр).

7а. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (мнимый эллиптический цилиндр).

8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гиперболический цилиндр).

9. $y^2=2px$ (параболический цилиндр).

С. Распадающиеся поверхности второго порядка

Распадающаяся поверхность второго порядка есть совокупность двух плоскостей, которые могут быть и мнимыми сопряженными. Плоскости могут быть параллельными, а также и совпадающими.

285. Сечения поверхностей второго порядка параллельными плоскостями. В следующих параграфах мы будем изучать форму перечисленных выше действительных поверхностей (за исключением цилиндров, ввиду простоты их формы), применяя метод сечения параллельными плоскостями.

Следующее простое предложение облегчит нам это изучение.

Линии пересечения поверхности второго порядка параллельными плоскостями подобны и, больше того, гомотетичны. Исключение может представить случай, когда в сечении получаются гиперболы; любые две такие гиперболы будут или гомотетичны или одна из них будет гомотетична с гиперболой, сопряженной с другой.

Мы имеем в виду сечения, являющиеся действительными нераспадающимися кривыми.

Действительно, возьмем плоскость Oxy параллельной нашим секущим плоскостям. Пусть

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

есть уравнение данной поверхности, а $z = h$ — уравнение секущей плоскости. Подставив $z = h$ в предыдущее уравнение, получим уравнение

$$F(x, y, h) = 0, \tag{2}$$

которому должны удовлетворять координаты x, y линии пересечения γ.

Значит, уравнение (2), рассматриваемое как уравнение линии на плоскости Oxy, представляет проекцию γ' линии пересечения на плоскость Oxy. Члены второго измерения в уравнении (2) суть

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

и не зависят, очевидно, от h. Следовательно, в уравнениях линий γ', соответствующих различным значениям h, коэфициенты при членах второго измерения одинаковы, а это и доказывает наше утверждение (см. § 260).

286. Конус второго порядка. Начнем с рассмотрения поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{1}$$

Мы знаем, что это есть конус с вершиной в начале координат.

Так как уравнение (1) содержит только квадраты переменных, очевидно, что плоскости координат являются плоскостями симметрии конуса („главные диаметральные плоскости"), оси координат — осями симметрии („оси"), а начало (вершина) — центром симметрии („центр").

Чтобы ближе изучить форму нашего конуса, пересечем его плоскостью $z = h$, параллельной плоскости Oxy (h обозначает постоянную).

В пересечении получится линия

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=0, \quad z=h,$$

проекция которой на плоскость Oxy, очевидно, дается уравнением

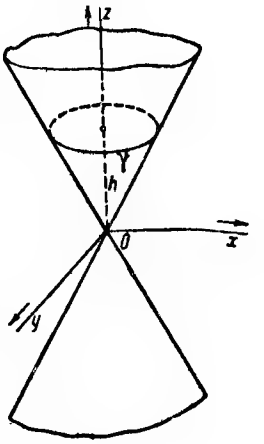
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=0,$$

или, по разделении на $\frac{h^2}{c^2}$:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \qquad (2)$$

где для краткости положено

$$a'=\frac{ah}{c}, \quad b'=\frac{bh}{c}.$$



Черт. 167.

Следовательно, пересечение есть эллипс, с полуосями a', b' и с центром на оси Oz.

При различных h получим различные эллипсы, которые все подобны между собою.

Пусть γ обозначает какой-либо из них. Тогда, очевидно, наш конус можно рассматривать как геометрическое место прямых, проходящих через O и через эллипс γ, который будет служить направляющей.

В частности, если $a=b$, то конус будет *прямым круговым*[1]) или *конусом вращения*, который рассматривают в элементарной геометрии.

Конус состоит из двух полостей, расположенных по обе стороны от вершины (черт. 167). Плоскости, проходящие через вершиу конуса, по отношению к нему разделяются на три категории:

a) плоскости, пересекающие эллипс γ в двух различных точках; эти плоскости, очевидно, пересекают конус по совокупности двух прямых (образующих);

b) плоскости, не пересекающие эллипса γ; эти плоскости, очевидно, имеют с конусом только одну общую точку (вершину);

c) плоскости, имеющие с γ только одну общую точку, или, лучше сказать, две совпадающие точки. Каждая из этих плоскостей, очевидно, имеет с конусом только одну общую прямую (лучше — две совпадающие прямые). Такая плоскость (обозначим ее через Π) пересекает плоскость эллипса γ по прямой, являющейся, очевидно, касательной к γ. Таким образом плоскость Π проходит через образующую конуса и через касательную к γ (проведенную через точку пересечения образующей с конусом). Такая плоскость является касательной к конусу; упомянутая образующая является прямой касания плоскости и конуса.

Рассмотрим теперь пересечение нашего конуса с плоскостями, не проходящими через вершину. Мы знаем, что в пересечении получатся ли-

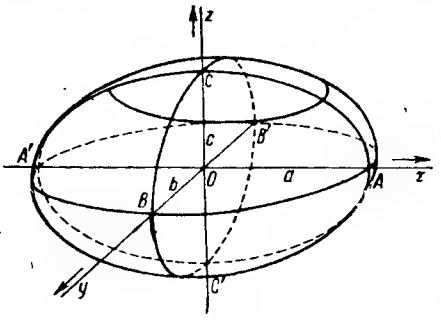
[1]) Мы увидим ниже (§ 297), что всякий (нераспадающийся) конус второго порядка можно рассматривать, как „наклонный круговой конус".

нии второго порядка. Посмотрим, какие линии могут получиться в пересечении.

Если плоскость, проходящая через вершину и параллельная данной секущей плоскости, принадлежит к категории b), то, очевидно, данная плоскость пересекает только одну полость конуса, причем пересекает все образующие. Пересечение есть, следовательно, замкнутая конечная линия второго порядка, т. е. *эллипс*.

Если плоскость, проходящая через вершину и параллельная данной, принадлежит к категории a), то, очевидно, данная плоскость пересекает обе полости конуса; значит, линия пересечения состоит из двух раздельных ветвей, т. е. эта линия есть *гипербола*.

Наконец, если плоскость, параллельная данной и проходящая через вершину, принадлежит к категории c) (т. е. касается конуса вдоль одной из образующих), то данная плоскость пересекает только одну полость конуса. Так как, далее, одна из образующих конуса ей параллельна, то линия пересечения простирается в бесконечность (состоя из одной ветви). Значит линия пересечения — *парабола*.



Черт. 168.

Таким образом мы еще раз установили, что эллипс, гипербола и парабола суть линии пересечения конуса второго порядка (в частности прямого кругового) с плоскостями.

287. Эллипсоид. Рассмотрим теперь эллипсоид, представляемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

Ясно, что плоскости координат суть плоскости симметрии („главные диаметральные плоскости"), оси координат — оси симметрии („оси"), а начало — центр симметрии („центр") поверхности.

Очевидно, также, что для всех точек поверхности будем иметь

$$|x|\leqslant a,\quad |y|\leqslant b,\quad |z|\leqslant c.$$

Значит, вся поверхность заключена внутри прямоугольного параллелепипеда с ребрами $2a$, $2b$, $2c$, грани которого параллельны плоскостям координат и отсекают на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ (черт. 168).

Мы знаем, что всякое пересечение поверхности (1) с плоскостью есть линия второго порядка; так как линия пересечения, на основании только что сказанного, не может простираться в бесконечность, то она — эллипс. Итак, сечения поверхности (1) плоскостями суть эллипсы, как мы уже видели раньше (§ 269).

Ясное представление об ее форме можно получить, рассматривая ее пересечение с плоскостями, параллельными плоскостям координат.

Плоскость Oxy (т. е. $z=0$) пересекает ее по эллипсу, уравнение которого в плоскости Oxy есть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

Плоскость Oxz ($y=0$) пересекает ее по эллипсу, уравнение которого в этой плоскости есть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

и, наконец, плоскость Oyz — по эллипсу, уравнение которого в этой плоскости есть

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4}$$

Эллипсы (2), (3), (4) называются „главными эллипсами“. Рассмотрим теперь пересечения нашей поверхности с плоскостями, параллельными плоскости Oxy. Пусть

$$z=h$$

— одна из этих плоскостей. Подставляя $z=h$ в (1), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},$$

которое, если его рассматривать как уравненне линии в плоскости Oxy, представляет уравнение проекции рассматриваемой линии пересечения на плоскости Oxy.

Эта линия будет, очевидно, действительной только при $|h|\leqslant c$.

Перепишем предыдущее уравнение, разделив его на $1-\frac{h^2}{c^2}$, так:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \tag{5}$$

где, для краткости, положено

$$a'=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \quad b'=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}. \tag{6}$$

Таким образом линия пересечения есть эллипс с полуосями a', b' и центром на Oz. При $h=0$ получим $a'=a$, $b'=b$, т. е. главный эллипс (2). При возрастании h от 0 до c, полуоси a', b' убывают; эллипс (5) уменьшается, оставаясь подобным самому себе, и при $h=c$ сжимается в точку C, расположенную на оси Oz.

Таким образом плоскость $z=c$ касается эллипсоида в точке C.

Симметричную картину получим при убывании h от 0 до $-c$; плоскость $z=-c$ касается эллипсоида в точке $C'(0, 0, -c)$, расположенной на оси Oz.

Совершенно аналогичные результаты получим, рассматривая пересечение плоскостями $x=h$ и $y=h$.

Плоскости $x=\pm a$ и $y=\pm b$ касаются поверхности в точках $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$.

Точки A, A', B, B', C, C' называются *вершинами* эллипсоида, отрезки AA', BB', CC', а также их длины $2a$, $2b$, $2c$ — осями его, величины же a, b, c — полуосями.

Если

$$a > b > c,$$

то a есть *большая*, b — *средняя*, c — *малая полуоси*.

В частном случае, когда $a = b$, все эллипсы (5) обращаются в окружности. Ясно, что в этом случае наш эллипсоид может быть получен вращением эллипса $AC\,A'C'$ с осями $|AA'| = 2a$ и $|CC'| = 2c$ вокруг оси $C'C$. Такой эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*. Он называется *вытянутым*, если $c > a$, и *сплюснутым*, если $c < a$.

Наконец, если $a = b = c$, то эллипсоид обращается в *сферу*.

Упражнения и дополнения

1. Написать уравнение плоскости, касательной к эллипсоиду (1) в точке (x_0, y_0, z_0).

Ответ.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

2. Составить уравнение диаметральной плоскости, сопряженной с направлением (X, Y, Z).

Ответ.

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 0.$$

3. Вывести условие того, чтобы уравнение второго порядка $F(x, y, z) = 0$ выражало сферу, т. е. приводилось бы к виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - K = 0,$$

где $K = \pm r^2$ (при верхнем знаке имеем действительную сферу, при инжнем — мнимую).

Ответ. Методом, аналогичным изложенному в § 239, покажем, что необходимыми и достаточными условиями являются следующие (в прямоугольных координатах)

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0;$$

при этом K дается формулой

$$K = \frac{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{11}a_{44}}{a_{11}^2}.$$

При $K > 0$ имеем действительную сферу, при $K < 0$ — мнимую. При $K = 0$ уравнение приводится к виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0.$$

Это „сфера нулевого радиуса“ или „изотропный конус“.

Выведенное условие можно заменить и следующим: для того чтобы поверхность $F(x, y, z) = 0$ представляла сферу, необходимо и достаточно, чтобы она проходила через сферическую окружность (§ 175), т. е. чтобы ее пересечение с несобственной плоскостью было мнимой несобственной окружностью.

Доказательство предоставляем читателю.

288. Однополостный гиперболоид. Нормальное уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

Она симметрична относительно плоскостей („главные диаметральные плоскости") координат, осей координат („оси") и начала координат O, которое будет ее центром (черт. 169).

Пересечение этой поверхности с плоскостью Oxy есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

(„главный" или „горловой" эллипс), с плоскостью Oxz — гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (3)$$

и с плоскостью Oyz — гипербола

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3a)$$

(„главные гиперболы"). Если пересечь нашу поверхность плоскостью $z=h$, то получим линию, проекция которой на плоскость Oxy дается уравнением

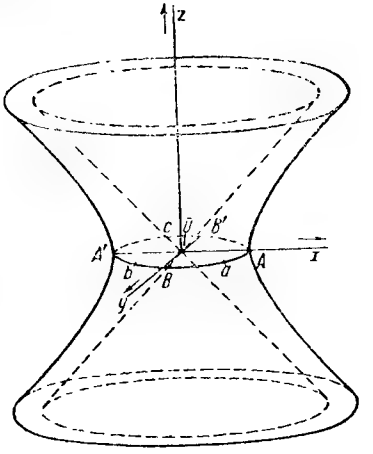
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

или

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \qquad (4)$$

где

$$a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \qquad (5)$$



Черт. 169.

Это есть эллипс с полуосями a', b'; пересечение существует при всяком h. При $h=0$ получаем горловой эллипс (2).

При возрастании $|h|$ полуоси a', b' беспредельно возрастают, а эллипс (4) беспредельно увеличивается, оставаясь подобным горловому эллипсу. Ясно, что поверхность состоит из одной полости, простирающейся в бесконечность по обе стороны от плоскости Oxy.

Вершины A, A', B, B' горлового эллипса называются *вершинами* нашего гиперболоида. Отрезки AA' и BB', а также их длины $|AA'|=2a$ и $|BB'|=2b$ называются *поперечными осями его*. Отрезок длины $2c$, с серединой в Q, расположенный по оси Oz, а также его длина называется *продольной осью*.

Ясное представление о форме гиперболоида в удаленных точках дает одновременное рассмотрение *асимптотического конуса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (6)$$

(Это — действительно асимптотический конус, так как он представляет собою конус асимптотических направлений с вершиной в центре; см. § 275.)

Пересечение этого конуса с плоскостью $z = h$ есть, как мы видели, эллипс с центром на оси Oz и полуосями

$$a'' = \frac{a|h|}{c}, \quad b'' = \frac{b|h|}{c};$$

этот эллипс подобен эллипсу пересечения гиперболоида с той же плоскостью.

Так как, на основании формул (5), $a'' < a'$, $b'' < b'$, то первый эллипс заключен внутри второго. Значит, конус (6) заключен целиком внутри гиперболоида (т. е. в той части пространства, где проходит ось Oz).

Далее, легко показать, что при беспредельном возрастании $|h|$, разности $a' - a''$ и $b' - b''$ стремятся к нулю.

Например,

$$a' - a'' = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} - \frac{a|h|}{c}.$$

Умножая и деля правую часть на

$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} + \frac{a|h|}{c},$$

получим, после очевидных упрощений,

$$a' - a'' = \frac{a^2}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} + \frac{|h|}{c}},$$

откуда и следует, что $\lim\limits_{h \to \infty} (a' - a'') = 0$.

Таким же образом докажем, что

$$\lim_{h \to \infty} (b' - b'') = 0.$$

Из сказанного следует, что эллипсы пересечения нашего гиперболоида и конуса (6) стремятся слиться при возрастании h, т. е. что в достаточно далеких частях пространства конус сколь угодно близко примыкает к гиперболоиду.

Если $a = b$, то эллипсы (4) обращаются в окружности, и гиперболоид (1) может быть получен вращением гиперболы (3) или (3а) вокруг поперечной оси. Такой гиперболоид называется *однополостным гиперболоидом вращения*.

В § 269 было показано, что среди пересечений гиперболоида с плоскостями имеются линии всех трех типов (эллиптического, гиперболического, параболического). Легко это показать и аналитически (см. упражнения).

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что линии пересечения гиперболоида (1) с плоскостями, параллельными плоскостям Oyz и Oxz, суть гиперболы (в частном случае — совокупности двух прямых, если плоскости проходят через вершины горлового эллипса).

Доказательство. Проекция на плоскость Oxz линии пересечения с плоскостью $y = h$ дается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это есть гипербола, при $|h| \neq b$, или совокупность двух прямых, при $h = \pm b$. Аналогично для сечений плоскостями $x = h$.

2. Доказать, что линии пересечения гиперболоида (1) с любыми плоскостями, параллельными оси Oz, суть гиперболы (в частности — совокупности двух пересекающихся прямых).

Доказательство. Так как пересечение гиперболоида с плоскостями, параллельными плоскости Oyz, уже рассмотрено в предыдущем упражнении, можно считать, что секущая плоскость не параллельна этой плоскости. Пусть уравнение ее есть $y = mx + k$. Подставляя предыдущее выражение для y в уравнение гиперболоида (1), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+k)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

выражающее проекцию рассматриваемого сечения на плоскость Oxz. Коэфициенты [1]) a_{11}, a_{22} при x^2, z^2 в этом уравнении равны соответственно $\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}$, $-\frac{1}{c^2}$. Коэфициент $2a_{13}$ при xz равен нулю.

Значит $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) < 0$ и, следовательно, рассматриваемая проекция — линия гиперболического типа, т. е. либо гипербола либо совокупность двух пересекающихся прямых. Такого же вида должна быть и проектируемая линия, а это и доказывает наше утверждение.

3. Доказать, что среди линий пересечения гиперболоида (1) с плоскостями имеются линии всех трех типов (эллиптического, гиперболического и параболического), и что линия пересечения с данной плоскостью — того же типа, что и линия пересечения асимптотического конуса с той же плоскостью.

Доказательство. Линии пересечения с плоскостями, параллельными оси Oz, уже изучены (они — гиперболического типа). Рассмотрим линию пересечения с плоскостью $z = mx + ny + k$, не параллельной оси Oz.

Подставив это выражение для z в уравнение (1), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(mx+ny+k)^2}{c^2} = 1, \tag{7}$$

дающее проекцию линии пересечения на плоскость Oxy.

Коэфициенты при членах второго измерения в этом уравнении суть [2]):

$$a_{11} = \frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{c^2}, \quad 2a_{12} = -\frac{2mn}{c^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2} - \frac{n^2}{c^2};$$

значит:

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right).$$

Ясно, что, придавая подходящее значение m и n, можно удовлетворить любому из трех условий: $A_{33} > 0$, $A_{33} = 0$, $A_{33} < 0$, т. е. получить в проекции линию любого из трех типов. Того же типа будет и линия пересечения.

Ясно, далее, что A_{33} не изменится вовсе, если в правой части (7) заменить единицу нулем (или любой другой постоянной). Значит, тип линии пересечения будет тот же, если вместо данной поверхности взять ее асимптотический конус.

---

[1]) Здесь мы применяем обозначения § 208, поменяв ролями y и z.

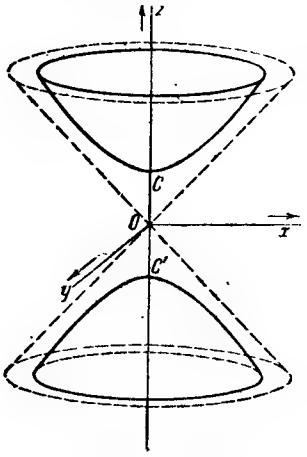
[2]) Мы применяем обозначения § 208.

4. На основании сказанного в предыдущем упражнении, показать, что плоскости, параллельные касательным плоскостям асимптотического конуса (и только такие плоскости), пересекают гиперболоид по параболам.

289. Двухполостный гиперболоид. Нормальное уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{1}$$

Поверхность эта обладает теми же свойствами симметрии, что и рассмотренные в предыдущих параграфах; плоскости Oyz, Ozx, Oxy являются плоскостями симметрии („главные диаметральные плоскости"), оси Ox, Oy, Oz — осями симметрии („оси"); точка O — центр симметрии („центр").



Черт. 170.

Плоскость Oxy не пересекает поверхности, ибо при $z=0$ получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

представляющее мнимый эллипс. Плоскости Oxz и Oyz пересекают поверхность соответственно по гиперболам

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{2}$$

и

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{3}$$

(„главные гиперболы", из которых на черт. 170 изображена первая).

Пересечем поверхность плоскостью $z=h$. В пересечении получится линия, проекция которой на плоскость Oxy дается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1.$$

Значит, пересечение действительное, если $|h|\geqslant c$, мнимое, если $|h|<c$.

Предполагая $|h|>c$, перепишем предыдущее уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \tag{4}$$

где

$$a'=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \quad b'=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}. \tag{5}$$

Значит, пересечение есть эллипс с центром на оси Oz и с полуосями a', b'. При возрастании $|h|$, эллипс этот беспредельно возрастает, оставаясь подобным самому себе.

Когда h стремится к c, то a' и b' стремятся к 0, и эллипс сжимается в точку C (0, 0, c), расположенную на оси Oz. Если же h стремится

к $(-c)$, то эллипс сжимается в точку C' $(0, 0, -c)$. Плоскости $z=+c$, $z=-c$ касаются гиперболоида в этих точках, называемых вершинами его.

Отрезок CC', а также его длина $2c$ называется *продольной осью* двуполого гиперболоида; отрезки, длиною $2a$ и $2b$ (а также их длины), расположенные соответственно по осям Ox и Oy (имея середины в начале O), называются *поперечными осями.*

Между плоскостями $z=c$, $z=-c$ нет точек гиперболоида; следовательно, он состоит из двух раздельных полостей.

Введем в рассмотрение, как в предыдущем параграфе, конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{6}$$

который является асимптотическим и для нашей поверхности.

Легко видеть (ср. предыдущий параграф), что наша поверхность заключена целиком внутри этого конуса, и что она беспредельно приближается к нему в частях, достаточно удаленных.

Если $a=b$, то наш гиперболоид есть *двухполостный гиперболоид вращения*, получаемый вращением гиперболы с продольной осью $|CC'|=2c$ и поперечной осью $2a=2b$ вокруг оси CC'.

Часто бывает полезно одновременное рассмотрение однополостного и двухполостного гиперболоидов

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

и

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

уравнения которых различаются только знаком в правой части. Эти гиперболоиды называются *сопряженными* по отношению друг к другу.

На основании сказанного в предыдущем и этом параграфах, эти поверхности имеют общий асимптотический конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

который разделяет их, так что первая находится вне асимптотического конуса, а вторая внутри.

Поперечные и продольные оси у них одни и те же. Этим выясняется геометрический смысл „продольной оси“ однополостного и „поперечных осей“ двухполостного гиперболоидов.

Упражнения и дополнения

1. Показать, что сечения двухполостного гиперболоида плоскостями, параллельными плоскостям координат Oxz, Oyz суть гиперболы.

2. Показать, что в пересечении двухполостного гиперболоида с плоскостями могут получиться конические сечения всех трех типов. Показать, что сечения данною плоскостью данного двухполостного гиперболоида, однополостного гиперболоида, сопряженного с ним, и их общего асимптотического конуса суть линии одного и того же типа.

Доказательство то же, что в упражнениях 2 и 3 предыдущего параграфа.

290. Эллиптический параболоид. Эта поверхность имеет нормальное уравнение

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \tag{1}$$

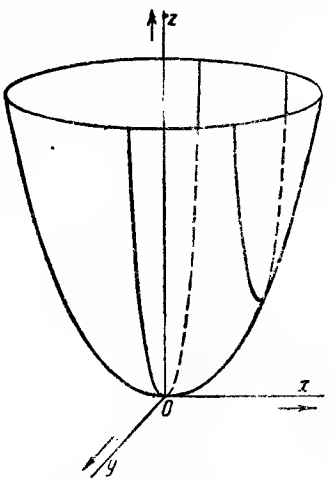
где p и q — постоянные одного знака. Мы будем считать, что $p>0$, $q>0$.

Плоскости Oxz и Oyz являются, очевидно, ее плоскостями симметрии („главные диаметральные плоскости"), ось Oz — осью симметрии („ось").

Конус асимптотических направлений, с вершиной в O,

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0 \tag{2}$$

распадается на две мнимые сопряженные плоскости, пересекающиеся по (действительной) прямой Oz. Следовательно, единственным действительным асимптотическим направлением является направление Oz, т. е. направление оси поверхности. Это направление встречает несобственную плоскость в точке с однородными координатами (0, 0, 1, 0) — единственной несобственной точке поверхности. Несобственная плоскость касается поверхности в этой точке (§ 269). Предлагаем читателю доказать это еще раз, составив однородное уравнение поверхности (1) и написав уравнение касательной плоскости в точке с однородными координатами (0, 0, 1, 0).



Черт. 171.

Эта точка является также несобственным и единственным центром поверхности, как легко проверить и непосредственно, составляя уравнения, определяющие центр.

Все диаметральные плоскости параллельны поэтому оси Oz (предлагаем читателю проверить это непосредственно, составив уравнение диаметральных плоскостей).

Все точки поверхности расположены по одну сторону плоскости Oxy, со стороны $z>0$, ибо при $z<0$ уравнение (1) не имеет действительных решений (черт. 171).

Плоскости Oxz и Oyz пересекают поверхность по параболам

$$x^2=2pz \quad \text{и} \quad y^2=2qz \tag{3}$$

(„главные параболы") с параметрами p и q и осью Oz. Величины p и q называются *параметрами* нашего параболоида.

Рассмотрим пересечение нашей поверхности с плоскостями

$$z=h,$$

параллельными плоскости Oxy; мы должны считать, как было сказано, $h > 0$. Проекция пересечения на плоскость Oxy дается уравнением

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = \sqrt{2ph}, \quad b = \sqrt{2qh}; \tag{4}$$

значит, пересечение есть эллипс с полуосями a, b и центром на оси Oz. При возрастании h, этот эллипс беспредельно возрастает, оставаясь подобным самому себе.

При h, стремящемся к 0, эллипс сжимается в точку O; плоскость Oxy касается параболоида в этой точке, называемой *вершиной* его.

Рассмотрим теперь пересечение нашей поверхности с плоскостью $x = x_0$, параллельной плоскости Oyz. В пересечении получаем линию, проекция которой на плоскость Oyz дается уравнением

$$\frac{y^2}{q} = 2z - \frac{x_0^2}{p},$$

или

$$y^2 = 2q(z - z_0), \tag{5}$$

где

$$z_0 = \frac{x_0^2}{2p}. \tag{6}$$

Следовательно, искомое сечение есть парабола с параметром q, ось которой параллельна Oz и вершина которой расположена в плоскости Oxz. Координаты (x_0, z_0) вершины связаны соотношением (6), и, следовательно, вершина расположена на параболе $x^2 = 2pz$.

Заметим, что параметр параболы (5) (т. е. величина q) не зависит от положения секущей плоскости $x = x_0$. Значит, все параболы, получающиеся от пересечения с плоскостью $x = x_0$ конгруэнтны.

Совершенно аналогичный результат получим, рассматривая пересечение с плоскостями, параллельными плоскости Oxz.

Из сказанного вытекает следующее предложение:

Эллиптический параболоид есть поверхность, описанная неизменной параболой, вершина которой скользит по другой неизменной параболе, плоскость которой перпендикулярна к плоскости подвижной параболы, а ось имеет то же направление. Параметры p и q упомянутых парабол суть параметры данного параболоида.

Мы видели (§ 269), что плоские сечения эллиптического параболоида суть либо эллипсы либо параболы; аналитическое доказательство этого факта приведено в упражнениях.

Упражнения и дополнения

1. Доказать, что линии пересечения эллиптического параболоида (1) с плоскостями, параллельными оси Oz, суть параболы.

Доказательство. Высказанное утверждение почти очевидно, ибо легко видеть, что линия пересечения должна быть линией (второго порядка), простирающейся в бесконечность и состоящей из одной ветви, а это может быть только парабола.

Аналитически это можно показать так. Предполагая, что секущая плоскость не параллельна плоскости Oyz, напишем ее уравнение в виде

$$y = mx + k$$

и подставим это значение y в (1); получим уравнение

$$\frac{x^2}{p} + \frac{(mx+k)^2}{q} - 2z = 0,$$

или

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{m^2}{q}\right) x^2 + \frac{2mkx}{q} - 2z + \frac{k^2}{q} = 0,$$

выражающее проекцию линии пересечения на плоскость Oxz.

Так как дискриминант [1]) $A_{33} = 0$, то эта проекция параболического типа. В том, что проекция есть парабола, можно убедиться, составив дискриминант

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{p} + \frac{m^2}{q} & 0 & \frac{mk}{q} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{mk}{q} & -1 & \frac{k^2}{q} \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{p} + \frac{m^2}{q}\right),$$

который, очевидно, отличен от нуля.

Отсюда легко заключить, что и сама линия пересечения есть парабола.

2. Доказать, что сечения эллиптического параболоида плоскостями, не параллельными оси Oz, суть эллипсы.

Доказательство. Если $z = mx + ny + k$ есть уравнение секущей плоскости, то уравнение проекции линии пересечения на плоскость Oxy имеет вид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2(mx + ny + k) = 0.$$

Для этой линии $A_{33} = \frac{1}{pq} > 0$; значит это — эллипс (действительный или мнимый), который может выродиться и в пару мнимых сопряженных прямых.

Итак, плоские сечения эллиптического параболоида суть либо параболы (упражнение 1) либо эллипсы.

291. Гиперболический параболоид. Нормальное уравнение этой поверхности имеет вид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{1}$$

где $p > 0$, $q > 0$. Плоскости Oxz и Oyz являются плоскостями симметрии („главные плоскости"), ось Oz — осью симметрии („ось").

Конус асимптотических направлений с вершиной в O

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \tag{2}$$

распадается на две действительные плоскости. Двойная прямая поверхности (2), т. е. прямая Oz пересекает несобственную плоскость в точке с однородными координатами (0, 0, 1, 0); в этой точке несобственная

[1]) Мы применяем здесь те же обозначения, что в § 208, поменяв ролями y и z.

плоскость касается поверхности (это следует из сказанного в § 269, а также весьма просто проверяется непосредственно). Точка эта является в то же время единственным и несобственным центром поверхности, как показывает непосредственная проверка. Поэтому все диаметральные плоскости параллельны Oz.

Сечение поверхности плоскостью $z=0$ есть совокупность двух прямых

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \qquad (2a)$$

(Δ' и Δ'' на черт. 172). Сечения поверхности главными плоскостями суть параболы

$$x^2=2pz \text{ и } y^2=-2qz \qquad (3)$$

(„главные параболы"), с параметрами p, q и осями, направленными параллельно оси Oz в противоположные стороны.

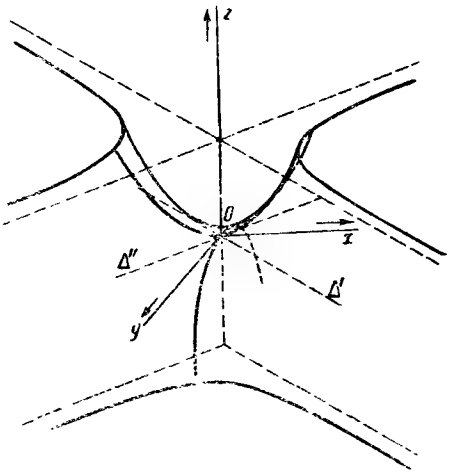
Сечение плоскостью $z=h$ имеет проекцией на плоскость Oxy гиперболу

$$\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1. \qquad (4)$$

Если $h>0$, то продольная ось гиперболы направлена по Ox, а поперечная — по Oy.

По величине полуоси этой гиперболы равны

$$a=\sqrt{2ph} \text{ и } b=\sqrt{2qh}. \qquad (5)$$



Черт. 172.

При возрастании h полуоси беспредельно возрастают. Все эти гиперболы подобны и подобно расположены.

При $h<0$, уравнение (4) можно переписать так:

$$\frac{x^2}{-2ph}-\frac{y^2}{2qh}=-1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{2p|h|}-\frac{y^2}{2q|h|}=-1,$$

откуда видно, что мы имеем гиперболу, сопряженную с гиперболой, получающейся при положительном h с тем же абсолютным значением. Эти гиперболы также подобны и подобно расположены.

Проекции всех гипербол (как при $h>0$, так и при $h<0$) на плоскость Oxy имеют одни и те же асимптоты, а именно, прямые (2a).

Поверхность имеет вид, изображенный на черт. 172.

Сечение поверхности плоскостями $x=x_0$ суть параболы, проекции которых на плоскость Oyz даны уравнением

$$\frac{y^2}{q}=-2z+\frac{x_0^2}{p},$$

или

$$y^2=-2q(z-z_0), \qquad (6)$$

где

$$z_0 = \frac{x_0^2}{2p}. \qquad (7)$$

Все эти параболы конгруэнтны и имеют параметр q. Вершина параболы, получающейся в сечении, расположена на главной параболе $x^2 = 2pz$ (в плоскости Oxz), а ось направлена противоположно Oz.

Совершенно аналогичный результат получим при пересечении плоскостями $y = y_0$.

Отсюда следует свойство гиперболического параболоида, совершенно аналогичное свойству эллиптического параболоида (см. конец предыдущего параграфа), с той только разницей, что в нашем случае *оси подвижной и неподвижной парабол направлены в противоположные стороны.*

Легко показать, что все плоские сечения гиперболического параболоида суть линии гиперболического или параболического типа (см. упражнения 2 и 3).

Упражнения и дополнения

1. Показать, что если взять новые оси Ox', Oy', направленные по прямым (2а), а ось Oz оставить без изменения, то в новых осях, вообще косоугольных, уравнение гиперболического параболоида примет вид

$$x'y' = kz,$$

где, в случае необобщенных координат,

$$k = \frac{p+q}{2}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что при указанном выборе осей будем иметь тождество

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = \frac{4x'y'}{p+q};$$

ср. § 203.

2. Показать, что сечения параболоида (1) плоскостями, параллельными оси Oz, суть либо параболы, либо прямые.

Доказательство. Пусть $y = mx + k$ есть секущая плоскость. Проекция сечения на плоскость Oxz дается уравнением (ср. упражнение 1 предыдущего параграфа):

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{m^2}{q}\right)x^2 - \frac{2mkx}{q} - 2z - \frac{k^2}{q} = 0.$$

Значит, $A_{33} = 0$, т. е. линия — параболического типа. Дискриминант $A = -\frac{1}{p} + \frac{m^2}{q}$. Если $m^2 \neq \frac{q}{p}$, то мы имеем параболу; если же $m = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}$, то уравнение проекции обращается в уравнение первой степени, выражающее прямую. В этом случае можем сказать, что мы имеем две прямые пересечения, из которых одна несобственная.

3. Доказать, что линии пересечения гиперболического параболоида (1) с плоскостями, не параллельными оси Oz, суть линии гиперболического типа.

Доказательство. При обозначениях, аналогичных обозначениям упражнения 2 предыдущего параграфа, получим уравнение

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2(mx + ny + k) = 0,$$

для которого $A_{33} = -\frac{1}{pq} < 0$; следовательно, линия пересечения — гиперболического типа.

II. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этом отделе мы займемся разысканием действительных прямых, целиком расположенных на данной поверхности второго порядка. Так как в случае особенных поверхностей (конус, цилиндр, совокупность двух плоскостей) решение этого вопроса совершенно элементарно, мы займемся в дальнейшем только неособенными поверхностями второго порядка.

§ 292. Общие замечания. Мы уже видели (§ 267), что поверхности с эллиптическими точками (таковыми являются эллипсоид, двухполостный гиперболоид, эллиптический параболоид) не могут содержать действительных прямых и что, напротив, поверхности с гиперболическими точками (таковыми являются однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид) содержат бесчисленное множество действительных прямых.

Мы увидим ниже, что однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид могут быть (двумя способами) образованы движением прямой (мы все время имеем в виду действительные прямые). Поэтому-то прямые, принадлежащие этим поверхностям, называются *прямолинейными образующими*, а сами поверхности — *линейчатыми*.

В том, что на эллипсоиде, двухполостном гиперболоиде и эллиптическом параболоиде нет действительных прямых, можно еще непосредственно убедиться следующим элементарным путем [1]).

В случае эллипсоида это очевидно, ибо эта поверхность целиком находится на конечном расстоянии и не может содержать целую прямую [2]).

Также и в случае двухполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Мы знаем, во-первых, что сечения его плоскостями, параллельными плоскости Oxy, суть эллипсы. Значит, на нем не может быть прямых, параллельных плоскости Oxy. Всякая же прямая, пересекающая плоскость Oxy, не может быть расположена целиком на нашей поверхности, ибо поверхность эта не имеет точек вблизи плоскости Oxy. Аналогично и для эллиптического параболоида.

Заметим, наконец, имея в виду дальнейшее, следующее обстоятельство: для того чтобы прямая, заданная параметрически (через t обозначен параметр):

$$x=x_0+Xt,\quad y=y_0+Yt,\quad z=z_0+Zt \tag{1}$$

целиком принадлежала поверхности $F(x, y, z)=0$, необходимо и достаточно, чтобы (см. § 270)

$$\left.\begin{gathered}\varphi(X, Y, Z)=0,\ XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+\\ +ZF_3(x_0, y_0, z_0)=0,\\ F(x_0, y_0, z_0)=0.\end{gathered}\right\} \tag{2}$$

---

[1]) В упражнениях этого параграфа дается еще одно доказательство этих утверждений.

[2]) Прямая не может только частично принадлежать поверхности: мы знаем, что если прямая имеет с поверхностью второго порядка больше двух общих точек, то она принадлежит поверхности целиком.

Разыскание прямолинейных образующих сводится к исследованию предыдущих уравнений. Отметим, что из первого уравнения следует, что все прямолинейные образующие имеют асимптотические направления, что ясно и непосредственно.

Упражнения и дополнения

Показать, исходя из уравнений (2), что эллипсоид, двухполостный гиперболоид и эллиптический параболоид не имеют прямолинейных (действительных) образующих.

Доказательство. В случае эллипсоида, заданного нормальным уравнением, уравнение $\varphi(X, Y, Z) = 0$ имеет только одно действительное решение $X = Y = Z = 0$, не удовлетворяющее условиям задачи (ибо, по условию, по крайней мере одно из чисел X, Y, Z отлично от нуля).

В случае двухполостного гиперболоида первое из уравнений (2) дает

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0,$$

откуда видно, что $Z \neq 0$. Значит, прямолинейная образующая не может быть параллельна оси Oz. Взяв за точку (x_0, y_0, z_0) точку ее пересечения плоскостью Oxy, будем иметь $z_0 = 0$, и тогда третье из уравнений (2) примет вид

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = -1;$$

оно не имеет действительных решений, и утверждение наше доказано.

В случае эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$$

имеем

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 0,$$

откуда следует $X = Y = 0$, и, значит, $Z \neq 0$. Второе же из уравнений (2) дает (так как $F_4 = -1$): $-Z = 0$, что противоречит предыдущему.

293. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. В случае однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

уравнения (2) предыдущего параграфа принимают вид:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0, \quad \frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} - \frac{Zz_0}{c^2} = 0,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Первое из этих уравнений показывает, что $Z \neq 0$ (иначе было бы $X = Y = Z = 0$); значит, искомая образующая пересекает плоскость Oxy. Взяв в качестве точки (x_0, y_0, z_0) точку пересечения, будем иметь $z_0 = 0$.

Так как, далее, нас интересуют не сами величины X, Y, Z, а их отношения, и, кроме того, мы знаем, что $Z \neq 0$, то мы можем для упрощения формул положить еще $Z = c$.

Тогда уравнения (1) примут вид

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1, \quad \frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}=0, \tag{2}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти общее решение уравнений (2) и (3).

Уравнение (3) выражает попросту, что точка $(x_0, y_0, 0)$ расположена на горловом эллипсе. Представим этот эллипс параметрически, полагая

$$x_0=a\cos\varphi, \quad y_0=b\sin\varphi. \tag{4}$$

Будем считать, что φ заключается в пределах от 0 до 2π, что дает все точки горлового эллипса. Подставляя эти значения во второе из уравнений (2), получим

$$\frac{X\cos\varphi}{a}+\frac{Y\sin\varphi}{b}=0,$$

или

$$\frac{X}{a\sin\varphi}=-\frac{Y}{b\cos\varphi}.$$

Обозначая временно общее значение предыдущих отношений через λ, будем иметь

$$X=a\lambda\sin\varphi, \quad Y=-b\lambda\cos\varphi,$$

и подставляя эти значения в первое из уравнений (2), получим

$$\lambda^2=1, \quad \lambda=\pm 1,$$

откуда, наконец,

$$X=\pm a\sin\varphi, \quad Y=\mp b\cos\varphi, \tag{5}$$

где одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.

Формулы (4) и (5) дают самое общее решение уравнений (2) и (3), выражая его через вспомогательный параметр φ.

Мы видим, что через каждую точку горлового эллипса, характеризуемую данным значением φ, проходят две прямолинейные образующие, коэфициенты направления которых суть соответственно

$$(+a\sin\varphi, \ -b\cos\varphi, \ c) \quad \text{и} \quad (-a\sin\varphi, \ +b\cos\varphi, \ c).$$

Параметрически эти две образующие представляются уравнениями

$$x=a\cos\varphi+ta\sin\varphi, \quad y=b\sin\varphi-tb\cos\varphi, \quad z=ct \tag{6}$$

и

$$x=a\cos\varphi-ta\sin\varphi, \quad y=b\sin\varphi+tb\cos\varphi, \quad z=ct \tag{7}$$

(для каждой данной образующей φ есть постоянная величина, а t — переменный параметр).

Если исключить t из уравнений (6) или (7), получим приведенные уравнения этих прямых

$$x = a\cos\varphi + z\frac{a}{c}\sin\varphi, \quad y = b\sin\varphi - z\frac{b}{c}\cos\varphi, \tag{6a}$$

и

$$x = a\cos\varphi - z\frac{a}{c}\sin\varphi, \quad y = b\sin\varphi + z\frac{b}{c}\cos\varphi. \tag{7a}$$

Легко показать, что обе образующие (6) и (7), проходящие через данную точку (x_0, y_0) горлового эллипса, находятся в плоскости, проходящей через касательную к горловому эллипсу в этой точке и перпендикулярной к его плоскости.

Для этого достаточно показать, что проекции образующих (6) и (7) на плоскость Oxy являются касательными к горловому эллипсу в точке (x_0, y_0). Уравнение этой касательной имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

или, принимая во внимание, что $x_0 = a\cos\varphi$, $y_0 = b\sin\varphi$:

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} = 1. \tag{8}$$

Уравнение проекции образующей (6a) на плоскость Oxy получим, исключая z из уравнений (6a). Для того чтобы произвести это исключение, достаточно первое из них умножить на $\frac{\cos\varphi}{a}$, второе на $\frac{\sin\varphi}{b}$ и сложить, что даст как раз уравнение (8), а это и доказывает наше утверждение относительно образующей (6a). Так же докажем его и относительно образующей (7a).

Легко, далее, доказать, что рассматриваемые образующие одинаково наклонены к касательной к горловому эллипсу, т. е. составляют равные углы с осью Oz. Действительно, острый угол γ, образованный каждым из векторов $(a\sin\varphi, -b\cos\varphi, c)$ и $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi, c)$, которые представляют собою векторы направлений наших двух образующих с осью Oz, дается формулой

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2}}. \tag{9}$$

Угол же θ между этими образующими дается формулой

$$\cos\theta = \pm\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi - c^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2}. \tag{9a}$$

В частном случае гиперболоида вращения, когда $a = b$, мы получаем для γ постоянное значение, определяемое формулой

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{c}.$$

Возвратимся к общему случаю. Мы видим, что на однополостном гиперболоиде имеются две системы прямолинейных образующих (черт. 173а,

173b): образующие (6) или (6a), которые мы будем, для краткости, называть образующими первой системы, и образующие (7) или (7a), которые мы будем называть образующими второй системы.

Докажем теперь некоторые основные свойства этих образующих.

1. Две любые образующие одной и той же системы не пересекаются и не параллельны (т. е. не принадлежат одной и той же плоскости).

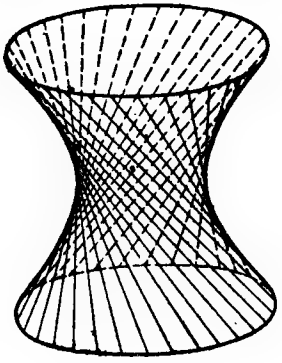
Пусть, действительно,

$$x = a\cos\varphi + z\frac{a}{c}\sin\varphi, \quad y = b\sin\varphi - z\frac{b}{c}\cos\varphi$$

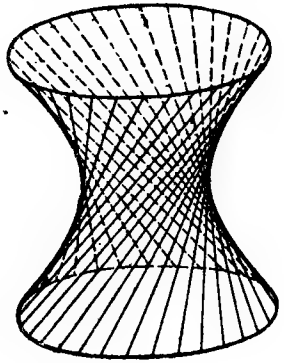
и

$$x = a\cos\psi + z\frac{a}{c}\sin\psi, \quad y = b\sin\psi - z\frac{b}{c}\cos\psi$$

две образующие первой системы. Для того чтобы эти прямые заключа-



Черт. 173a.



Черт. 173b.

лись в одной и той же плоскости, необходимо и достаточно условие (см. § 156)

$$0 = \begin{vmatrix} a(\cos\varphi - \cos\psi) & b(\sin\varphi - \sin\psi) \\ \frac{a}{c}(\sin\varphi - \sin\psi) & -\frac{b}{c}(\cos\varphi - \cos\psi) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{ab}{c}\{(\cos\varphi - \cos\psi)^2 + (\sin\varphi - \sin\psi)^2\},$$

а это возможно только в случае

$$\cos\varphi = \cos\psi, \quad \sin\varphi = \sin\psi.$$

Так как по условию φ и ψ заключены между 0 и 2π, то из предыдущего следует $\varphi = \psi$. Значит, две различные образующие первой системы не могут удовлетворять предыдущему условию. Так же докажем это утверждение относительно двух образующих второй системы.

2. Каждая образующая первой системы пересекает каждую образующую второй системы (или параллельна ей).

Действительно, пусть

$$x = a\cos\varphi + z\frac{a}{c}\sin\varphi, \quad y = b\sin\varphi - z\frac{b}{c}\cos\varphi \tag{10}$$

любая образующая первой системы, и

$$x = a\cos\psi - z\frac{a}{c}\sin\psi, \quad y = b\sin\psi + z\frac{b}{c}\cos\psi \tag{11}$$

любая образующая второй. Условия пересечения (в конечной или бесконечно удаленной точке)

$$\begin{vmatrix} a(\cos\varphi - \cos\psi) & b(\sin\varphi - \sin\psi) \\ \frac{a}{c}(\sin\varphi + \sin\psi) & -\frac{b}{c}(\cos\varphi + \cos\psi) \end{vmatrix} = 0$$

удовлетворяется тождественно, ибо определитель в левой части равен

$$-\frac{ab}{c}\{(\cos^2\varphi - \cos^2\psi) + (\sin^2\varphi - \sin^2\psi)\} = -\frac{ab}{c}(\cos^2\varphi +$$

$$+ \sin^2\varphi - \cos^2\psi - \sin^2\psi) = -\frac{ab}{c}(1-1) = 0,$$

а это и доказывает наше утверждение.

В частности, образующие двух систем могут пересекаться в бесконечно удаленной точке, т. е. быть параллельными. Именно, каждой образующей одной системы параллельна одна и только одна образующая другой системы.

Действительно, для параллельности наших образующих (10) и (11) должно быть

$$\sin\varphi = -\sin\psi, \quad \cos\varphi = -\cos\psi,$$

откуда $\varphi = \psi + \pi + 2k\pi$ (где k — целое число).

Полученная зависимость между φ и ψ показывает, что эти две образующие проходят через точки горлового эллипса, расположенные на концах одного и того же диаметра.

3. Через каждую точку гиперболоида проходит по одной образующей каждой системы. Пусть, действительно, (x_0, y_0, z_0) любая точка гиперболоида, так что

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1. \tag{12}$$

Покажем, что через нее проходит одна (и только одна) образующая первой системы. Для того чтобы образующая (6а) проходила через точку (x_0, y_0, z_0), необходимо и достаточно, чтобы

$$x_0 = a\cos\varphi + z_0\frac{a}{c}\sin\varphi, \quad y_0 = b\sin\varphi - z_0\frac{b}{c}\cos\varphi.$$

Решая предыдущую систему относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ (мы временн

рассматриваем $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ как несвязанные между собою неизвестные, получим

$$\cos\varphi = \frac{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0 z_0}{bc}}{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{\frac{y_0}{b} + \frac{x_0 z_0}{ac}}{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}. \tag{13}$$

Для того чтобы существовал угол φ, удовлетворяющий обоим этим равенствам, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов правых частей равнялась 1; эта сумма квадратов равна

$$\frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{y_0^2 z_0^2}{b^2 c^2} + \frac{x_0^2 z_0^2}{a^2 c^2}}{\left(1 + \frac{z_0^2}{c^2}\right)^2} = \frac{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}{1 + \frac{z_0^2}{c^2}}.$$

Но последняя дробь равна единице, в силу уравнения (12). Итак, формулы (13) дают одно, вполне определенное значение φ, заключенное между 0 и 2π, а это доказывает наше утверждение.

Точно так же доказывается утверждение относительно образующих второй системы.

4. Заметим, наконец, что любые три образующие одной и той же системы не параллельны одной и той же плоскости. Действительно, проведя через начало O три прямые, параллельные данным образующим, мы получим три различные образующие асимптотического конуса. Эти три образующие не могут быть расположены в одной и той же плоскости, ибо иначе выходило бы, что плоскость эта пересекает конус второго порядка по трем прямым, что невозможно.

Из сказанного следует, что однополостный гиперболоид может быть (двояким образом) описан движением прямой. Для бо́льшей ясности заметим сперва следующее.

Пусть даны три прямые Δ_1, Δ_2, Δ_3, из которых никакие две не расположены в одной плоскости. Существует бесчисленное множество прямых, пересекающих все три прямые; именно, через каждую точку A одной из прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3 проходит одна и только одна прямая, пересекающая и две другие (здесь имеются в виду и возможные пересечения в бесконечно далеких точках).

Действительно, пусть A какая-либо точка, взятая, например, на прямой Δ_1. Прямая, проходящая через A и пересекающая прямые Δ_2, Δ_3, необходимо расположена в плоскостях Π' и Π'', проведенных через A и через прямые Δ_2, Δ_3. Такие плоскости, очевидно, не могут быть параллельными (они имеют общую точку A), не могут и совпадать (ибо тогда Δ_2 и Δ_3 были бы расположены в одной плоскости). Значит, прямая пересечения плоскостей Π' и Π'' всегда существует и, очевидно, удовлетворяет поставленным условиям.

Возвратимся теперь к нашему гиперболоиду. Возьмем на нем три образующие Δ_1, Δ_2, Δ_3 одной и той же системы, скажем, первой. Всякая прямая Δ', пересекающая все три прямые Δ_1, Δ_2, Δ_3, будет необходимо образующей второй системы. Действительно, пусть A есть точка

пересечения Δ' с одной из прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3. Мы знаем, что через A проходит одна и только одна образующая второй системы; эта образующая пересекает все три образующие Δ_1, Δ_2, Δ_3 (см. выше, 2). Но так как через A может проходить только одна прямая, обладающая этим свойством, то наша образующая совпадает с Δ', а это и доказывает наше утверждение.

Если перемещать A вдоль одной из образующих Δ_1, Δ_2, Δ_3, то прямая Δ', проходящая через A и пересекающая все три образующие Δ_1, Δ_2, Δ_3, будет описывать наш гиперболоид [1]).

Итак, наш *однополостный гиперболоид есть поверхность, описанная прямой Δ', пересекающей при своем движении три образующие одной и той же системы.* Так как три образующие Δ_1, Δ_2, Δ_3 могут быть взяты произвольно как из первой, так и из второй системы (но все три из одной и той же), то существуют два способа получения данного гиперболоида, как поверхности, описанной непрерывным движением прямой.

Ниже (§ 295) будет доказано, что если даны любые три прямые, не параллельные одной и той же плоскости, и такие, что любые две из них не расположены в одной плоскости, то точки прямой, пересекающей все три данные прямые, описывают некоторый однополостный гиперболоид.

Сделаем, наконец, еще одно замечание относительно *однополостного гиперболоида вращения.* В этом случае ($a = b$) горловой эллипс обращается в (горловую) окружность.

Пусть M некоторая точка этой окружности и Δ — образующая одной из систем, проходящая через M. Мы знаем, что Δ заключается в плоскости, перпендикулярной к плоскости Oxy и касательной в M к окружности. Значит, Δ перпендикулярна к радиусу OM; кроме того, мы знаем, что она составляет постоянный угол с плоскостью окружности.

На основании сказанного очевидно, что если мы рассмотрим фигуру, состоящую из оси Oz и прямой Δ, и будем вращать эту фигуру вокруг Oz, то прямая Δ опишет наш гиперболоид вращения.

Вообще, если взять фигуру, состоящую из двух не пересекающихся, не параллельных и не взаимно перпендикулярных прямых, и эту фигуру вращать вокруг одной из прямых, то другая, очевидно, опишет однополостный гиперболоид вращения.

294. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида. Обратимся к разысканию прямолинейных образующих гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0. \qquad (1)$$

[1]) Мы получим таким образом *все* точки данного гиперболоида. Действительно, пусть, например, A перемещается по прямой Δ_1. Если M_0 любая точка гиперболоида, то всегда существует образующая Δ' второй системы, проходящая через M_0. Эта образующая, как мы знаем, непременно пересечет Δ_1 в некоторой точке A_0. Значит, когда A дойдет до A_0, мы получим прямую Δ', проходящую через M_0. Надо добавить, впрочем, что образующая второй системы, проходящая через M_0, может быть параллельна Δ_1 (такая образующая, мы знаем, будет только одна); значит, чтобы получить действительно все точки, следует рассматривать и бесконечно удаленное положение A, считая, что ему соответствует образующая второй системы, параллельная Δ_1.

Мы знаем, что из плоскостей, параллельных плоскости Oxy, только сама плоскость Oxy пересекает поверхность (2) по прямым; остальные пересекают ее по гиперболам. Значит, всякая прямолинейная образующая поверхности (1) пересекает плоскость Oxy (или расположена в ней). Поэтому в параметрическом представлении образующей

$$x = x_0 + Xt, \quad y = y_0 + Yt, \quad z = z_0 + Zt$$

мы можем всегда считать $z_0 = 0$, взяв за точку (x_0, y_0, z_0) точку образующей, находящуюся на плоскости Oxy.

В соответствии с этим уравнения (2) § 292 примут вид

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 0, \quad \frac{Xx_0}{p} - \frac{Yy_0}{q} - Z = 0, \quad \frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 0. \tag{2}$$

Последнее из этих уравнений дает

$$\frac{x_0}{\sqrt{p}} = \pm \frac{y_0}{\sqrt{q}},$$

или, обозначая через λ общее значение этих отношений,

$$x_0 = \lambda \sqrt{p}, \quad y_0 = \pm \lambda \sqrt{q}. \tag{3}$$

Далее, первое из уравнений (2) дает

$$\frac{X}{\sqrt{p}} = \mp \frac{Y}{\sqrt{q}}.$$

Мы видим, что ни X ни Y не могут быть равны нулю, ибо иначе из предыдущего уравнения и второго уравнения (2) следовало бы $X = Y = Z = 0$, что невозможно. Так как нас интересуют только отношения величин X, Y, Z, то мы можем считать $\frac{X}{\sqrt{p}} = 1$; тогда в силу последней формулы будем иметь

$$X = \sqrt{p}, \quad Y = \mp \sqrt{p}. \tag{3а}$$

Исключим временно случай, когда $Z = 0$ (которому соответствуют две образующие, расположенные в плоскости Oxy). Тогда, очевидно, в формулах (3) и (3а) надо одновременно брать либо верхние, либо нижние знаки, ибо иначе, в силу средней формулы (2), получилось бы $Z = 0$.

Подставляя значения (3) и (3а) в среднее уравнение (2), получим

$$Z = 2\lambda.$$

Итак, окончательно получаем

$$x_0 = \lambda \sqrt{p}, \quad y_0 = \pm \lambda \sqrt{q}, \quad X = \sqrt{p},$$
$$Y = \mp \sqrt{q}, \quad Z = 2\lambda,$$

где одновременно берутся верхние или нижние знаки.

Для каждого данного значения λ будем иметь две образующих

$$x=\lambda\sqrt{p}+t\sqrt{p},\quad y=\lambda\sqrt{q}-t\sqrt{q},\quad z=2\lambda t \tag{4}$$

и

$$x=\lambda\sqrt{p}+t\sqrt{p},\quad y=-\lambda\sqrt{q}+t\sqrt{q},\quad z=2\lambda t. \tag{5}$$

Исключая t, получим приведенные уравнения образующих

$$x=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}z,\quad y=\lambda\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}z \tag{4a}$$

и

$$x=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}z,\quad y=-\lambda\sqrt{q}+\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}z. \tag{5a}$$

Мы временно исключили случай $Z=0$, которому соответствуют две образующие, расположенные в плоскости Oxy. Но легко видеть, что и эти образующие мы получим, положив $\lambda=0$ в уравнениях (4) и (5), которые при этом дают

$$x=t\sqrt{p},\quad y=-t\sqrt{q},\quad z=0$$

и

$$x=t\sqrt{p},\quad y=t\sqrt{q},\quad z=0,$$

или

$$\frac{x}{\sqrt{p}}=-\frac{y}{\sqrt{q}},\quad z=0\quad\text{и}\quad\frac{x}{\sqrt{p}}=\frac{y}{\sqrt{q}},\quad z=0.$$

Условимся считать, что и уравнения (4а), (5а) изображают те же самые образующие при $\lambda=0$. Тогда можно утверждать, что, придавая λ все возможные значения в (4а) и (5а), получим все возможные образующие нашего параболоида.

Будем называть образующие (4а) образующими первой системы, а образующие (5а) образующими второй системы.

В противоположность случаю гиперболоида, все образующие одной и той же системы параллельны одной и той же плоскости. Именно, образующие первой и второй систем соответственно параллельны плоскостям

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0\quad\text{и}\quad\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0, \tag{6}$$

которые проходят через ось параболоида и через две образующие, проходящие через вершину.

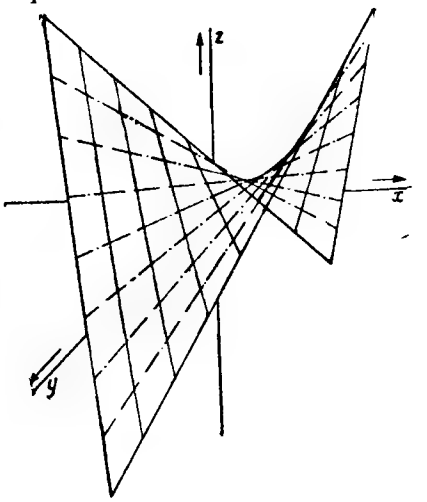
Чтобы доказать это, например, относительно образующих первой системы, достаточно разделить уравнение (4а) соответственно на $\sqrt{p}$ и $\sqrt{q}$ и сложить. Тогда получим уравнение плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=2\lambda,$$

которая необходимо содержит нашу образующую и очевидно параллельна первой из плоскостей (6). Аналогично для образующих второй системы.

Отсюда, между прочим, следует, что образующие первой и второй систем различны, ибо они параллельны различным плоскостям (6)[1]).

Легко, далее, доказать следующие свойства образующих (4а), (5а), аналогичные свойствам образующих гиперболоида (черт. 174).



Черт. 174.

1. Две образующие одной и той же системы не пересекаются и не параллельны. Действительно, если бы две образующие первой системы

$$x=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}z,$$

$$y=\lambda\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}z$$

и

$$x=\mu\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\mu}z,$$

$$y=\mu\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\mu}z$$

пересекались или были параллельны, то мы имели бы (ср. предыдущий параграф):

$$\begin{vmatrix}\sqrt{p}\,(\lambda-\mu) & \sqrt{q}\,(\lambda-\mu)\\ \frac{\sqrt{p}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right) & -\frac{\sqrt{q}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right)\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{pq}\,(\lambda-\mu)^2}{\lambda\mu}=0,$$

но это может быть только при $\lambda=\mu$.

2. Две образующие различных систем всегда пересекаются (или параллельны). Действительно, пусть даны образующие двух систем:

$$x=\lambda\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\lambda}z,\quad y=\lambda\sqrt{q}-\frac{\sqrt{q}}{2\lambda}z$$

и

$$x=\mu\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}}{2\mu}z,\quad y=-\mu\sqrt{q}+\frac{\sqrt{q}}{2\mu}z.$$

Условие пересечения состоит в равенстве нулю определителя

$$\begin{vmatrix}\sqrt{p}\,(\lambda-\mu) & \sqrt{q}\,(\lambda+\mu)\\ \frac{\sqrt{p}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right) & -\frac{\sqrt{q}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)\end{vmatrix};$$

легко проверить, что этот определитель действительно равен нулю при всяких λ и μ.

---

[1]) Образующая ве может быть одновременно параллельна обеим плоскостям (6), ибо ова была бы параллельна их пересечению, т. е. оси Oz. Но образующих, параллельных оси Oz, очевидно, не существует. Действительно, если бы в уравнениях (2) было $X=Y=0$, то было бы $Z=0$, что невозможно.

3. Через каждую точку параболоида проходит по одной образующей каждой системы. Действительно, пусть (x_0, y_0, z_0) какая-либо точка параболоида. Чтобы образующая (4а) проходила через нее, λ должно удовлетворять условиям:

$$x_0 = \lambda\sqrt{p} + \frac{\sqrt{p}}{2\lambda}z_0, \quad y_0 = \lambda\sqrt{q} - \frac{\sqrt{q}}{2\lambda}z_0.$$

Деля первое из этих уравнений на $\sqrt{p}$, а второе на $\sqrt{q}$ и складывая, получаем

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right);$$

легко непосредственной подстановкой убедиться, что это значение λ удовлетворяет обоим предыдущим уравнениям, в силу соотношения

$$\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z_0.$$

Совершенно аналогично для образующих второй системы.

Из сказанного вытекает (ср. аналогичные заключения в предыдущем параграфе), что если взять три какие-либо образующие одной системы, то прямая, пересекающая эти три образующие, будет сама образующей второй системы и при своем движении опишет всю поверхность.

В нашем случае вместо этого способа образования поверхности можно указать и другой, более простой.

Пусть Δ_1 и Δ_2 две какие-нибудь образующие одной системы, скажем, первой. Тогда любая образующая второй системы пересекает обе образующие Δ_1 и Δ_2 и параллельна неподвижной плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Отсюда заключаем, что *гиперболический параболоид может быть образован движением прямой, пересекающей две неподвижные прямые и остающейся параллельной неподвижной плоскости.*

Таких способов образования данной поверхности два, в зависимости от того, что мы можем описывать ее движением образующей первой или второй системы. В первом и во втором случаях движущаяся прямая будет, соответственно, параллельна одной или другой из плоскостей (6), которые поэтому называются *направляющими плоскостями параболоида.*

295. Построение линейчатой поверхности второго порядка по трем заданным образующим. Пусть произвольно заданы три прямые Δ_1, Δ_2, Δ_3 такие, что любые две из них не расположены в одной и той же плоскости. Докажем, что прямая Δ, пересекающая эти три прямые и скользящая по ним, опишет либо однополостный гиперболоид (если Δ_1, Δ_2, Δ_3 не параллельны одной и той же плоскости), либо гиперболический параболоид (если Δ_1, Δ_2, Δ_3 параллельны одной и той же плоскости).

Действительно, возьмем на каждой из прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3 по три точки (произвольным образом). Мы знаем (§ 263), что всегда существует по-

верхность Σ второго порядка, проходящая через эти девять точек. Так как эта поверхность имеет по три общих точки с каждой из прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, то она целиком содержит эти прямые.

Так как среди поверхностей второго порядка только однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид могут содержать три прямые, не расположенные попарно в одной плоскости, то, значит, проведенная поверхность есть либо однополостный гиперболоид, либо гиперболический параболоид, и Δ_1, Δ_2, Δ_3 принадлежат одной и той же системе образующих.

Из свойств образующих упомянутых поверхностей вытекает, что мы будем иметь гиперболоид, если Δ_1, Δ_2, Δ_3 не параллельны одной и той же плоскости, и в противном случае — параболоид.

Далее, из сказанного в двух предыдущих параграфах вытекает, что прямая Δ, скользящая по Δ_1, Δ_2, Δ_3, опишет поверхность Σ, а это и доказывает все наши утверждения.

Точно так же легко доказать, что если даны две прямые Δ_1, Δ_2, не расположенные в одной и той же плоскости, и плоскость II, не параллельная ни одной из них, то прямая Δ, скользящая по Δ_1, Δ_2 и параллельная II, опишет гиперболический параболоид.

Для доказательства достаточно взять три прямые Δ', Δ'', Δ''', параллельные плоскости II и пересекающие обе прямые Δ_1, Δ_2. На основании сказанного выше мы можем всегда построить поверхность второго порядка, имеющую Δ', Δ'', Δ''' образующими одной и той же системы, и эта поверхность будет необходимо гиперболическим параболоидом.

Прямые Δ_1 и Δ_2 будут двумя образующими этой поверхности, и прямая, скользящая по ним, будучи параллельна плоскости II, опишет эту поверхность.

III. КРУГОВЫЕ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

296. Предварительные замечания. Со многих точек зрения представляется интересным выяснить, в каких случаях в сечении поверхности второго порядка плоскостью получается окружность („круговое сечение").

Прежде чем перейти к разысканию круговых сечений, отметим следующее важное обстоятельство. Если некоторая плоскость II пересекает данную поверхность второго порядка по окружности то и всякая плоскость, параллельная II, пересекает эту поверхность по окружности (если сечение есть действительная линия). Это предложение есть непосредственное следствие предложения § 285, но мы докажем его еще раз, применяя тот же прием, что и в § 285.

Выберем временно такую систему (прямоугольных) координат, чтобы плоскость Oxy была параллельна плоскости II. Тогда уравнение плоскости II в этой системе имеет вид

$$z = h. \tag{1}$$

Пусть уравнение данной поверхности в этой системе осей есть

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{2}$$

Полагая $z = h$, получим уравнение проекции рассматриваемого сечения на плоскость Oxy.

В этом уравнении коэфициентами при x^2, y^2 и xy будут соответственно a_{11}, a_{22}, $2a_{12}$. Для того чтобы рассматриваемая линия была окружностью, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0. \tag{3}$$

Это условие, как видим, вовсе не зависит от h, так что если оно соблюдено при данном значении h, то оно будет соблюдено и при всяком другом, а это и доказывает наше утверждение.

Надо все же помнить, что и при соблюдении условия (3) пересечение может быть мнимым. Если ограничиться рассмотрением только действительных линий, то надо говорить, что все плоскости, параллельные II и пересекающие данную поверхность по действительным линиям, пересекают ее по окружностям.

Из предыдущего следует еще одно важное следствие: если в уравнениях двух (отнесенных к какой-либо одной и той же системе осей) поверхностей второго порядка члены второго измерения одинаковы, то плоскости, пересекающие одну из них по окружности, будут пересекать по окружности и другую.

Действительно, в этом случае члены второго измерения в обоих уравнениях остаются одинаковыми, если перейти к любым другим осям координат[1]), в частности к таким (прямоугольным) осям, при которых плоскость Oxy параллельна плоскости, пересекающей одну из поверхностей по окружности. Но в этой системе для одной из поверхностей будем иметь условия (3); значит, эти же условия будут иметь место и для другой, а это и доказывает наше утверждение.

На основании этого можно, например, сразу сказать, что для двух сопряженных гиперболоидов и их асимптотического конуса плоскости, производящие круговые сечения, будут одними и теми же.

Здесь следует сделать оговорку, аналогичную сделанной выше: может случиться, что плоскость пересекает одну из рассматриваемых поверхностей по окружности, а другую не пересекает вовсе (пересекает по мнимой окружности). Но если она пересекает и другую по действительной линии, то линия эта будет окружностью.

297. Круговые сечения центральных поверхностей второго порядка. Начнем с разыскания круговых сечений центральных поверхностей второго порядка: эллипсоида, обоих гиперболоидов и конуса. Исключая временно случай конуса, уравнения всех этих поверхностей можем представить в виде

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1. \tag{1}$$

Пусть имеется какая-либо плоскость, пересекающая поверхность (1) по окружности. Тогда параллельная ей плоскость, проходящая через на-

---

[1]) Мы предполагаем, что уравнения наших поверхностей приведены к виду $F(x, y, z) = 0$ и что, при замене осей, мы ограничиваемся заменой x, y, z в полиномах $F(x, y, z)$ их выражениями через новые координаты (не производя сокращения или умножения уравнений на постоянные множители).

чало координат (центр), также будет пересекать нашу поверхность по окружности (на основании сказанного в предыдущем параграфе), если только последнее сечение — действительная линия. Но, очевидно, в случае эллипсоида и однополостного гиперболоида всякая плоскость, проходящая через центр, пересекает поверхность по действительной линии.

Таким образом в случае эллипсоида и однополостного гиперболоида мы можем ограничиться разысканием плоскостей, производящих круговые сечения, проходящих через центр. Все остальные плоскости круговых сечений будут параллельны им.

Итак, пусть имеется круговое сечение, плоскость которого проходит через начало. Пусть радиус сечения есть r.

Построим сферу с центром в начале, имеющую радиус r. Сфера эта проходит, следовательно, через наше круговое сечение. Уравнение этой сферы напишем в виде

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1. \tag{2}$$

Точки искомого кругового сечения должны одновременно удовлетворять уравнениям (1) и (2), а следовательно, и уравнению, получаемому вычитанием их, т. е. уравнению

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2}\right)z^2=0. \tag{3}$$

Поверхность второго порядка, представляемая уравнением (3), есть конус с вершиною в начале координат, который содержит в качестве составной части плоскость, производящую наше круговое сечение. Действительно, если (x_0, y_0, z_0) есть какая-либо точка нашего кругового сечения, то она принадлежит конусу (3), и значит, вся прямая, проходящая через начало координат и эту точку, принадлежит поверхности (3). Следовательно, эта последняя содержит все прямые, выходящие из O и расположенные в плоскости кругового сечения, которая, таким образом, целиком принадлежит поверхности (3).

Но мы знаем, что в этом случае поверхность (3) должна распадаться на две плоскости; а для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратичной формы в левой части уравнения (3), зависящей от трех переменных x, y, z был равен нулю. Но этот дискриминант есть

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2}\right).$$

Итак, должно быть

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{r^2}\right)=0, \tag{4}$$

Рассмотрим теперь в отдельности случай эллипсоида и гиперболоида.

1. В случае *эллипсоида* имеем

$$\alpha = a^2, \quad \beta = b^2, \quad \gamma = c^2. \tag{5}$$

Будем считать, что

$$a > b > c. \tag{6}$$

Уравнение (4) дает три значения для r:

$$r = a, \quad r = b, \quad r = c.$$

При $r = a$ уравнение (3) принимает вид

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) z^2 = 0.$$

Так как коэфициенты при y^2 и z^2 имеют один и тот же знак, то предыдущее уравнение удовлетворяется только точками оси Ox (т. е. при $y = z = 0$), и значит, не представляет совокупности двух действительных плоскостей (оно представляет совокупность двух мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой). Такой же результат получим при $r = c$.

Остается рассмотреть случай, когда $r = b$. В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 = 0,$$

или

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 = 0.$$

Так как

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} > 0, \quad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} > 0,$$

то предыдущее уравнение дает совокупность двух действительных плоскостей

$$x\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} - z\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} = 0, \quad x\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} + z\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} = 0, \tag{7}$$

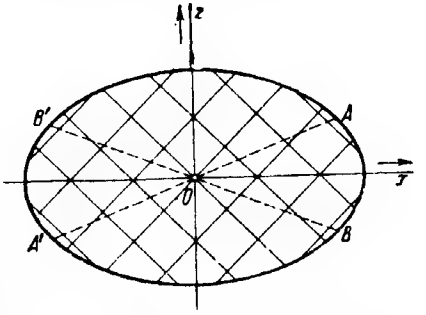
проходящих через среднюю ось эллипсоида и одинаково наклоненных по отношению к большой (или малой) оси.

Все прочие круговые сечения производятся плоскостями, параллельными этим двум плоскостям.

Итак, имеется два ряда круговых сечений; плоскости их параллельны одной из плоскостей (7). На черт. 175 изображен главный эллипс в плоскости Oxz и следы плоскостей (перпендикулярных к плоскости Oxz), производящих круговые сечения. Эти следы образуют два ряда параллельных хорд нашего эллипса. Ясно, что центры круговых сечений находятся на серединах этих хорд. Значит, центры круговых сечений одного и того же ряда расположены на одной и той же прямой, а именно на диаметре главного эллипса в плоскости Oxz, сопряженном с направлением следов соответствующих круговых сечений. Прямые AA' и BB', на

которых расположены центры круговых сечений, пересекают эллипсоид в четырех точках A, A', B, B', которые называются *точками закругления* или *омбилическими точками*.

В случае сплюснутого эллипсоида вращения ($a=b>c$) плоскости (7) сливаются в одну, $z=0$, и мы получаем только один ряд круговых сечений, перпендикулярных к оси вращения; омбилические точки (их будет теперь только две) совпадают с концами оси вращения. В случае вытянутого эллипсоида вращения ($a>b=c$) получаем аналогичный результат. Наконец, в случае $a=b=c$ эллипсоид есть сфера и всякое сечение является круговым. В этом случае все точки поверхности — омбилические.



Черт. 175.

2. В случае *однополостного гиперболоида* имеем

$$\alpha=a^2,\quad \beta=b^2,\quad \gamma=-c^2.$$

Значит, для r можно взять только два действительных значения: $r=a$ и $r=b$. Предположим, что $a>b$.

Тогда, аналогично предыдущему, легко установить, что поверхность (3) распадается на две действительные плоскости только в случае $r=a$; уравнение ее в этом случае будет

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)z^2=0.$$

Оно распадается на два линейных:

$$y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}-z\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}=0,\quad y\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}+z\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}=0. \quad (8)$$

Значит, круговые сечения производятся двумя плоскостями (8), проходящими через большую ось горлового эллипса и одинаково наклоненными к плоскости этого эллипса. Все прочие круговые сечения производятся плоскостями, параллельными упомянутым. Таким образом мы и здесь имеем два ряда круговых сечений.

Следы плоскостей, производящих круговые сечения, на плоскости Oyz образуют два ряда параллельных хорд главной гиперболы в плоскости Oyz. Центры круговых сечений расположены, очевидно, на диаметрах этой гиперболы, сопряженных с упомянутыми хордами. Так как хорды пересекают гиперболу в действительных точках, то эти диаметры не пересекают ее (пересекают сопряженную гиперболу).

В случае *однополостного гиперболоида вращения* ($a=b$) обе плоскости (8) сливаются в одну, $z=0$, и мы имеем только один ряд круговых сечений, перпендикулярных к оси вращения, с центрами на ней.

3. Рассмотрим теперь *двухполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \quad (*)$$

Легко видеть, на основании сказанного в § 296, что плоскость вся-

кого кругового сечения этого двухполостного гиперболоида будет плоскостью кругового сечения однополостного гиперболоида, сопряженного с ним, уравнение которого есть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (**)$$

Обратно, плоскости, производящие круговые сечения в гиперболоиде (**), производят также круговые сечения в гиперболоиде (*), если только пересекают его по действительной линии.

Значит, круговые сечения двухполостного гиперболоида производятся теми плоскостями, параллельными одной из плоскостей (8), которые вообще встречают нашу поверхность. И тут мы имеем два ряда круговых сечений.

Прямые, соединяющие центры этих окружностей, расположены, как было показано выше, в плоскости Oyz и пересекают данный двухполостный гиперболоид (*) в четырех точках, называемых точками закругления или омбилическими точками.

В случае *двухполостного гиперболоида вращения* ($a=b$) оба ряда круговых сечений сливаются в один и омбилические точки (их будет теперь две) совпадают с вершинами гиперболоида.

4. Легко также найти круговые сечения *конуса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (***)$$

Действительно, на основании сказанного в § 296 эти круговые сечения производятся теми же плоскостями, что и круговые сечения однополостного гиперболоида (**).

Если рассматривать одно из круговых сечений как направляющую, то мы видим, что всякий конус второго порядка (***) может быть рассматриваем как „наклонный круговой конус“, т. е. как геометрическое место прямых, проходящих через неподвижную точку и неподвижную окружность.

В случае $a=b$ („прямой круговой конус“) оба ряда круговых сечений сливаются в один.

298. Круговые сечения эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра. Нам остается рассмотреть только круговые сечения эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра, ибо гиперболический параболоид, а также параболический и гиперболический цилиндры не могут иметь круговых сечений. Действительно, мы знаем, что все плоские сечения гиперболического параболоида — линии параболического и гиперболического типов. Также очевидно, что параболический и гиперболический цилиндры не могут иметь круговых сечений.

Итак, рассмотрим эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \qquad (1)$$

На основании сказанного в § 296, плоскости, производящие круговые сечения в поверхности (1), производят также круговые сечения в эллиптическом цилиндре

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1. \qquad (2)$$

На основании сказанного в том же § 296, мы можем ограничиться разысканием сечений, плоскости которых проходят через начало координат. Пусть r радиус одного из таких сечений, и

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1 \tag{3}$$

уравнение сферы с центром в начале координат, проходящей через это сечение. Вычитая (3) из (2), получим уравнение

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r^2}\right)y^2-\frac{z^2}{r^2}=0, \tag{4}$$

которому должны удовлетворять все точки искомого сечения. Как и в предыдущем параграфе, заключаем, что r должно удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{1}{r^2}=0,$$

откуда следует, что $r^2=p$, или $r^2=q$.

Пусть $p>q$. Тогда, как легко видеть, при $r^2=q$ конус (4) не распадается на действительные плоскости. Остается предположить, что $r^2=p$. Тогда уравнение (4) может быть переписано так:

$$\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)y^2-\frac{z^2}{p}=0$$

и представляет две действительные плоскости

$$y\sqrt{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}-z\sqrt{\frac{1}{p}}=0 \quad \text{и} \quad y\sqrt{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}+z\sqrt{\frac{1}{p}}=0, \tag{5}$$

проходящие через большую ось поперечного сечения цилиндра, которое есть эллипс

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1,$$

и одинаково наклоненных к плоскости этого поперечного сечения.

Все прочие круговые сечения производятся плоскостями, параллельными одной из плоскостей (5). Мы имеем, значит, и здесь два ряда круговых сечений, одинаково наклоненных к поперечному сечению цилиндра. В случае кругового цилиндра оба эти ряда сливаются в один.

Вернемся к параболоиду (1). На основании сказанного, круговые сечения в нем производятся плоскостями, параллельными одной из плоскостей (5) и встречающими данную поверхность.

Следы круговых сечений на плоскости Oyz дают хорды параболы $y^2=2qz$; центры круговых сечений расположены на серединах этих хорд, т. е. на диаметрах, сопряженных с их направлениями. Мы имеем, таким образом, на плоскости Oyz две прямые, параллельные оси, на которых расположены центры круговых сечений. Прямые эти пересекают параболоид в двух точках, называемых *омбилическими*.

В случае параболоида вращения ($p=q$) имеется только один ряд круговых сечений с центрами на оси вращения. Омбилическая точка только одна — вершина параболоида.

ДОБАВЛЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ

В этом Добавлении мы излагаем те свойства линейных, квадратичных и билинейных форм, которыми мы пользуемся в процессе изложения. Мы считаем что читатель знаком с элементами теории определителей. Все же в отделе I мы напоминаем некоторые основные свойства определителей, приводя иногда и доказательства.

I. ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ И ТАБЛИЦАХ

1. Некоторые свойства определителей. Мы считаем известным, что представляет собою определитель n-го порядка

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

который составлен из n^2 элементов, расположенных в таблицу

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}, \end{matrix} \tag{2}$$

состоящую из n строк и n столбцов. Каждый элемент обозначен одной буквой (в нашем случае a) с двумя индексами (значками), первый из которых указывает номер строки, а второй — номер столбца, которым принадлежит данный элемент.

Напомним теперь следующие понятия.

Если из определителя (2) вычеркнем строку с номером i и столбец с номером k, т. е. строку и столбец, пересекающиеся на элементе a_{ik}, то мы получим определитель $(n-1)$-го порядка, называемый *минором* элемента a_{ik} в определителе A.

Минор, взятый со знаком, выбранным по определенному правилу, которое мы сейчас укажем, называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ik}.

Правило это заключается в следующем: если i и k одинаковой четности[1]), то перед минором берется знак $(+)$; если же i и k различной четности[2]), то берется знак $(-)$.

Например, в определителе третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[1]) То-есть оба нечетные или оба четные.

[2]) То-есть одно из них четное, а другое нечетное.

минорами элементов последней строки (т. е. элементов $a_{31}\ a_{32}\ a_{33}$) являются соответственно определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

а алгебраические дополнения тех же элемеитов соответственно суть

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Вообще через A_{ik} мы будем обозначать алгебраическое дополнение элемента a_{ik} в определителе A.

Определитель называется *симметричным*, если $a_{ij} = a_{ji}$, т. е. если элементы, расположенные симметрично относительно „главной диагонали" (идущей сверху вниз и слева направо), равны между собою. Легко видеть, что в случае симметричного определителя

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

Мы считаем также известным свойства определителей, приводимые ниже (иногда с краткими доказательствами):

1°. Если в определителе поменять ролями строки и столбцы (т. е. заменить строки столбцами с теми же номерами и обратно), то определитель не изменит величины.

2°. Если поменять местами две строки (или два столбца), то определитель изменит знак на обратный.

3°. Если в определителе две строки (или два столбца) одинаковы, то определитель равен нулю (это свойство есть, очевидно, непосредственное следствие предыдущего).

4°. Определитель A равен сумме элементов какой-либо строки (или столбца), умноженных на соответствующие алгебраические дополнения. Выразим это предложение формулой.

Пусть, например, мы взяли строку с номером k; тогда по только что сказанному

$$A = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn}, \tag{3}$$

или, короче,

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki} \tag{3a}$$

(суммирование по значку i).

Аналогично, если возьмем столбец с номером k, то будем иметь

$$A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}. \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) выражают *разложение определителя по элементам k-й строки или k-го столбца.*

Если в правой части формулы (3) заменить элементы k-й строки $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$ элементами $a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{ln}$ какой-либо другой строки, с номером l, то мы получим уже не определитель A, а определитель, в котором две строки одинаковы (а именно, k-я строка нового определителя будет тождественна с l-й). Значит, этот новый определитель будет равен нулю. Таким образом имеем

$$a_{l1}A_{k1} + a_{l2}A_{k2} + \ldots + a_{ln}A_{kn} = 0 \text{ (если } l \neq k). \tag{5}$$

Результаты (3) и (5) можно выразить одной формулой:

$$a_{l1}A_{k1} + a_{l2}A_{k2} + \ldots + a_{ln}A_{kn} = \begin{cases} A, \text{ если } l = k, \\ 0, \text{ если } l \neq k. \end{cases} \tag{6}$$

Точно так же, исходя из разложения определителя по элементам k-го столбца, получим

$$a_{1l}A_{1k}+a_{2l}A_{2k}+\ldots+a_{nl}A_{nk}=\begin{cases}A, & \text{если } l=k,\\ 0, & \text{если } l\neq k.\end{cases} \tag{7}$$

5°. Если элементы какого-либо столбца определителя представлены каждый в виде суммы двух величин, то данный определитель есть сумма двух определителей, получаемых из данного, если в упомянутом столбце оставить только первые слагаемые или только вторые. Это непосредственно вытекает из формулы (4).

Аналогичное предложение получится, если мы поменяем ролями строки и столбцы.

Примеры:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & b_{33}\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}.$$

6°. Если все элементы одной какой-либо строки (столбца) определителя умножить на один и тот же множитель, то весь определитель умножится на тот же множитель.

Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на один и тот же множитель.

7°. Рассмотрим два определителя

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix},\qquad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

одного и того же порядка n. Произведение AB этих определителей может быть представлено также в виде определителя

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{vmatrix}$$

n-го порядка, элементы которого составляются по следующему правилу: элемент c_{ik} есть сумма произведений элементов i-й строки определителя A на соответствующие элементы k-й строки определителя B, так что

$$c_{ik}=a_{i1}b_{k1}+a_{i2}b_{k2}+\ldots+a_{in}b_{kn}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{ks}. \tag{8}$$

Так как определитель не изменяется при замене строк столбцами и обратно, то предыдущее правило можно видоизменять различным образом, производя в определителях A, B, C замену строк столбцами и обратно. Например, если применить правило (8), предварительно заменив в определителе B строки столбцами и обратно, то получим

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}, \tag{9}$$

т. е. вместо „построчного" умножения (8), мы получим умножение элементов строк первого определителя на соответственные элемеиты столбцов второго.

О таблице

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{matrix},$$

элементы которой составлены из элементов таблиц

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{matrix}$$

по одному из указанных правил (8) или (9), говорят, что она получена из двух последних таблиц путем их *перемножения* (в первом случае — построчного, а во втором — умножением строк на столбцы).

2. Ранг определителя или таблицы. Из элементов таблицы (2) § 1 мы можем составить не только определитель A, порядка n, но и ряд других определителей, вычеркивая известное количество любых строк и такое же количество любых столбцов. Все такие определители (включая и A) мы будем называть определителями, составленными из таблицы (2) § 1.

Если определитель A отличен от нуля, то говорят, что *ранг таблицы* равен n; если же $A = 0$, то ранг будет меньше n. А именно, *ранг таблицы* определяется следующим образом: если среди определителей порядка r, составленных из таблицы (2) § 1, есть по крайней мере один, отличный от нуля, а все определители высшего порядка равны нулю, то говорят, что ранг таблицы равен r.

Часто, вместо того чтобы говорить о ранге таблицы, говорят о ранге определителя A.

Таблица (2) § 1 есть „квадратная“ таблица, состоящая из равного числа строк и столбцов. Понятие ранга можно распространить и на „прямоугольную“ таблицу

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{matrix} \tag{1}$$

состоящую из m строк и n столбцов, причем m может отличаться от n. Из этой таблицы вычеркиванием ряда строк и столбцов (в таком количестве, чтобы оставшаяся таблица была квадратной) можно составить ряд определителей. Если среди них есть хоть один определитель порядка r, отличный от нуля, но все определители порядка выше r равны нулю, то говорят, что ранг таблицы (1) есть r. Ясно, что ранг таблицы не может быть больше, чем наименьшее из двух чисел m, n.

Для того чтобы установить, что ранг таблицы равен r, достаточно найти в этой таблице хотя бы один определитель порядка r, отличный от нуля, и, кроме того, показать, что все определители той же таблицы, порядка $(r+1)$, равны нулю. Действительно, тогда будут равны нулю и все определители порядка $(r+2)$, в чем можно убедиться, разлагая их по элементам какой-либо строки или столбца. Также убеждаемся, что равны нулю определители порядка $(r+3)$ и т. д., т. е. все определители порядка выше r.

Докажем теперь одно предложение, которое понадобится нам в дальнейшем. Условимся говорить, что данная строка есть *линейная комбинация* других данных строк, если она получается умножением этих последних на некоторые числа и сложением [1]).

[1]) „Умножить строку на число“ значит умножить каждый элемент строки на это число.

Например, если при помощи двух строк

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in},$$
$$a_{j1},\ a_{j2},\ \ldots,\ a_{jn}$$

составить строку

$$\lambda a_{i1}+\mu a_{j1},\ \ldots,\ \lambda a_{in}+\mu a_{jn}, \tag{2}$$

то эта последняя есть линейная комбинация двух предыдущих. Предложение, которое мы хотим доказать, заключается в следующем:

Ранг таблицы не изменится, если приписать к ней строку, являющуюся линейной комбинацией каких-либо строк данной таблицы.

Пусть, например, к таблице (1) ранга r приписана строка (2). Докажем, что все определители $r+1$-го порядка этой таблицы равны нулю. Действительно, если данный определитель $r+1$-го порядка целиком принадлежит старой таблице, то он равен нулю (ибо ранг старой таблицы есть r). Возьмем теперь какой-нибудь определитель $r+1$-го порядка, содержащий элементы новой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2}\ldots a_{i_1k_{r+1}} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2}\ldots a_{i_2k_{r+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_{ik_1}+\mu a_{jk_1} & \lambda a_{ik_2}+\mu a_{jk_2}\ldots \lambda a_{ik_{r+1}}+\mu a_{jk_{r+1}} \end{vmatrix} \tag{3}$$

На основании сказанного в § 1 (5°) определитель этот равен сумме:

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2}\ldots a_{i_1k_{r+1}} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2}\ldots a_{i_2k_{r+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ik_1} & a_{ik_2}\ldots a_{ik_{r+1}} \end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2}\ldots a_{i_1k_{r+1}} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2}\ldots a_{i_2k_{r+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{jk_1} & a_{jk_2}\ldots a_{jk_{r+1}} \end{vmatrix}$$

Но оба предыдущих определителя равны нулю либо в силу того, что в них есть одинаковые строки, либо в силу того, что они — определители $r+1$-го порядка, принадлежащие таблице (1).

Таким образом определитель (3) равен нулю. С другой стороны, в старой таблице, а следовательно, и в новой, имеется определитель порядка r, отличный от нуля. Следовательно, ранг новой таблицы равен рангу r старой.

Ясно, что ход рассуждения останется таким же, если приписанная строка получена комбинацией не двух, а любого числа строк.

Совершенно аналогичное предложение получим, заменив строки столбцами.

Следствие. Отметим непосредственное следствие предыдущего предложения: если все строки таблицы суть линейные комбинации r строк, и если в этих последних содержится определитель порядка r, не равный нулю, то ранг таблицы равен r. Действительно, ранг таблицы, составленной из упомянутых r строк, равен, очевидно r. Но ранг этот останется неизменным, если к этой последней таблице приписать любое число строк, являющихся линейными комбинациями взятых строк.

3. Решение системы линейных уравнений с определителем, отличным от нуля. Напомним, наконец, как решается система n линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_1, \ldots, b_n$ — заданные величины.

Мы рассмотрим пока тот простой случай, когда определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из коэфициентов при неизвестных, отличен от нуля.

Умножим уравнения (1) соответственно на

$$A_{1k},\ A_{2k},\ \dots,\ A_{nk},$$

т. е. на алгебраические дополнения элементов $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ k-го столбца, и сложим. Коэфициенты при x_i в левой части полученного равенства будут, очевидно,

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \dots + a_{ni}A_{nk};$$

но эта сумма равна нулю, при всех значениях i кроме значения $i = k$, когда она обращается в A; см. § 1, формула (7).

Значит, в левой части остается единственный член, равный Ax_k; таким образом будем иметь

$$Ax_k = A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_n, \tag{2}$$

откуда

$$x_k = \frac{1}{A}(A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_n). \tag{3}$$

Придавая k значения $1, 2, \dots, n$, получим таким образом вполне определенные значения для всех неизвестных. Непосредственной их подстановкой в (1) убеждаемся, что система наша действительно удовлетворена.

Решение (3) можно, очевидно, переписать и так:

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \tag{4}$$

т. е. x_k выражается дробью, знаменатель которой есть определитель коэфициентов при неизвестных системы (1), а числитель — определитель, получающийся из предыдущего, заменой k-го столбца столбцом свободных членов $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Отметим, что *величины x_k выражаются линейно и однородно через свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_n$*; это следует непосредственно из (3).

В частности, если $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, то, как показывает любая из формул (2), (3), (4), будем иметь

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Следовательно, если определитель A отличен от нуля, то линейная и *однородная* система

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

допускает только „нулевое“ решение: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Случай, когда $A = 0$, будет рассмотрен ниже (§ 6, 7).

II. ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

4. Алгебраические формы. Линейные формы. Алгебраической *формой* нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется целая рациональная и однородная функция этих переменных. Напомним, что целая рациональная функция называется *однородной*, если все члены ее — одной и той же степени, или, как говорят, одного *измерения*. Число, показывающее степень (измерение) каждого из членов формы, называется ее *порядком* или также *измерением*.

Формы первого порядка называются *линейными*, второго порядка — *квадратичными* и т. д.

Линейная форма f переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет вид

$$f = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные коэфициенты формы. Например, $3x + 4y + 2z$ есть линейная форма переменных x, y, z.

Линейная форма равна тождественно нулю (т. е. при всех значениях переменных) тогда и только тогда, когда все коэфициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны нулю. Действительно, если $f = 0$ тождественно, то полагая, например, $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, получим $a_1 = 0$; также докажем равенство нулю остальных коэфициентов. Обратно, если все коэфициенты равны нулю, то, очевидно, $f = 0$ тождественно.

5. Система линейных форм. Зависимые и независимые линейные формы. Особый интерес представляет изучение совокупности нескольких линейных форм.

Пусть имеем m линейных форм $f_1, f_2, \ldots, f_m$, определяемых равенствами

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Коэфициенты мы снабдили двумя значками, первый из которых указывает номер формы, а второй — номер переменной, на которую умножается данный коэфициент.

Формы $f_1, f_2, \ldots, f_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (*из которых по крайней мере одно отлично от нуля*), что имеет место тождество [1])

$$\lambda_1f_1 + \lambda_2f_2 + \ldots + \lambda_mf_m = 0. \tag{2}$$

Если же таких чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ найти нельзя, кроме $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то наши формы называются *линейно независимыми*.

Происхождение этих названий понятно: если имеет место тождество (2), то будем иметь, считая, например, $\lambda_m \neq 0$:

$$f_m = k_1f_1 + k_2f_2 + \ldots + k_{m-1}f_{m-1}, \tag{3}$$

где

$$k_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}, \ldots, k_{m-1} = -\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m},$$

т. е. f_m есть линейная комбинация остальных [2]). При этом мы считали, что $m \geqslant 2$. Определение линейной независимости и зависимости, основанное на (2), применимо и к одной единственной форме ($m = 1$); в этом случае, очевидно, форма „линейно независима" тогда и только тогда, когда она не равна тождественно нулю.

---

[1]) То-есть равенство, справедливое при всяких значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

[2]) Некоторые из величин $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$ (и даже все вместе) могут быть равны нулю.

В качестве простого примера отметим еще случай двух форм

$$f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \quad \text{и} \quad f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n.$$

На основании только что сказанного, эти две формы зависимы тогда и только тогда, когда имеет место одно из тождеств

$$f_2 = kf_1 \quad \text{или} \quad f_1 = k'f_2, \tag{*}$$

где k и k'—постоянные, отличные от нуля. Если, например, форма f_1 не равна тождественно нулю, то наверное имеет место первое из предыдущих равенств; если f_2 не равна тождественно нулю, то наверное имеет место второе из этих равенств. Если же обе формы f_1, f_2 не равны тождественно нулю, то имеют место оба эти равенства[1]).

Из тождества $f_2 = kf_1$, т. е. из тождества $a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = k(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)$ вытекает

$$a_{21} = ka_{11}, \quad a_{22} = ka_{12}, \quad \ldots, \quad a_{2n} = ka_{1n}, \tag{**}$$

т. е. что коэфициенты формы f_2 пропорциональны коэфициентам формы f_1.

Докажем теперь следующее важное предложение:

Формы $f_1, f_2, \ldots, f_m$ независимы тогда и только тогда, когда ранг таблицы их коэфициентов

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \tag{4}$$

равен числу форм, т. е. m.

Общее: *если ранг таблицы* (4) *равен* $r \leqslant m$, то любые $r + k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *форм, взятых из данных форм*

$$f_1, f_2, \ldots, f_m, \tag{5}$$

зависимы между собою; среди форм (5) *можно всегда выбрать r независимых друг от друга форм; все остальные формы* (5) *будут линейными комбинациями этих r форм.*

Действительно, пусть r есть ранг таблицы (4), так что по крайней мере один определитель порядка r, составленный из этой таблицы, отличен от нуля. Не нарушая общности, мы можем считать, что

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

(Для этого в случае надобности, достаточно переставить номера у $f_1, f_2, \ldots, f_m$ и у переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.) Докажем, что формы $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — независимые. Действительно, предположим, что существует тождество

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_r f_r = 0, \tag{7}$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} &\lambda_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\ &+ \lambda_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \lambda_r (a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n) = 0. \end{aligned}$$

---

[1]) Так как, по условию, формы f_1, f_2 — зависимы, имеем $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$, где λ_1, λ_2 — некоторые постоянные, не равные одновременно нулю. Если каждая из форм f_1, f_2 не равна тождественно нулю, то, очевидно, ни одно из чисел λ_1, λ_2 не может равняться нулю, и мы имеем оба равенства (*). Если же, например, f_1 не равна тождественно нулю, а f_2 — тождественный нуль, то имеем первое из равенств (*) при $k = 0$.

Так как, по предположению, предыдущее равенство есть тождество, то все коэфициенты при $x_1, x_2, \ldots, x_n$ должны быть равны нулю, т. е. мы должны иметь

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_r a_{r1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_r a_{rn} = 0.$$

Но так как определитель коэфициентов при $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ в первых r уравнениях отличен, по условию, от нуля [1]), то, на основании сказанного в § 3, мы должны иметь $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$. Значит, тождество (7) не может иметь места, если хоть одно из чисел λ_l отлично от нуля; а это и доказывает, что формы $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — независимы.

Покажем теперь, что все остальные формы $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_m$ суть линейные комбинации формы $f_1, f_2, \ldots, f_r$.

Пусть f_l есть одна из форм $f_{r+1}, \ldots, f_m$. Составим определитель

$$D_l = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{rr} \quad f_r \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{lr} \quad f_l \end{vmatrix},$$

который, как мы видим, получается из D прибавлением одной строки и одного столбца, и докажем, что он тождественно равен нулю.

Действительно, подставляя вместо $f_1, \ldots, f_r, f_l$ их значения, получим

$$D_l = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr} & a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \\ a_{l1} & a_{l2} \ldots a_{lr} & a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n \end{vmatrix}.$$

На основании § 1, 5°, предыдущий определитель можно представить как сумму n слагаемых

$$D_l = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & a_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l1} & a_{l2} \ldots a_{lr} & a_{l1} \end{vmatrix} + \ldots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l1} & a_{l2} \ldots a_{lr} & a_{ln} \end{vmatrix}.$$

Но все определители, фигурирующие справа, равны нулю, либо в силу того, что у них два одинаковых столбца, либо в силу того, что они суть определители $(r+1)$-го порядка таблицы (4), ранг которой r.

Итак, имеем тождественно

$$D_l = 0.$$

Разлагая определитель D_l по элементам последнего столбца, получим

$$D_l = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_r f_r + D f_l,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_r$, D суть алгебраические дополнения элементов $f_1, f_2, \ldots, f_r, f_l$ в D_l (причем D здесь имеет то же значение, что выше).

Значит, из $D_l = 0$ следует

$$D f_l + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_r f_r = 0; \tag{8}$$

---

[1]) Это есть тот же определитель D, в котором строки заменены столбцами.

так как $D \neq 0$, то, деля обе части на D, получаем (обозначая через $k_1, k_2, \ldots, k_r$ постоянные)

$$f_l = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_r f_r, \tag{8a}$$

т. е. форма f_l есть линейная комбинация форм $f_1, f_2, \ldots, f_r$, а это и доказывает наше утверждение.

Остается показать, что любые $(r+k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ форм, выбранные из $f_1, f_2, \ldots, f_m$ зависимы. Это почти очевидно на основании сказанного. Действительно, таблица коэфициентов выбранных форм есть часть таблицы (4); поэтому ранг ее не может превосходнть ранга этой таблицы, т. е. r. Пусть $r' \leqslant r$ есть ранг этой новой таблицы. Тогда, на основании сказанного выше, выбранные нами формы суть линейные комбинации некоторых r' форм из их числа, т. е. эти формы зависимы.

Наше предложение таким образом вполне доказано. Из него вытекает еще одно предложение, которое необходимо заметить: *ранг таблицы* (4) *равен максимальному числу независимых друг от друга форм, которые можно выбрать из форм* $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Отметим, что зависимость (8) можно кратко записать так: $D_l = 0$, или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} & f_2 \\ \ldots & \ldots \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr} & f_2 \\ a_{l1} & a_{l2} \ldots a_{lr} & f_l \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Следствие. Из сказанного непосредственно вытекает следствие, являющееся обращением следствия, приведенного в конце § 2. А именно, мы покажем, что если ранг таблицы

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{matrix} \tag{4}$$

равен r $(r \leqslant m, r \leqslant n)$, то любая ее строка есть линейная комбинация любых r строк, содержащих определитель порядка r, отличный от нуля.

Действительно, будем считать, например, что в первых r строках имеется определитель порядка r, отличный от нуля; не нарушая общности, можно считать, что это есть определитель формулы (6). Применяя формулу (8a), получаем, сравнивая в правых и левых частях коэфициенты при $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\left.\begin{aligned} a_{l1} &= k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \ldots + k_r a_{r1}, \\ a_{l2} &= k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \ldots + k_r a_{r2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ln} &= k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \ldots + k_n a_{rn}, \end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

откуда и следует, что элементы l-й строки получаются умножением первых r строк соответственно на $k_1, k_2, \ldots, k_r$ и сложением. Величины $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — вполне определяются этим. Действительно, обращая внимание на первые r из соотношения (8b) и рассматривая их как уравнения относительно $k_1, \ldots, k_n$, убеждаемся, что эта система допускает только одно решение, ибо $D \neq 0$.

Мы можем написать соотношения вида (8b), взяв вместо r большее число строк, скажем s строк, где $s > r$.

Действительно, мы можем, например, прибавить к правым частям (8b) элементы лишних строк, умноженные на нуль. Но беря $s > r$, мы не можем уже утверждать, что множители $k_1, k_2, \ldots, k_s$ будут вполне определены.

Приведем простой пример. Рассмотрим таблицу из двух строк

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_1 & b_2 \ldots b_n \end{matrix} \tag{10}$$

Если все определители второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = a_i b_k - a_k b_i$$

равны нулю, но хоть один элемент первой строки отличен от нуля, то будем иметь

$$b_1 = ka_1, \quad b_2 = ka_2, \quad \ldots, \quad b_n = ka_n, \tag{11}$$

т. е. элементы второй строки пропорциональны элементам первой [1]). Формулы (11) справедливы и тогда, когда ранг таблицы (10) равен нулю (т. е. все ее элементы равны нулю), но в этом случае k остается неопределенным.

6. Приложение к решению системы линейных однородных уравнений в общем случае. В § 3 мы дали решение системы линейных уравнений в том случае, когда определитель системы отличен от нуля.

Теперь мы можем дать решение и в самом общем случае. Начнем с системы m линейных *однородных* уравнений с n неизвестными (причем m и n могут быть различны):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или, короче,

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \ldots, \; f_m = 0, \tag{1a}$$

где

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m). \tag{2}$$

Ранг таблицы коэфициентов

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \tag{3}$$

не может превосходить n (числа неизвестных), а также и m (числа уравнений). Если ранг этой таблицы равен числу неизвестных (это может быть только тогда, когда $m \geqslant n$), тогда система (1) допускает одно единственное решение

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

которое мы, для краткости, будем называть „нулевым“. Это следует из сказанного в § 3, ибо если ранг таблицы (3) равен n, то из уравнений (3) всегда можно выбрать n таких, определитель которых отличен от нуля [2]), а такие n уравнений могут быть удовлетворены только нулевым решением.

Докажем теперь, что если ранг таблицы (3) меньше числа неизвестных, то система (1) допускает бесчисленное множество ненулевых [3]) решений. Действи-

---

[1]) Мы не можем утверждать, что и элементы первой строки пропорциональны элементам второй, покуда не знаем, есть ли среди элементов второй строки отличные от нуля.

[2]) Действительно, среди определителей, составленных из таблицы (3), должен быть по крайней мере один n-го порядка, отличный от нуля. Так как такой определитель должен содержать n столбцов, то таблица его элементов получается из (3) вычеркиванием некоторых строк. Вычеркнув из системы (1) соответствующие уравнения, получим требуемую систему n уравнений.

[3]) Ненулевым мы называем всякое решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такое, что по крайней мере одно из чисел $x_1, \ldots, x_n$ отлично от нуля.

тельно, пусть r есть ранг таблицы (3) и пусть $r<n$. Переставляя, в случае надобности, нумерацию уравнений и неизвестных, можно считать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2r} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2}\dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, на основании сказанного в предыдущем параграфе, формы $f_1, f_2, \dots, f_r$ будут независимы между собою, а все прочие: $f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_m$ будут их линейными комбинациями. Поэтому всякие значения неизвестных, удовлетворяющие уравнениям

$$f_1 = 0, \dots, f_r = 0, \tag{4}$$

т. е. первым r из уравнений (1), будут удовлетворять и всем прочим [1]).

Итак, нам следует заботиться только о решении первых r уравнений системы (1); остальные уравнения являются их следствиями.

Переписав эти r уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= -(a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= -(a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

можно (придав неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ совершенно произвольные значения) решить предыдущую систему относительно $x_1, x_2, \dots, x_r$ по правилу § 3.

Итак, неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$, числом $(n-r)$, остаются совершенно произвольными, а остальные $x_1, x_2, \dots, x_r$, числом r, выражаются через них. Легко видеть, на основании формулы (3) § 3, *что $x_1, \dots, x_r$ выражаются через $x_{r+1}, \dots, x_n$ линейно и однородно.*

В частности, если число уравнений меньше числа неизвестных (т. е. $m<n$), то ранг $r \leqslant m < n$, и система всегда допускает бесчисленное множество ненулевых решений.

Изучим, более подробно, степень неопределенности решения. Для этого сделаем несколько предварительных замечаний. Пусть имеем несколько (скажем s) решений системы (1):

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_n^{(s)} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(верхний значок указывает номер решения, а нижний, попрежнему, номер неизвестной). Легко видеть, что любая линейная комбинация этих решений, будет также решением; иными словами, $x_1, x_2, \dots, x_n$ будет также решением, если

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \dots + \lambda_s x_1^{(s)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \lambda_1 x_n^{(1)} + \lambda_2 x_n^{(2)} + \dots + \lambda_s x_n^{(s)}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — произвольные числа. Это вытекает из линейного и однородного характера уравнений (1); непосредственной подстановкой можно легко убедиться в справедливости сказанного.

В связи с этим *решения* (6) *называют линейно независимыми* (или просто *независимыми), если ни одна из строк в* (6) *не является линейной комбина-*

---

[1]) Ибо в силу тождества $f_l = k_1 f_1 + \dots + k_r f_r$ будем иметь $f_l = 0$, если $f_1 = \dots = f_r = 0$.

цией остальных. В противоположном случае решения — *линейно зависимы.* В случае одного единственного решения ($s = 1$) мы будем называть его „линейно независимым", если среди $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ есть хоть одно отличное от нуля.

Из сказанного в § 2 (Следствие) и в § 5 (Следствие) вытекает следующее: *для того, чтобы s решений* (6) *были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг таблицы* (1) *был равен s.*

Докажем теперь, что если ранг таблицы (3) равен r, то система (1) имеет $n - r$ независимых решений.

Действительно, решая систему (5) относительно $x_1, x_2, \ldots, x_r$, получим формулы вида

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_{r+1} + b_{12}x_{r+2} + \ldots + b_{1,\,n-r}x_n, \\ x_2 &= b_{21}x_{r+1} + b_{22}x_{r+2} + \ldots + b_{2,\,n-r}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= b_{r1}x_{r+1} + b_{r2}x_{r+2} + \ldots + b_{r,\,n-r}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

где b_{11}, b_{12} и т. д. некоторые определенные постоянные (нам не важно знать их выражения), а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — совершенно произвольны. Предыдущее общее решение системы (1) можно представить и так, в несколько более симметричной форме:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + \ldots + b_{1,\,n-r}\lambda_{n-r}, \\ x_2 &= b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + \ldots + b_{2,\,n-r}\lambda_{n-r}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= b_{r1}\lambda_1 + b_{r2}\lambda_2 + \ldots + b_{r,\,n-r}\lambda_{n-r}, \\ x_{r+1} &= \lambda_1, \\ x_{r+2} &= \lambda_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda_{n-r}. \end{aligned}\right\} \tag{5b}$$

Придавая $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ все возможные значения, получим все решения системы (1).

Так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ совершенно произвольны, мы можем им придавать любые частные значения и получать, таким образом, различные частные решения. Составим $n - r$ частных решений, соответствующих следующим частным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$

для первого решения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_{n-r} = 0$,
„ второго „ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \ldots, \lambda_{n-r} = 0$,
. . . . . .
для $(n-r)$-го „ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_{n-r} = 1$.

Эти решения выпишем в виде таблицы (в каждой строке — одно решение):

$$\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{r1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{r2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1,\,n-r} & b_{2,\,n-r} & \ldots & b_{r,\,n-r} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \tag{8}$$

Эти решения — линейно независимы, ибо ранг предыдущей таблицы равен $n - r$; действительно, определитель, составленный из последних $n - r$ столбцов, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Легко видеть, что любое решение системы (1) есть линейная комбинация решений (8). Действительно, мы получим решение (5b), если умножим строки таблицы (8) соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ и сложим.

Найденные нами $(n-r)$ решений (8) не являются чем-нибудь исключительным. Именно, легко показать, что если мы имеем какие-нибудь $n-r$ независимых решений:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_n^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ x_1^{(n-r)}, & x_2^{(n-r)}, & \ldots, & x_n^{(n-r)}, \end{array}\right\} \tag{9}$$

то всякое решение нашей системы [в частности и любое из решений (8)] есть линейная их комбинация.

Действительно, заметим прежде всего, что любая строка таблицы (9) есть линейная комбинация строк таблицы (8), так как строки таблицы (9) суть решения системы (1). Значит, если мы припишем к таблице (8) еще все строки (9), то полученная таким образом таблица (с двойным числом строк) также будет иметь ранг $n-r$, на основании сказанного в § 2 (Следствие).

Пусть теперь дано какое-либо решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы (1). Если мы и его припишем в виде строки к предыдущей таблице, то ранг ее останется равным $n-r$, ибо новая строка есть линейная комбинация первых $n-r$ строк.

Поэтому, на основании § 5 (Следствие), эта последняя строка будет линейной комбинацией строк (9), ибо в этих строках содержится отличный от нуля определитель порядка r (это последнее следует из того, что решения (9) независимы).

Резюмируя, можно высказать предложение:

Если ранг таблицы системы (1) *равен r, то всегда можно найти* $n-r$ *независимых друг от друга решений; бо́льшего числа решений, независимых друг от друга, быть не может. При помощи любых* $n-r$ *независимых решений* (9) *можно составить всякое решение* $x_1, \ldots, x_n$ *линейной комбинацией:*

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} x_1^{(n-r)}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda_1 x_n^{(1)} + \lambda_2 x_n^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} x_n^{(n-r)}, \end{array}\right\} \tag{10}$$

Следствие. Отметим, наконец, одно непосредственное следствие. Если к системе (1а) присоединить новое уравнение $f=0$, являющееся следствием системы (1а), т. е. удовлетворяющееся всяким решением этой системы, то от этого число возможных независимых решений не может измениться. Поэтому ранг таблицы (3), пополненной строкой коэфициентов формы f, останется прежним, т. е. r. Следовательно, форма f есть линейная комбинация форм $f_1, f_2, \ldots, f_m$ (и даже только r форм $f_1, f_2, \ldots, f_r$, из числа предыдущих, если только $f_1, f_2, \ldots, f_r$ линейно независимы).

6а. Частный случай. Для нас особый интерес представляет тот частный случай, когда ранг r таблицы на единицу меньше числа n неизвестных. Тогда, оставив только независимые уравнения, будем иметь систему

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = 0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

По условию, ранг таблицы

$$\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{array} \tag{2}$$

равен $n-1$; это значит, что среди определителей $n-1$-го порядка

$$A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn}, \tag{3}$$

получаемых вычеркиванием из таблицы (2) первого, второго, ..., n-го столбцов, есть отличные от нуля. Условимся приписывать определителям (3) определенные знаки, а именно, будем их рассматривать, как алгебраические дополнения элементов последней строки определителя

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

(последняя строка состоит из произвольно приписанных элементов).

Легко убедиться в том, что строка (3) дает одно из решений системы (1); например, подставляя на место $x_1, \dots, x_n$ в левую часть первого из уравнений (1) величины (3), получим

$$a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \\ a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \end{vmatrix} = 0$$

(ибо в последнем определителе — две одинаковые строки); также убедимся, что удовлетворены остальные уравнения.

Так как, далее, система (1) может иметь только одно независимое решение (ибо ее ранг равен $n-1$), то всякое решение этой системы будет дано формулой:

$$x_1 = \lambda A_{n1}, \quad x_2 = \lambda A_{n2}, \dots, \quad x_n = \lambda A_{nn}, \tag{5}$$

где λ — некоторое число. Иными словами, всякое решение системы (1) пропорционально решению (3).

Следствие. Если ранг определителя (4) равен $n-1$, то алгебраические дополнения элементов любой строки пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов другой строки (если только эти последние алгебраические дополнения не все равны нулю). Действительно, составим систему n уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Так как ранг определителя A равен $n-1$, то одно из предыдущих уравнений есть следствие остальных и мы можем вычеркнуть из системы (6) любое одно уравнение, такое однако, чтобы ранг таблицы коэфициентов оставшихся уравнений был равен $n-1$. Если алгебраические дополнения элементов k-й строки

$$A_{k1}, \quad A_{k2}, \dots, \quad A_{kn} \tag{3a}$$

не все равны нулю, то мы можем вычеркнуть k-е уравнение. Тогда, на основании предыдущего, всякое решение системы (6) будет пропорционально строке [1]) (3a).

Если и среди алгебраических дополнений элементов i-й строки

$$A_{i1}, \quad A_{i2}, \dots, \quad A_{in} \tag{3b}$$

есть отличные от нуля, то и эта строка дает ненулевое решение системы (6) и, значит, эта строка должна быть пропорциональна строке (3a), т. е.

$$\frac{A_{i1}}{A_{k1}} = \frac{A_{i2}}{A_{k2}} = \dots = \frac{A_{in}}{A_{kn}}. \tag{7}$$

Эта формула, очевидно, останется справедливой и в том случае, если все величины (3b) равны нулю.

[1]) То-есть будет дано формулами: $x_1 = \lambda A_{k1}, x_2 = \lambda A_{k2}, \dots, x_n = \lambda A_{kn}$.

Выбрав из (7) какую-либо пару отношений, будем иметь

$$\frac{A_{ir}}{A_{kr}} = \frac{A_{is}}{A_{ks}},$$

откуда следует, что (если ранг определителя A равен $n-1$)

$$A_{ir}A_{ks} - A_{kr}A_{is} = 0 \tag{8}$$

для всех значений i, r, k, s. Равенство (8) доказано для случая, когда не все величины (3а) равны нулю. Но очевидно они справедливы и в случае, если все эти величины обращаются в нуль. Равеиства (8) легче всего запомнить, если заметить, что онн выражают следующее предложение:

При $A=0$, ранг определителя

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{vmatrix}$$

не превосходит единицы. Действительно, прн $A=0$ ранг определителя A равен $n-1$ или меньше $n-1$. В первом случае теорема доказана: она следует из (8); во втором — теорема очевидна, ибо тогда все $A_{ij}=0$.

7. Решение системы неоднородных уравнений. Обращаясь к системе неоднородных уравнений, рассмотрим для простоты случай, когда число уравнений равно числу неизвестных. Пусть эта система есть

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

отличен от нуля, то система имеет одно, вполне определенное решение, получаемое по правилу § 3.

Рассмотрим теперь случай, когда $A=0$, и, значит, ранг r определителя A меньше n. Будем считать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1r} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, на основании сказанного в § 5, формы $f_1, f_2, \dots, f_r$ независимы между собою, а формы $f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_n$ суть линейные комбинации предыдущих, а именно связаны с ними соотношеннями (9) § 5:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots & a_{rr} & f_r \\ a_{l1} & a_{l2} \dots & a_{lr} & f_l \end{vmatrix} = 0 \quad (l = r+1, r+2, \dots, n). \tag{3}$$

Так как в силу (1) $f_i = b_i$, то, для того чтобы система (1) имела решение, свободные члены b_i должны удовлетворять условиям

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lr} & b_l \end{vmatrix} = 0 \quad (l = r+1,\ r+2, \dots, n). \tag{4}$$

Если эти условия (4) соблюдены, то, очевидно, $(n-r)$ уравнений

$$f_{r+1} = b_{r+1}, \dots, f_n = b_n$$

являются следствиями первых r уравнений

$$f_1 = b_1,\ f_2 = b_2,\ \dots,\ f_r = b_r.$$

Оставляя в этих последних уравнениях произвольными неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$, и решая их относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$, как в предыдущем параграфе, получим бесчисленное множество решений [ибо $(n-r)$ неизвестных остаются произвольными].

Итак, при $A = 0$ неоднородная система либо вовсе не имеет решений [при несоблюдении условий (4)], либо имеет бесчисленное множество решений [когда соблюдены условия (4)].

Если число уравнений меньше числа неизвестных, то этот случай всегда можно свести к предыдущему, приписав к данным уравнениям нужное число уравнений вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, которые всегда тождественно удовлетворены и на данную систему не влияют.

8. Линейные подстановки. Если вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ вводятся новые переменные $x_1', x_2', \dots, x_n'$, которые суть линейные формы старых, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \dots + \mu_{1n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' &= \mu_{n1}x_1 + \mu_{n2}x_2 + \dots + \mu_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

то говорят, что над переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ производится *линейная и однородная подстановка* или *линейное однородное преобразование, таблица которой есть*

$$\begin{matrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{matrix} \tag{2}$$

Если определитель

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

равен нулю, то, как мы знаем из предыдущего параграфа, правые части формул (1) зависимы между собою, и, следовательно, мы будем иметь соотношение вида

$$\lambda_1 x_1' + \dots + \lambda_n' x_n' = 0,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — некоторые постоянные, не все равные нулю.

Таким образом в этом случае новые переменные не могут быть независимыми друг от друга. В этом случае, т. е. при $\Delta' = 0$, подстановка называется *особенной*.

Подстановка называется *неособенной*, если $\Delta' \neq 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только неособенные подстановки.

В этом случае мы можем, при произвольно взятых $x_1', \ldots, x_n'$, решить систему (1) относительно старых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и выразить их через новые. Именно, на основании сказанного в § 3, мы получим формулы вида

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}x_1' + \ldots + \lambda_{1n}x_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \lambda_{n1}x_1' + \ldots + \lambda_{nn}x_n', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

т. е. и старые переменные получаются из новых путем линейной однородной подстановки. Элементы таблицы

$$\begin{matrix} \lambda_{11} \ldots \lambda_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{n1} \ldots \lambda_{nn} \end{matrix} \tag{5}$$

легко вычисляются на основании сказанного в § 3.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} \ldots \lambda_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{n1} \ldots \lambda_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

этой подстановки, конечно, отличен от нуля, ибо иначе получилось бы, что правые части (4) суть зависимые формы, а это влекло бы за собою зависимость между переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что невозможно, ибо они — независимые переменные.

То обстоятельство, что $\Delta \neq 0$, следует также из равенства

$$\Delta \cdot \Delta' = 1, \tag{7}$$

доказательство которого предоставляем читателю.

Рассмотрим теперь n линейных форм:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

или, короче,

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Совершим над переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подстановку (4); тогда формы (8) обратятся очевидно в формы новых переменных

$$f_i' = a_{i1}'x_1' + \ldots + a_{in}'x_n'. \tag{9}$$

Через f_i' мы обозначаем форму, получаемую из f_i путем замены переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их выражениями (4), так что, по определению, имеем тождественно

$$f_i' = f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \tag{10}$$

если справа вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подразумевать их выражения (4).

Легко вычислить коэфициенты a_{ik}' преобразованных форм (9). Действительно, подставляя в правые части (10) вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их выражения (4), получаем

$$\begin{aligned} f_i' = {} & a_{i1}(\lambda_{11}x_1' + \lambda_{12}x_2' + \ldots + \lambda_{1n}x_n') + \\ & + a_{i2}(\lambda_{21}x_1' + \lambda_{22}x_2' + \ldots + \lambda_{2n}x_n') + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{in}(\lambda_{n1}x_1' + \lambda_{n2}x_2' + \ldots + \lambda_{nn}x_n'). \end{aligned}$$

Коэфициент a'_{ik} равен коэфициенту при x'_k в правой части предыдущей формы. Значит,

$$a'_{ik} = a_{i1}\lambda_{1k} + a_{i2}\lambda_{2k} + \ldots + a_{in}\lambda_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\lambda_{sk}. \tag{11}$$

Из этих формул вытекает, что таблица

$$\begin{matrix} a'_{11} & a'_{12} \ldots a'_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{n1} & a'_{n2} \ldots a'_{nn} \end{matrix} \tag{12}$$

получается от перемножения таблиц

$$\begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} \lambda_{11} \ldots \lambda_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_{n1} \ldots \lambda_{nn} \end{matrix}$$

при умножении строк первой на столбцы второй (§ 1). Поэтому определитель

$$A' = \begin{vmatrix} a'_{11} \cdot\ \cdot\ \cdot\ a'_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{n1} \cdot\ \cdot\ \cdot\ a'_{nn} \end{vmatrix} \tag{13}$$

есть произведение определителей A и Δ, и мы получаем важную формулу

$$A' = A \cdot \Delta. \tag{14}$$

Заметим теперь следующее важное обстоятельство.

Если какие-либо формы, взятые среди $f_1, f_2, \ldots, f_n$, зависимы, то преобразованные из них формы будут также зависимы. Формы же, преобразованные из независимых форм, будут также независимы.

Действительно, если мы имеем тождество вида

$$\lambda_i f_i + \lambda_k f_k + \ldots + \lambda_l f_l = 0, \tag{*}$$

то после преобразования (4) оно обратится в

$$\lambda_i f'_i + \lambda_k f'_k + \ldots + \lambda_l f'_l = 0; \tag{**}$$

обратно, из (**) следует (*). Отсюда, очевидно, вытекает наше утверждение.

С другой стороны, ранги таблиц

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot\ \cdot\ \cdot\ a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \cdot\ \cdot\ \cdot\ a_{nn} \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} a'_{11} \cdot\ \cdot\ \cdot\ a'_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_{n1} \cdot\ \cdot\ \cdot\ a'_{nn} \end{matrix}$$

определяются, соответственно, наибольшим числом независимых между собою форм, которые можно выбрать из $f_1, f_2, \ldots, f_n$, или, соответственно, из форм $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$. Но, на основании только что доказанного, эти числа равны между собою. Значит, ранги предыдущих таблиц одинаковы.

Так как таблица (5) может быть выбрана совершенно произвольно с тем лишь условием, чтобы ее определитель Δ был отличен от нуля, мы получим следующее важное предложение.

Если данную таблицу

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot\ \cdot\ \cdot\ a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \cdot\ \cdot\ \cdot\ a_{nn} \end{matrix}$$

умножить на любую таблицу

$$\begin{matrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{matrix}$$

определитель которой отличен от нуля, то полученная таблица

$$\begin{matrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{matrix}$$

будет иметь тот же ранг, что и данная.

Мы доказали это предложение, считая, что строки первой таблицы умножаются на столбцы второй. Но очевидно, что предложение справедливо и при других правилах умножения (строки на строки, столбцы на столбцы). Для доказательства достаточно в исходных таблицах (одной из обеих) поменять ролями строки и столбцы.

9. Последовательность линейных подстановок. Предположим, что над переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ производится подстановка

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \mu_{11}x_1 + \dots + \mu_{1n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_n &= \mu_{n1}x_1 + \dots + \mu_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

а над переменными $x'_1, \dots, x'_n$, в свою очередь, другая подстановка

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= \mu'_{11}x'_1 + \dots + \mu'_{1n}x'_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x''_n &= \mu'_{n1}x'_1 + \dots + \mu'_{nn}x'_n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Внося в последние формулы вместо $x'_1, \dots, x'_n$ их выражения (1), увидим, что $x''_1, \dots, x''_n$ связаны с первоначальными переменными также линейной подстановкой

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= \mu''_{11}x_1 + \mu''_{12}x_2 + \dots + \mu''_{1n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x''_n &= \mu''_{n1}x_1 + \mu''_{n2}x_2 + \dots + \mu''_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

выражающей собою результат двух последовательно произведенных подстановок (1) и (2).

Легко видеть, что

$$\mu''_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \mu'_{is}\mu_{sk}. \tag{4}$$

Отсюда следует, на основании правила умножения определителей, что определитель Δ'' подстановки (3) равен произведению определителей Δ и Δ' подстановок (1) и (2):

$$\Delta'' = \Delta \cdot \Delta'. \tag{5}$$

Если, как мы всегда предполагаем, подстановки (1) и (2) неособенные, т. е. $\Delta \neq 0$, $\Delta' \neq 0$, то в силу предыдущего равенства $\Delta'' \neq 0$.

Итак, результат двух неособенных подстановок есть также неособенная подстановка.

III. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

10. Билинейные и квадратичные формы. Рассмотрим два ряда переменных (по n переменных в каждом ряде)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

и

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Билинейной формой называется целая рациональная функция этих переменных, которая линейна и однородна относительно переменных каждого ряда. Таким образом билинейная форма есть сумма произведений вида $y_i x_j$, умноженных на постоянные коэфициенты. Эти коэфициенты мы будем обозначать одной буквой с двумя значками, например a_{ij}; первый значок будет указывать номер входящей переменной y_i, а второй - номер переменной x_j. Обозначая данную билинейную форму через $\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, или просто через Ω, будем иметь

$$\begin{aligned}\Omega = {} & a_{11}y_1x_1 + a_{12}y_1x_2 + \ldots + a_{1n}y_1x_n + \\ & + a_{21}y_2x_1 + a_{22}y_2x_2 + \ldots + a_{2n}y_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}y_nx_1 + a_{n2}y_nx_2 + \ldots + a_{nn}y_nx_n,\end{aligned} \tag{1}$$

или, короче,

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_ix_j, \tag{1a}$$

или еще

$$\Omega = y_1\Omega_1 + y_2\Omega_2 + \ldots + y_n\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\Omega_i, \tag{2}$$

где

$$\Omega_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{3}$$

обозначают линейные формы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Примером билинейной формы может служить скалярное произведение двух векторов $\mathbf{P} = (x, y, z)$ и $\mathbf{P}' = (x', y', z')$, которое равно (в прямоугольных координатах)

$$xx' + yy' + zz',$$

и, следовательно, есть билинейная форма двух рядов переменных (координат двух данных векторов)

$$x, y, z \quad \text{и} \quad x', y', z'$$

(в нашем случае $n = 3$).

Билинейная форма называется *симметричной*, если

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{4}$$

т. е. если коэфициенты при y_ix_j и y_jx_i одинаковы. Симметричная билинейная форма не изменится, если поменять местами переменные x_i и y_i. Приведенное выше выражение для скалярного произведения есть симметричная билинейная форма.

Если в симметричной билинейной форме Ω положить

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \ \ldots, \ x_n = y_n,$$

то она обратится в *квадратичную форму*, которую мы обозначим через Φ:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2.\end{aligned} \tag{5}$$

В правой части есть ряд членов, равных между собою, а именно, в силу условия (4) члены вида $a_{ij}x_ix_j$ и $a_{ji}x_jx_i$ равны между собою и в сумме дают $2a_{ij}x_ix_j$. Таким образом вместо (5) можно написать (выписывая в первую строку диагональные члены, содержащие квадраты переменных)

$$\begin{aligned}\Phi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + 2a_{n-1,\,n}x_{n-1}x_n\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Вместо того чтобы обозначать коэфициенты при x_ix_j через $2a_{ij}$, мы могли бы обозначать их просто через a_{ij}, но тогда получили бы менее симметричные формулы.

Формулу (5) можно кратко переписать в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,, \tag{5a}$$

или

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i\Phi_i\,, \tag{7}$$

где ради единообразия мы обозначили через Φ_i линейные формы, которые были выше обозначены через Ω_i, т. е. положили

$$\Phi_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,. \tag{8}$$

Легко видеть, что

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,, \tag{8a}$$

так что равеиство (7) можно переписать еще и так:

$$2\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,. \tag{7a}$$

Из сказанного следует, что каждой квадратичной форме (5) можно всегда сопоставить одну вполие определенную симметричную билинейную форму

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} y_i\Phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,. \tag{9}$$

Билиией ная форма Ω называется *полярной* по отношению к квадратичной форме Φ.

Определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\,\ldots\,a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m}\,a_{n2}\,\ldots\,a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

составленный указанным образом из коэфициентов квадратичной формы Φ, называется ее *дискриминантом*. На основании (4), дискриминант квадратичной формы есть симметричный определитель.

A называется также дискриминантом билинейной формы Ω (как в случае симметричной, так и в случае несимметричной формы Ω).

Замечание. Очевидно, что если в несимметричной билинейиой форме положить $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то мы также получим квадратичную форму. Но тогда коэфициент при x_ix_j будет не $2a_{ij}$ или $2a_{ji}$, а сумма $(a_{ij} + a_{ji})$. На основании этого очевидно, что можно найтн бесчисленное множество били-

нейных форм, которые при $x_i = y_i$ обращаются в заданную квадратичную. Но существует, как мы видели, только одна единственная *симметричная* форма, которая обладает этим свойством. Это есть полярная форма, определяемая формулой (9).

11. Преобразование квадратичных форм. Пусть дана квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{1}$$

и пусть вместо переменных x_i введены новые переменные x_i' при помощи линейной и однородной подстановки (§ 8):

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} x_k' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Тогда, очевидно, форма Φ превратится в квадратичную форму Φ' новых переменных x_i':

$$\Phi' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}' x_i' x_j'. \tag{3}$$

Чтобы вычислить коэфициенты a_{ij}' преобразованной формы, достаточно подставить в правую часть (1) выражения (2) и сделать приведения. Эта операция никакого труда не представляет, но мы все же проведем ее в два приема следующим образом. Рассмотрим билинейную форму Ω, полярную по отношению к форме Φ:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i x_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \Phi_i, \tag{4}$$

где, как всегда,

$$\Phi_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j. \tag{5}$$

Из формы Ω мы сначала получим форму Ω', полярную по отношению к форме Φ', для чего достаточно в правой части (4) произвести над переменными x_i подстановку (2), а над переменными y_i такую же подстановку, т. е. положить

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} y_k'. \tag{2a}$$

Если после этого положим в полученном результате $y_i' = x_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то мы, очевидно, получим форму Φ'.

Ясно, что преобразование Ω в Ω' мы можем произвести в два приема: сперва заменить переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и затем переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Итак, заменим сперва в правой части (4) переменные x_i их выражениями (2).

Тогда форма Ω обратится в форму переменных $x_1', \ldots, x_n', y_1, \ldots, y_n$:

$$\Omega'' = y_1\Phi_1'' + y_2\Phi_2'' + \ldots + y_n\Phi_n'' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'' y_i x_j', \tag{6}$$

где $\Phi_1'', \Phi_2'', \ldots, \Phi_n''$ обозначают линейные формы

$$\Phi_i'' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}'' x_j', \tag{7}$$

получаемые из форм (5) путем замены $x_1, \ldots, x_n$ их выражениями (2).

На основании формул (11) § 8, коэфициенты a''_{ij} даются формулами [1])

$$a''_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\lambda_{sj}, \tag{8}$$

и на основании сказанного в том же § 8, дискриминант билинейной формы Ω'', т. е. определитель

$$A'' = \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{n1} & a''_{n2} & \dots & a''_{nn} \end{vmatrix}$$

дается формулой

$$A'' = A \cdot \Delta, \tag{9}$$

где A дискриминант формы Ω (или исходной формы Φ), а Δ — определитель подстановки (2).

Производя теперь подстановку (2а) в форме Ω'', мы получим требуемую форму

$$\Omega' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x'_i y'_j,$$

причем коэфициенты a'_{ij} выражаются через коэфициенты a''_{ij} по формулам, аналогичным тем, по которым коэфициенты a''_{ij} выражаются через исходные.

Нет надобности выписывать эти формулы, следует только отметить следующие обстоятельства.

Аналогично формуле (9) мы будем, конечно, иметь

$$A' = A''\Delta,$$

где A' — дискриминант формы Ω', так что

$$A' = A \cdot \Delta^2 \tag{10}$$

Значит, *дискриминант преобразованной формы равен дискриминанту исходной формы, умноженному на квадрат определителя подстановки.*

Далее, мы знаем (§ 8), что ранги определителей A'' и A одинаковы; точно так же ранги определителей A' и A'' одинаковы, а поэтому A и A' также имеют одинаковые ранги.

Итак, мы имеем следующее предложение фундаментальной важности: *ранг дискриминанта квадратичной формы остается неизменным при линейном и однородном преобразовании переменных* (разумеется, речь идет о неособенном преобразовании).

Прибавим к сказанному еще следующее замечание. Не надо думать, что линейные формы

$$\Phi'_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x'_j = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi'_i}{\partial x'_i}, \tag{11}$$

которые связаны с преобразованной квадратичной формой Φ' так же, как формы Φ_i были связаны с исходной формой Φ, получаются из форм Φ_i путем простой замены переменных (2). Найдем зависимость между линейными формами Φ_i и Φ'_i.

По самому определению форм Ω и Ω' имеем

$$\Omega' = \Omega,$$

причем предыдущее равенство есть тождество, если в правой части вместо

[1]) Здесь роль a'_{ik} исполняют a''_{ij}.

переменных x_i и y_i подразумевать их выражения (2) и (2а). Предыдущее равенство может быть переписано так:

$$y_1'\Phi_1' + y_2'\Phi_2' + \ldots + y_n'\Phi_n = y_1\Phi_1 + \ldots + y_n\Phi_n . \tag{12}$$

Подставляя в правую часть вместо переменных y_i их выражения (2а) через y_i', получим

$$\begin{aligned} y_1'\Phi_1' + y_2'\Phi_2' + \ldots + y_n'\Phi_n' = {} & (\lambda_{11}y_1' + \lambda_{12}y_2' + \ldots + \lambda_{1n}y_n')\,\Phi_1 + \\ & + (\lambda_{21}y_1' + \lambda_{22}y_2' + \ldots + \lambda_{2n}y_n')\,\Phi_2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\lambda_{n1}y_1' + \lambda_{n2}y_2' + \ldots + \lambda_{nn}y_n')\,\Phi_n . \end{aligned}$$

Это равенство есть тождество, если в правых частях вместо x_i подразумевать их выражения через x_i'.

Сравнивая коэфициенты при y_1', y_2', ..., y_n' в обеих частях, получим, наконец,

$$\Phi_i' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji}\Phi_j . \tag{13}$$

Итак, формы Φ_i' суть линейные и однородные комбинации форм Φ_i, если в этих последних вместо переменных x_i подразумевать их выражения (2).

Меняя ролями старые и новые переменные, убедимся тем же способом, что и формы Φ_i суть линейные комбинации форм Φ_i'. Это вытекает также из того, что определитель, составленный из коэфициентов λ_{ij}, по условию, отличен от нуля и, следовательно, соотношения (13) могут быть разрешены относительно величин Φ_i.

Из этого вытекает одно простое очевидное следствие: *если данные значения переменных x_1, x_2, ..., x_n удовлетворяют уравнениям*

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_n = 0, \tag{14}$$

то соответствующие им значения x_1', x_2', ..., x_n' будут удовлетворять уравнениям

$$\Phi_1' = 0, \quad \Phi_2' = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_n' = 0 . \tag{15}$$

Иными словами, хотя функции Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n не переходят при подстановке (2) непосредственно в Φ_1', Φ_2', ..., Φ_n', все-таки система уравнений (14) переходит в эквивалентную ей систему (15).

12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Перейдем теперь к вопросу об упрощении квадратичной формы

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{1}$$

путем линейной подстановки над переменными. А именно, покажем, что *всякая квадратичная форма Φ может быть при помощи неособенной* линейной подстановки

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}x_j' \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

приведена к „каноническому" виду

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_r x_r'^2, \tag{3}$$

где фигурируют только квадраты переменных; через λ_1, λ_2, ..., λ_r обозначены постоянные, отличные от нуля.

Важно при этом отметить, что *если коэфициенты данной формы — действительные числа, то и коэфициенты подстановки могут быть взяты действительными*; в этом случае будут, конечно, действительными и коэфициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ в (3).

Формулы (2), связывающие новые и старые переменные, могут быть написаны и так (если их разрешить относительно перемевных x_i'):

$$x_i' \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2a}$$

Для большей ясности рассмотрим сперва форму двух переменных

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Предположим сперва, что в эту форму входит по крайней мере один квадратный член, т. е. что по крайней мере одна из величин a_{11} и a_{22} отлична от нуля. Изменяя, в случае надобности, нумерацию переменных, можно предположить, что $a_{11} \neq 0$. Тогда будем иметь

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2\right) + a_{22}x_2^2 =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + a_{22}x_2^2,$$

или

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2.$$

Произведя подстановку

$$x_1' = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2, \quad x_2' = x_2,$$

мы приведем форму Φ к требуемому каноническому виду

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2,$$

где $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}$. Может случиться, что $\lambda_2 = 0$; тогда Φ приведется к виду

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2.$$

Выше мы исключили случай, когда $a_{11} = a_{22} = 0$. В этом случае исходная форма имеет вид

$$\Phi = 2a_{12}x_1x_2.$$

Если, как мы будем считать, исходная форма не равна тождественно нулю, то $a_{12} \neq 0$.

Произведя подстановку

$$x_1' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_2' = \frac{x_1 - x_2}{2},$$

т. е.

$$x_1 = x_1' + x_2', \quad x_2 = x_1' - x_2',$$

получим опять

$$\Phi' = 2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2) = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2 = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2,$$

где

$$\lambda_1 = 2a_{12}, \quad \lambda_2 = -2a_{12}.$$

Вернемся теперь к общему случаю.

Проведем приведение к каноническому виду (3) постепенно, производя над переменными ряд последовательных линейных подстановок.

Если в форме (1) отсутствуют все члены, содержащие квадраты переменных, то всегда можно путем линейной подстановки привести ее к виду, где такие члены имеются.

Пусть, действительно, $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$. Тогда по крайней мере один из коэфициентов a_{ij} (при $i \neq j$) будет отличен от нуля, иначе форма была бы тождественно равна нулю.

Производя, в случае необходимости, изменение нумерации переменных, можно считать, что $a_{12} \neq 0$.

Тогда, производя подстановку

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_2' = \frac{x_1 - x_2}{2}, \\ x_3' &= x_3, \ldots, \quad x_n' = x_n, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

мы получим вместо члена $2a_{12}x_1x_2$ члены $2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$. Эти члены, очевидно ни с какими другими не сократятся, ибо никакие другие члены не будут содержать $x_1'^2$ и $x_2'^2$.

Итак, произведя предварительно, в случае надобности, подстановку вида (4), можно считать, что форма Ф содержит по крайней мере один член с квадратом переменной. Изменяя, в случае надобности, нумерацию, мы можем считать, что $a_{11} \neq 0$. Выпишем теперь все члены формы Ф, содержащие переменную x_1; эти члены будут

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n. \tag{*}$$

Предыдущая сумма может быть переписана так:

$$a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \ldots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2}{a_{11}} + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \text{члены, не содержащие } x_1. \tag{**}$$

Вводя теперь в Ф вместо совокупности членов (*) ее выражение (**), получим

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \Phi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

где Φ_1 — квадратичная форма уже $(n-1)$ переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Производя подстановку

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ x_2' &= x_2, \ x_3' = x_3, \ldots, \ x_n' = x_n, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

мы приведем нашу форму Ф к виду

$$\Phi' = a_{11}x_1'^2 + \Phi_1(x_2', \ldots, x_n'),$$

где выделен один квадратичный член, а Φ_1 есть квадратичная форма $(n-1)$ переменных.

Если Φ_1 тождественно равна нулю, то процесс приведения закончен; в противном случае, применяя только что указанный прием к форме Φ_1, мы выделим из нее один квадратичный член и у нас останется форма уже от $(n-2)$ переменных и т. д., так что, в конце концов, мы получим форму вида (3), содержащую члены только с квадратами переменных.

Все это достигается путем ряда линейных подстановок вида (4) или (5). Эти подстановки, очевидно, неособенные, ибо могут быть обращены. Поэтому и результат ряда этих подстановок есть неособенная подстановка (§ 9).

Таким образом высказанное предложение доказано.

Число r членов в правой части (3) не может, конечно, превосходить числа переменных n и, вообще говоря, будет ему равно. Легко заранее вычислить это число r.

Действительно, мы знаем, что ранг дискриминанта квадратичной формы не изменяется при линейном преобразовании переменных (§ 11).

Составим дискриминант формы Φ'. Это — определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 \dots & \lambda_r \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{vmatrix},$$

ранг которого равен, очевидно, r, ибо определитель порядка r, составленный из первых r строк и первых r столбцов равен $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_r$ и отличен от нуля, все же определители порядка выше r содержат, очевидно, строку (и столбец), состоящие только из нулей, и потому равны нулю.

Итак, *число r членов в канонической форме равно рангу дискриминанта данной формы.*

Если дискриминант

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

данной формы отличен от нуля, то ранг его равен n и, значит, каноническая форма имеет вид

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2, \tag{3а}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ все отличны от нуля. В этом случае данная форма называется *неособенной.*

Если же $A = 0$, то в (3) будет $r < n$ и данная форма называется *особенной.*

Иногда удобнее форму Φ' писать в виде (3а) даже тогда, когда она особенная. В этом случае некоторые из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ равны нулю.

После приведения формы к каионическому виду (3), ее можно еще упростить, произведя подстановку

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda_1}\, x_1', \dots, \quad \xi_r = \sqrt{\lambda_r}\, x_r', \quad \xi_{r+1} = x_{r+1}', \dots, \quad \xi_n = x_n'.$$

Тогда наша форма приведется попросту к сумме квадратов

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_r^2.$$

Однако такое приведение, *если оставаться в области действительных чисел, что мы и будем считать в дальнейшем,* возможно только в том случае, когда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ — положительные числа.

Если некоторые из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ отрицательны, то, не нарушая общности, можно считать, что

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \dots, \quad \lambda_k > 0, \quad \lambda_{k+1} < 0, \dots, \quad \lambda_r < 0,$$

(причем может случиться, что $k = 0$, т. е. все λ отрицательны, или $k = r$, т. е. все λ положительны).

Тогда, полагая

$$\xi_1 = \sqrt{\lambda_1}\, x_1', \dots, \quad \xi_k = \sqrt{\lambda_k}\, x_k', \quad \xi_{k+1} = \sqrt{-\lambda_{k+1}}\, x_{k+1}', \dots,$$

$$\xi_r' = \sqrt{-\lambda_r}\, x_r', \quad \xi_{r+1} = x_{r+1}', \dots, \quad \xi_n = x_n'.$$

мы приведем нашу форму к виду

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_k^2 - \xi_{k+1}^2 - \ldots - \xi_r^2. \qquad \text{(a)}$$

Мы видели, что число r членов в канонической форме вполне определяется исходной формой. Легко показать, что число k положительных (и, значит, число $(r-k)$ отрицательных) членов также не зависит от способа приведения формы к каноническому виду (здесь мы считаем, что коэфициенты исходной формы, а также коэфициенты рассматриваемых подстановок числа действительные).

Действительно, предположим, что каким-либо способом мы привели нашу квадратичную форму к виду

$$\xi_1'^2 + \ldots + \xi_{k'}'^2 - \xi_{k'+1}'^2 - \ldots - \xi_r'^2, \qquad \text{(b)}$$

где $k' \neq k$, например $k' > k$.

Переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \ldots, \xi_n$, а также $\xi_1', \ldots, \xi_r', \ldots, \xi_n'$ суть линейные однородные функции исходных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы всегда можем придать этим последним такие частные значения (неравные одновременно нулю), чтобы получить:

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_k = \xi_{k'+1}' = \ldots = \xi_r' = \xi_{r+1}' = \ldots = \xi_n' = 0.$$

Действительно, предыдущие соотношения суть линейные и однородные уравнения относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, причем число этих уравнений $k + (n - k') = n + k - k'$ меньше n, ибо $k - k' < 0$.

Значит, эта система всегда имеет ненулевые решения. Взяв такие частные значения переменных, получим для форм (a) и (b) частные значения: $-\xi_{k+1}^2 - \ldots - \xi_r^2$ и $\xi_1'^2 + \ldots + \xi_{k'}'^2$, и, следовательно (при указанных частных значениях переменных), будем иметь

$$-\xi_{k+1}^2 - \ldots - \xi_r^2 = \xi_1'^2 + \ldots + \xi_{k'}'^2,$$

а это возможно только в том случае, когда

$$\xi_{k+1} = \ldots = \xi_r = \xi_1' = \ldots = \xi_{k'}' = 0,$$

ибо, по условию, мы имеем дело с действительными величинами. Итак, мы должны будем иметь

$$\xi_1' = \xi_2' = \ldots = \xi_{k'}' = \xi_{k'+1}' = \ldots = \xi_n' = 0,$$

а это возможно только в том случае, когда [1])

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

что противоречит условию. Следовательно, должно быть: $k = k'$.

Доказанная только что теорема носит название „закона инерции квадратичных форм".

Возвращаясь к каноническому виду (3), заметим следующее: если все коэфициенты λ_i — положительные, то, очевидно, форма Φ', а следовательно, и исходная форма Φ, может принимать только неотрицательные значения. Если же все коэфициенты λ_i — отрицательные, то форма может принимать только неположительные значения. В обоих этих случаях форма называется *определенной* [2]).

---

[1]) По условию, $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ суть линейные однородные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связанные с ними соотношениями вида $\xi_1' = \mu_{11}x_1 + \mu_{12}x_2 + \ldots + \mu_{1n}x_n, \ldots, \xi_n' = \mu_{n1}x_1 + \ldots + \mu_{nn}x_n$, причем определитель, составленный из μ_{ij}, отличен от нуля (подстановка — неособенная).

Значит, если $\xi_1' = \ldots = \xi_n' = 0$, то необходимо $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

[2]) Некоторые авторы применяют это название только в случае неособенных форм; в случае особенной формы они применяют название „полуопределенная".

В первом случае она называется *положительной*, а во второй — *отрицательной*.

Легко, наконец, видеть, что определенная *неособенная* форма Φ может обращаться в нуль тогда и только тогда, когда все переменные $x_1, \ldots, x_n$ обращаются в 0. Действительно, если $\Phi = 0$, и, следовательно,

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 = 0,$$

то мы должны иметь $x_1' = x_2' = \ldots = x_n' = 0$ (ибо все коэфициенты λ_i одного знака и не равны нулю). А из этого следует, что

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Замечание. Существует простое общее правило, позволяющее узнать, есть ли данная форма положительная, отрицательная или неопределенная. Не останавливаясь на этом правиле (которое можно найти в курсах высшей алгебры) заметим только следующее: для того чтобы квадратичная форма двух переменных

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

была неособенной и положительной, необходимо и достаточно, чтобы $a_{11} > 0$ $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ (а следовательно, и $a_{22} > 0$); это непосредственно следует из формул, приведенных в начале этого параграфа.

13. Условия распадения квадратичной формы на два линейных множителя. Сказанное в предыдущем параграфе позволяет, между прочим, сразу ответить на вопрос: при каком условии квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

может быть представлена в виде произведения двух линейных множителей

$$\Phi = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n) \tag{2}$$

(*действительных или мнимых*). Докажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы ранг дискриминанта формы равнялся 1 или 2.

Действительно, если линейные формы

$$f_1 = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \quad \text{и} \quad f_2 = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n \tag{3}$$

независимы между собою, то в подстановке

$$\begin{aligned} x_1' &= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \\ x_2' &= b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n, \\ x_3' &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n \end{aligned}$$

можно подобрать коэфициенты $c_1, \ldots, c_n, \ldots, l_1, \ldots, l_n$ так, чтобы подстановка была неособенной[1]). После этой подстановки наша форма приведется к виду

$$\Phi' = x_1'x_2'.$$

---

[1]) Это всегда можно сделать бесчисленным множеством способов. Действительно, так как линейные формы (3) независимы, то ранг таблицы

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix}$$

Полагая, $x_1' = \xi_1 - \eta_1$, $x_2' = \xi_2 - \eta_2$, $x_3' = \xi_3$, ..., $x_n' = \xi_n$, приведем ее к виду

$$\xi^2 - \eta^2.$$

Значит, в нашем случае $r = 2$ и ранг дискриминанта равен двум.

Если формы (3) зависимы, то мы будем иметь тождественно

$$(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n) = k(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n),$$

где k некоторая постоянная. Значит, наша форма имеет вид

$$\Phi = k(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2. \tag{2a}$$

Считая, что, например, $a_1 \neq 0$, и полагая

$$x_1' = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \quad x_2' = x_2, \quad \ldots, \quad x_n' = x_n,$$

мы приведем ее к виду

$$\Phi' = kx_1'^2.$$

Таким образом в этом случае $r = 1$.

Обратно, если $r = 1$ или $r = 2$, форма Φ, как мы знаем, может быть приведена к виду

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2, \quad \text{или} \quad \Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2.$$

В первом случае, подставляя вместо x_1' его выражение через переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы увидим, что Φ имеет вид (2a), т. е. Φ является полным квадратом линейной функции. Во втором случае имеем

$$\Phi' = (\sqrt{\pm\lambda_1}\, x_1' + \sqrt{\mp\lambda_2}\, x_2')(\sqrt{\pm\lambda_1}\, x_1' - \sqrt{\mp\lambda_2}\, x_2'),$$

т. е. форма разлагается на два линейных множителя, действительных или мнимых. Если λ_1 и λ_2 имеют различные знаки, то всегда можно так подобрать знаки $\pm\lambda_1$ и $\mp\lambda_2$, чтобы множители были действительными. В противном случае это, очевидно, невозможно. Наше утверждение таким образом доказано.

Пример. Квадратичная форма двух переменных

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

всегда разлагается на два линейных множителя. Из формул, приведенных в начале предыдущего параграфа, заключаем, что при $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ множители эти различные и мнимые; при $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ множители эти различные и могут быть выбраны действительными; при $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ множители эти совпадающие (и действительные).

равен двум (§ 5) и, следовательно, один из определителей $a_1b_2 - a_2b_1, a_1b_3 - a_3b_1, \ldots$ отличен от нуля. Не нарушая общности, можно считать: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Тогда, например, подстановка

$$x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_nx_n, \quad x_2' = b_1x_1 + b_2x_2 + b_nx_n, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4, \quad x_n' = x$$

удовлетворяет нашему условию, ибо ее определитель не равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots & b_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot 0\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

14. Ортогональные подстановки. Рассмотрим квадратичную форму частного вида

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2. \tag{1}$$

При линейной подстановке

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}x_1' + \ldots + \lambda_{1n}x_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \lambda_{n1}x_1' + \ldots + \lambda_{nn}x_n' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

она перейдет, вообще говоря, в форму общего вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'x_i'x_j'.$$

Однако при некотором выборе коэфициентов λ_{ij} подстановки (2), может случиться, что преобразованная форма будет также иметь вид

$$x_1'^2 + \ldots + x_n'^2. \tag{3}$$

В таком случае подстановка (1) называется *ортогональной*. Это название дано по аналогии с подстановками, выражающими в случае $n = 3$ или $n = 2$ преобразование прямоугольных координат; см. главу III, § 72.

Легко вывести соотношения, которые должны связывать коэфициенты ортогональной подстановки и которые представляют собой обобщение соотношений (3), (4), (3а), (4а) § 71 (глава III). Действительно, внося выражения (2) в (1) и записав, что в получаемом выражении коэфициенты при $x_r'x_s'$ равны нулю, если $r \neq s$, и равны 1, если $r = s$, легко находим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ir}\lambda_{is} = \begin{cases} 0 \text{ при } r \neq s. \\ 1 \text{ при } r = s \end{cases} \tag{4}$$

Эти формулы являются обобщением формул (3), (4) § 72 (глава III). Обозначим через Δ определитель подстановки (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}.$$

Производя умножение $\Delta \cdot \Delta$ (по столбцам) и применяя формулы (4), легко выводим

$$\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

откуда

$$\Delta = \pm 1. \tag{5}$$

Придадим теперь в соотношениях (4) значку r какое-либо определенное значение и выделим из этих соотношений те, которые соответствуют этому значению значка. Мы получим таким образом систему n уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ir}\lambda_{is} = \delta_{rs} \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где δ_{rs} обозначает 0 при $s \neq r$, и 1 при $s = r$. Рассматривая $\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \ldots, \lambda_{nr}$ как неизвестные и решая предыдущую систему по способу § 3, получим, очевидно,

обозначая через Δ_{kr} алгебраическое дополнение элемента λ_{kr} в определителе Δ,

$$\lambda_{1r} = \frac{\Delta_{1r}}{\Delta}, \ldots, \lambda_{nr} = \frac{\Delta_{nr}}{\Delta},$$

или, на основании (5),

$$\lambda_{kr} = \pm \Delta_{kr}, \tag{6}$$

где знак берется тот же, что и в (5). Решая теперь уравнения (2) относительно $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, получаем на основании (5) и (6) (см. § 3):

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \ldots + \lambda_{n1}x_n, \\ x_2' &= \lambda_{12}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{n2}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= \lambda_{1n}x_1 + \lambda_{2n}x_2 + \ldots + \lambda_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

Мы видим, таким образом, что подстановка (2а), являющаяся обратной подстановке (2), получается из последней заменой в таблице коэфициентов строк на столбцы и обратно. Применяя к подстановке (2а) те же рассуждения, что и к подстановке (2), получим вместо (4) соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ri}\lambda_{si} = \begin{cases} 0 \text{ при } r \neq s, \\ 1 \text{ при } r = s, \end{cases} \tag{4a}$$

являющиеся, таким образом, следствием соотношений (4), точно так же, как в частном случае $n = 3$, соотношения (3а), (4а) § 71 (глава III), являются следствием соотношений (3), (4) того же параграфа.

Заметим еще следующее весьма важное для нас обстоятельство.

Пусть дана произвольная квадратичная форма

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{7}$$

и пусть над переменными произведена ортогональная подстановка (2), так что форма Φ обращается в

$$\Phi' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'x_i'x_j'. \tag{8}$$

Тогда дискриминанты форм Φ и Φ' равны между собою, т. е.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & \ldots & a_{1n}' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}' & \ldots & a_{nn}' \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Это следует из равенства

$$A' = A \cdot \Delta^2$$

и из свойства (5) ортогональной подстановки.

Доказанный результат формулируют следующим образом: *дискриминант квадратичной формы есть инвариант при ортогональных подстановках* или, короче, *дискриминант есть „ортогональный" инвариант.*

Легко указать еще ряд других выражений, составленных при помощи коэфициентов формы Φ и обладающих тем же свойством инвариантности.

Действительно, рассмотрим вспомогательную форму

$$\Psi = \Phi - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

где λ — произвольный параметр. При ортогональной подстановке (2) эта форма переходит в форму

$$\Psi' = \Phi' - \lambda(x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2),$$

ибо Φ переходит в Φ', а $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ обращается в $x_1'^2 + \ldots + x_n'^2$.

Дискриминанты форм Ψ и Ψ' должны быть, по доказанному, равны между собою. Дискриминант D формы Ψ отличается от дискриминанта A формы Φ только тем, что диагональные члены $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ заменены разностями $a_{11} - \lambda, a_{22} - \lambda, \ldots, a_{nn} - \lambda$, так что

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Аналогичное выражение имеем для дискриминанта формы Ψ'; поэтому, согласно сказанному, будем иметь равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda & \ldots & a_{1n}' \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{n1}' & \ldots & a_{nn}' - \lambda \end{vmatrix}, \tag{11}$$

справедливое для любого значения параметра λ.

С другой стороны, раскрывая определитель (10) и располагая по степеням λ, будем, очевидно, иметь

$$D = C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n, \tag{12}$$

где $C_0, \ldots, C_n$ — определенные выражения, составленные из коэфициентов a_{ij}. Мы не будем давать всех этих выражений, а ограничимся только нахождением C_0, C_1 и C_n[1]). Прежде всего ясно, что члены, содержащие λ^n и λ^{n-1}, могут произойти исключительно от членов, происходящих от перемножения элементов главной диагонали:

$$(a_{11} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots$$

(мы выписывали только интересующие нас два члена). Значит,

$$C_0 = (-1)^n, \; C_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}).$$

Чтобы вычислить C_n, заметим, что, на основании (12), C_n равняется значению D при $\lambda = 0$, следовательно,

$$C_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = A.$$

Возвратимся теперь к равенству (11). Разлагая правую часть и располагая по степеням λ, получим равенство

$$C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \ldots + C_n = C_0'\lambda^n + C_1'\lambda^{n-1} + \ldots + C_n', \tag{11a}$$

---

[1]) В тексте книги эти выражения вычислены непосредственно для тех частных случаев, которые нам понадобились (а именно, для случаев $n = 2$ и $n = 3$).

где $C_0', \ldots, C_n'$ суть выражения, составленные из коэфициентов a_{ij}' точно так же, как $C_0, \ldots, C_n$ составлены из коэфициентов a_{ij}. Так как (11) справедливо при всех значениях λ, то мы должны иметь

$$C_0 = C_0', \quad C_1 = C_1', \quad \ldots, \quad C_n = C_n', \tag{13}$$

т. е. $C_0, C_1, \ldots, C_n$ суть тоже ортогоиальные инварианты. C_0 и C_n ничего нового не дают, ибо $C_0 = (-1)^n$ есть просто постоянная, а C_n есть уже известный инвариаит A, но $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ суть новые инварианты. Обозначая C_1 через $(-1)^{n-1}S$, имеем

$$S = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

По доказанному, C_1, а следовательио, и S, т. е. сумма диагональных членов есть ортогональный инвариант.

15. О приведении квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогональной подстановки. Выше была доказана теорема, что всякая квадратичная форма Ф может быть приведена путем линейной подстаиовки к каноническому виду

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 \tag{1}$$

(мы пишем теперь правую часть в виде n членов, считая, что некоторые из λ_i могут быть равны нулю).

Естественно возникает вопрос: можно ли добиться того же самого приведения путем *ортогональной* подстановки.

Ответ оказывается всегда утвердительным, если исходная форма имеет действительиые коэфициенты. В этом случае коэфициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ также оказываются действительными числами.

Доказательство этого важного предложения не представляет никаких трудностей и может быть получено иепосредственным обобщением доказательства, прнведенного в тексте кииги для $n = 3$.

Не останавливаясь на этом, заметим только, что коэфициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ каноиической формы должны быть корнями уравнения n-й степени

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Действительно, определитель в левой части есть определитель D предыдущего параграфа. Такой определитель, составленный для канонической формы Ф', есть, очевидно,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda).$$

Так как, на основании сказанного в предыдущем параграфе, определители D составленные для исходной и преобразованной форм, тождественно равны, то будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda),$$

откуда становится ясным, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть корни уравнения (2).

Уравнение (2) носит название „векового", так как подобным уравнением определяются так называемые „вековые члены" в небесной механике.

Список опечаток

к книге Н. И. Мусхелишвили. Курс Аналитической геометрии

Стр.	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*	*По чьей вине*
47	8 сверху	которое	которые	Ред.
104	15 »	безразлично	безразличны	»
133	17 »	$\mathrm{P}_{n'}$	P_{n}	Тип.
137	3 снизу	$\overrightarrow{CM}'_1 = \overrightarrow{CM} - \mathrm{U}$	$\overrightarrow{CM}' = CM'_1 - \mathrm{U}$	»
310	15 »	λ''_{x_2}	λ'_{a_2}	Ред.
426	4 »	$a'_{23}y$	$a'_{23}y'$	»
478	9 сверху	$\Omega(x;\ x)\,\Omega(x;\ y)$	$\Omega(x;\ x)\,\Omega(y;\ y)$	»
491	в формуле (6)	a'_{121}	a'_{21}	Тип.

Зак. 1946.